חשבון אינפיניטסימלי II

אור דגמי, or@digmi.org

30 באוקטובר 2011

אתר אינטרנט: http://digmi.org

תקציר

סיכום ההרצאות של דן מנגובי משיעורי חשבון אינפיניטסימלי II באוניברסיטה העברית בירושלים בשנת לימודים 2011.

תוכן עניינים

I האינטגרל המסויים 3
1 רעיון 3
2 אינטגרל לפי Darboux 4
2.1 חלוקה 4
2.1.1 עידון חלוקה 5
2.2 פונקציה אינטגרבילית 7
2.3 קריטריון רימן 8
2.4 תנאים מספיקים לאינטגרביליות 11
2.4.1 מונוטוניות 11
2.4.2 רציפות 11
2.5 תכונות האינטגרל 12
2.5.1 ערך המוחלט של פונקציה 12
2.5.2 פונקציות אי שליליות 13
2.5.3 השוואה 13
2.5.4 אינטגרלית בכל תת קטע 14
2.5.5 אריתמטיקה של אינטגרלים 15
2.5.6 הרכבה 22
3 סכומי רימן 25
3.1 אינטגרביליות לפי רימן 27
3.2 השקילות בין אינטגרל דרבו לאינטגרל רימן 29
3.3 משפט הערך הממוצע 33
3.3.1 גרסה כללית יותר של משפט ערך הממוצע 34
4 המשפט היסודי של החשבון האינטגרלי 35
5 שיטות אינטגרציה 43
5.1 אינטגרציה בחלקים 43
5.1.1 פולינומי טיילור 44
5.2 החלפת משתנים 47
6 אינטגרלים לא אמיתיים 48
6.1 קריטריונים להתכנסות אינטגרלים לא אמיתיים 52
6.1.1 פונקציית גאמא 60

II טורים 62

7 טורים 62
7.1 הזנב של טור 65
7.2 אריתמטיקה של טורים 66
7.3 טורים חיוביים 67
7.3.1 תנאי התכנסות 67
7.4 טורים עם סימנים מתחלפים 77
7.4.1 משפט Abel Dirichlet 79
7.4.2 חוק הקיבוץ 81
7.4.3 חוק החילוף 82
7.4.4 התכנסות בהחלט 83
7.4.5 ערבוב של טורים מתכנסים בהחלט\בתנאי 85
7.5 מכפלה של טורים 88
7.5.1 מכפלת קושי של טורים 88

III חזרה לאינטגרלים 90

8 תנאים נוספים לאינטגרביליות 90
8.1 "כמעט רציפה" 90
8.1.1 בת מנייה 91
8.1.2 מידה אפס 94
8.1.3 קבוצת קנטור 95
8.2 קשר לאינטגרציה 97

IV סדרות של פונקציות 99

9 סדרות של פונקציות 99
9.1 אינטגרביליות 103
9.2 התכנסות במידה שווה 104
9.2.1 משמעות השם "במידה שווה" 105
9.2.2 משמעות השם 2 105
9.2.3 קריטריון קושי להתכנסות במידה שווה 107
9.2.4 דרך נוספת לראות את המושג של התכנסות במידה שווה 108
9.2.5 נגזרות והתכנסות במ"ש 112
10 טורים של פונקציות 117
10.1 מבחן הM של ויירשטראס 117
10.2 טורי חזקות 119
10.2.1 רדיוס התכנסות 119
10.2.2 טור חזקות וגזירה 124
10.2.3 השוואת מקדמים 126
10.2.4 משפט טיילור 126
10.2.5 כפל טורי חזקות 131
10.2.6 משפט בורל 134

V מסילות ועקומים במישור 141

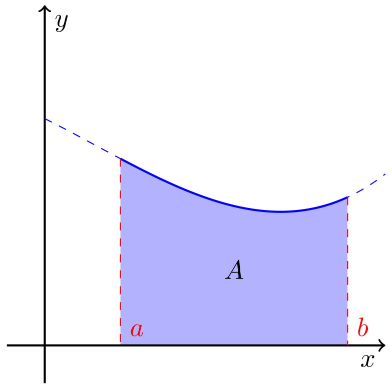
11 מסילות 141
11.1 חשבון וקטורים במישור 148
11.2 מהירות ותאוצה 150
11.3 אורך של מסילה 155
11.3.1 הקדמה 155
11.3.2 תכונות המרחק 155

VI חזרות על דברים שפספסנו 175
12 טורים 175
12.1 טורי חזקות 175
12.1.1 משפט הרציפות של Abel 175
12.2 אי שיוויון הממוצעים 178
13 חומר למבחן 180

חלק I
האינטגרל המסויים

1 רעיון

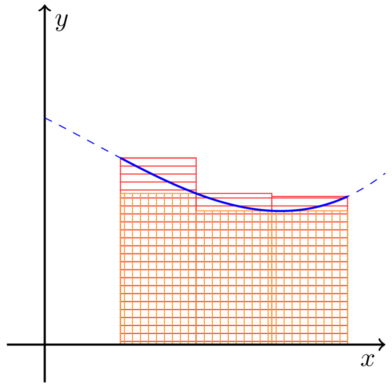
המטרה באינטגרל המסויים היא לחשב את השטח מתחת לגרף של פונקציה $f \geq 0$ בקטע $[a, b]$.



איור 1: מהו השטח A?

במאות ה־18־19 המציאו שיטה לקרב את השטח A. במאה ה20 התפתחה שיטה נוספת לקרב את השטח.
נתבונן באיור 2, השטח A גדול מסכום שטחי המלבנים הכתומים (המלבנים שחסומים מלמטה) וקטן מסכום שטחי המלבנים האדומים (החוסמים מלמעלה). שיטה זו לחישוב השטח נקראת שיטת דרבו (Darboux) הידועה גם בתור אינטגרל רימן (Riemann).

הערה 1.1 שיטה נוספת לקירוב שטח היא בעזרת מלבנים אופקיים. שיטה זו נקראת שיטת לבג (Lebesgue) והיא התפתחה במאה ה20. במסגרת הקורס לא נדון כלל בשיטה זו.



איור 2: אינטגרל דרבו

2 אינטגרל לפי Darboux

2.1 חלוקה

הגדרה 2.1 חלוקה: חלוקה של קטע $[a,b]$ היא קבוצה סופית P של נקודות ב $[a,b]$בד"כ נסמן:

$$P = \{a=t_0,t_1,t_2,\ldots,t_n=b\}$$

נגדיר:

$$\begin{aligned} m_i &= \inf\{f(x)\,|x\in[t_{i-1},t_i]\} \\ M_i &= \sup\{f(x)\,|x\in[t_{i-1},t_i]\} \end{aligned}$$

הערה 2.2

1. m_i, M_i מוגדרים אם f חסומה בקטע $[a,b]$
2. אם f לא רציפה אז $\min_{[t_{i-1},t_i]} f$ לא בהכרח קיים, לכן בהגדרה השתמשנו ב inf.

הגדרה 2.3 סכומי דרבו: תהי f פונקציה חסומה בקטע $[a,b]$. תהי P חלוקה של הקטע $[a,b]$נגדיר:

$$L(f,P)=\sum_{i=1}^{n} m_i\left(t_i-t_{i-1}\right)$$

L נקרא סכום Darboux תחתון של f שמתאים לחלוקה P. באופן דומה נגדיר:

$$U(f,P)=\sum_{i=1}^{n} M_i\left(t_i-t_{i-1}\right)$$

(סכום דרבו עליון)

הערה 2.4 נשים לב כי L הוא סכום שטחי המלבנים הכתומים אשר מופיעים באיור 2, ואילו U הוא סכום שטחי המלבנים האדומים המופיעים באיור.

טענה 2.5

$$L\left(f,P\right)\leq U\left(f,P\right)$$

הוכחה: לכל $1\leq i\leq n$ מתקיים $m_i\leq M_i$ וכמו כן $t_i-t_{i-1}\geq 0$ לכל i. לכן: $m_i\left(t_i-t_{i-1}\right)\leq M_i\left(t_i-t_{i-1}\right)$ לכל i. וזה גרור:

$$L\left(f,P\right)=\sum_{i=1}^{n}m_i\left(t_i-t_{i-1}\right)\leq\sum_{i=1}^{n}M_i\left(t_i-t_{i-1}\right)=U\left(f,P\right)$$

■

שאלה בהינתן P_1,P_2 שתי חלוקות שונות של הקטע $[a,b]$ נרצה לפחות איזה ערך יותר גדול $L\left(f,P_1\right)$ או $U\left(f,P_2\right)$?

תשובה אם קיים מושג השטח A אזי:

$$L\left(f,P_1\right)\leq A\leq U\left(f,P_2\right)$$

לכן נצפה כי:

$$L\left(f,P_1\right)\leq U\left(f,P_2\right)$$

2.1.1 עידון חלוקה

הגדרה 2.6 עידון: חלוקה Q תקרא עידון של החלוקה P אם $Q\supset P$
נאמר: ש Q מעדנת את P

דוגמה 2.7 החלוקות:

$$\begin{aligned}P&=\left\{0,\frac{1}{3},\frac{2}{3},1\right\}\\Q&=\left\{0,\frac{1}{6},\frac{1}{3}.\frac{2}{3},\frac{3}{4},1\right\}\end{aligned}$$

למה 2.8

אם Q מעדנת את P אזי:

$$\begin{aligned}L\left(f,Q\right)&\geq L\left(f,P\right)\\U\left(f,Q\right)&\leq U\left(f,P\right)\end{aligned}$$

הוכחה: תחילה נניח כי מספר הנקודות בQ הוא בדיוק אחד יותר ממספר הנקודות בP.

$$\begin{aligned}P&:\quad a=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_{n-1}<t_n=b\\Q&:\quad a=t_0<t_1<\ldots<t_{k-1}<u<t_k<\ldots<t_{n-1}<t_n=b\end{aligned}$$

(כלומר הוספנו את הנקודה u בין t_k ל t_{k-1}).

$$L(f,P)=\sum_{i=1}^{n}m_i(t_i-t_{i-1})$$

נסמן:

$$\begin{aligned} m' &= \inf\{f(x)\,|x\in[t_{k-1},u]\} \\ m'' &= \inf\{f(x)\,|x\in[u,t_k]\} \end{aligned}$$

$$L(f,Q)=\sum_{i=1}^{k-1}m_i(t_i-t_{i-1})+m'(u-t_{k-1})+m''(t_k-u)+\sum_{i=k+1}^{n}m_i(t_i-t_{i-1})$$

$$L(f,P)=\sum_{i=1}^{k-1}m_i(t_i-t_{i-1})+m_k(t_k-t_{k-1})+\sum_{i=k+1}^{n}m_i(t_i-t_{i-1})$$

מספיק להראות כי

$$m'(u-t_{k-1})+m''(t_k-u)\geq m_k(t_k-t_{k-1})$$

נשים לב כי $[t_{k-1},u]\subset[t_{k-1},t_k]$ לכן:

$$m'=\inf_{[t_{k-1},u]}f\geq\inf_{[t_{k-1},t_k]}f=m_k$$

(באופן דומה: $m''\geq m_k$). כמו כן: $u-_{k-1}\geq 0,\ t_k-u\geq 0$ ולכן:

$$\begin{aligned} m'(u-t_{k-1})+m''(t_k-u)\geq m_k(u-t_{k-1})+m_k(t_k-u)= \\ m_k(\cancel{u}-t_{k-1}+t_k-\cancel{u})=m_k(t_k-t_{k-1}) \end{aligned}$$

כנדרש.

אם בחלוקה Q יש m נקודות יותר מהחלוקה P, אז נוכל למצוא סידרה של חלוקות:

$$P=P_0\subset P_1\subset P_2\subset\ldots\subset P_{m-1}\subset P_m=Q$$

כאשר כל חלוקה מעדנת בנקודה אחת את החלוקה הקודמת. כלומר: מספר הנקודות בP_k הוא אחד יותר ממספר מהנקודות ב P_{k-1}. ואז נקבל:

$$L(f,P)=L(f,P_0)\leq L(f,P_1)\leq\ldots\leq L(f,P_m)=L(f,Q)$$

■

הערה 2.9 בהוכחה השתמשנו בעובדה שאם $[t_{k-1},u]\subset[t_{k-1},t_k]$ אז $\inf\limits_{[t_{k-1},t_k]}f\geq\inf\limits_{[t_{k-1},u]}f$. לפי משפט האומר כי אם $A\subseteq B\subseteq\mathbb{R}$ אזי: $\inf A\geq\inf B$.

הוכחה: נזכור כי $\inf A$ הוא החסם מלרע הגדול ביותר של A ואילו $\inf B$ הוא החסם מלרע של B. אבל $A\subseteq B$ ולכן הוא גם חסם מלרע של A. אבל $\inf A$ הוא חסם מלרע הגדול ביותר של A ולכן: $\inf A\geq\inf B$. ■

הערה 2.10 ההוכחה ש $U(f,Q) \le U(f,P)$, אם Q מעדנת את P, היא באותו האופן.

טענה 2.11

אם P_1, P_2 שתי חלוקות של $[a,b]$ אז: $L(f,P_1) \le U(f,P_2)$

הוכחה: קיימת חלוקה P שמעדנת את P_1 ואת P_2. כלומר: $P_1 \subset P \wedge P_2 \subset P$. למשל החלוקה: $P = P_1 \cup P_2$.

$$L(f,P_1) \underset{P_1 \subset P}{\le} L(f,P) \le U(f,P) \underset{P_2 \subset P}{\le} U(f,P_2)$$

■

מסקנה 2.12

$$\sup\{L(f,P)\,|P\ divides\ [a,b]\} \le \inf\{U(f,P)\,|P\ divides\ [a,b]\}$$

הוכחה: נסמן:

$$\mathscr{L} = \{L(f,P)\,|P \text{ divides } [a,b]\}, \mathscr{U} = \{U(f,P)\,|P \text{ divides } [a,b]\}$$

יהי נתון $\beta \in \mathscr{U}$. לכל $\alpha \in \mathscr{L}$ מתקיים: $\alpha \le \beta$ ולכן: $\sup \mathscr{L} \le \beta$. וכמו כן, באופן דומה נקבל כי לכל $\alpha \le \inf \mathscr{U}$ ולכן נקבל: $\sup \mathscr{L} \le \inf \mathscr{U}$. ■

2.2 פונקציה אינטגרבילית

הגדרה 2.13 פונקציה אינטגרבילית: בהינתן f פונקציה אשר עבורה מתקיים $\sup \mathscr{L} = \sup \mathscr{U}$, לכן נאמר שהפונקצייה f **אינטגרבילית** בקטע $[a,b]$.

במקרה זה: אם Q חלוקה של $[a,b]$ אזי $L(f,P) \le \sup \mathscr{L} = \inf U \le U(f,Q)$.
כלומר אם נסמן $I = \sup \mathscr{L} = \inf \mathscr{U}$ אז:

$$\forall Q \quad L(f,Q) \le I \le U(f,Q)$$

נאמר ש I הוא האינטגרל ("השטח" במשמעות גיאומטרית) של f בקטע $[a,b]$. נשים לב שבמקרה זה, I הוא יחיד (לפי למת החתכים).

הערה 2.14 אם $\sup \mathscr{L} < \inf \mathscr{U}$ אז קיימים הרבה מספרים $\tilde{I}$ כך ש:

$$\forall Q \quad L(f,Q) \le \tilde{I} \le U(f,Q)$$

ובמקרה זה נאמר שהפונקצייה f **לא אינטגרבילית** (ולא קיים מושג של שטח).

סימון הסימון של אינטגרל הוא:

$$I = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

דוגמה 2.15 פונקציית דיריכלה: נתבונן בפונקציית דיריכלה הנתונה ע"י: $D(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$
בקטע $[a,b]$. תהי P חלוקה של הקטע $[a,b]$:

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

נשים לב כי $m_i = 0$ ו $M_i = 1$ (בגלל צפיפות הרציונליים והאי רציונליים) ולכן:

$$\begin{aligned} L(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i (t_i - t_{i-1}) = 0 \\ U(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i (t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = b - a \end{aligned}$$

ולכן מתקבל:

$$\sup \mathscr{L} = 0 < \inf \mathscr{U} = b - a$$

ולכן פונקציית דיריכלה לא אינטגרבילית לפי דרבו.

דוגמה 2.16 פונקצייה קבועה:

בהינתן f פונקציה קבועה $f(x) = c \quad \forall x$. טריוויאלי לראות כי: $m_i = c,\ M_i = c$ ולכן:

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i (t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} c (t_i - t_{i-1}) = c \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = c(b-a)$$

ובאופן דומה:

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i (t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} c (t_i - t_{i-1}) = c \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = c(b-a)$$

ולכן:

$$\sup \mathscr{L} = c(b-a) = \inf \mathscr{U}$$

ולכן על פי ההגדרה f אינטגרבילית (לפי דרבו) בקטע $[a,b]$ומתקיים:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = c(b-a)$$

16/02/11

2.3 קריטריון רימן

משפט 2.17 קריטריון רימן

תהא f חסומה בקטע $[a,b]$. f אינטגרבילית ב$[a,b]$ אס"ם לכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה P של $[a.b]$כך ש: $U(f,P) - L(f,P) \le \varepsilon$.

הוכחה: **כיוון ראשון:**

נניח ש f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

$$\sup \mathscr{L} = \inf \mathscr{U} = I$$

$I-\frac{\varepsilon}{2}$ איננו חסם מלעיל של $\mathscr{L}$ ולכן קיימת חלוקה P_1 כך ש: $I-\frac{\varepsilon}{2}\leq L(f,P_1)$. באופן דומה, קיימת חלוקה P_2כך ש: $I+\frac{\varepsilon}{2}\geq U(f,P_2)$. תהא P עידון של P_1 ושל P_2(למשל $P=P_1\cup P_2$) אזי:

$$\begin{aligned} L(f,P) &\geq L(f,P_1)\geq I-\frac{\varepsilon}{2} \\ U(f,P) &\leq U(f,P_2)\leq I+\frac{\varepsilon}{2} \\ U(f,P)-L(f,P) &\leq \left(I+\frac{\varepsilon}{2}\right)-\left(I-\frac{\varepsilon}{2}\right)=\varepsilon \end{aligned}$$

<u>כיוון שני:</u>
נניח שלכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה P כך ש:

$$U(f,P)-L(f,P)\leq\varepsilon$$

צ"ל כי $\sup\mathscr{L}=\inf\mathscr{U}$. מהטענה שהוכחנו הראנו כי: $\sup\mathscr{L}\leq\inf\mathscr{U}$. נשאר להוכיח כי $\sup\mathscr{L}\geq\inf\mathscr{U}$. יהי $\delta>0$ שרירותי. נוכיח:

$$\sup\mathscr{L}\geq\inf\mathscr{U}-\delta$$

קיימת חלוקה P כך ש $U(f,P)-L(f,P)\leq\delta$ ולכן: $U(f,P)-\delta\leq L(f,P)$. נשים לב כי:

$$\sup\mathscr{L}\geq L(f,P)\geq U(f,P)-\delta\geq\inf\mathscr{U}-\delta$$

אי השיוויון נכון לכל $\delta>0$ ולכן

$$\sup\mathscr{L}\geq\inf\mathscr{U}$$

כנדרש. ולכן קיבלנו $\sup\mathscr{L}=\inf\mathscr{U}$ ■

דוגמה 2.18 נרצה לבחון את הפונקציה f המוגדרת באופן הבא: $f(x)=\begin{cases}0 & x\neq1\\ 1 & x=1\end{cases}$
בקטע $[0,2]$. האם f אינטגרבילית?
תהי P חלוקה

$$\begin{aligned} m_i &= 0 \\ M_i &= \begin{cases}0 & 1\notin[t_{i-1},t_i]\\ 1 & 1\in[t_{i-1},t_i]\end{cases} \end{aligned}$$

נבחר חלוקה: $P=\{0,1-\varepsilon,1+\varepsilon,2\}$

$$\begin{aligned} L(f,P) &= 0 \\ U(f,P) &= 1\cdot2\varepsilon=2\varepsilon \\ U(f,P)-L(f,P) &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

ולכן מקריטריון רימן נקבל ש f אינטגרבילית.
נחשב את I:

$$I=\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\forall Q \quad L(f,Q) \le I \le U(f,Q)$$

עבור החלוקה Pנקבל:

$$0 \le I \le 2\varepsilon$$

וכיוון שאי השיוויון נכון לכל $\varepsilon > 0$ אזי $I = 0$.

דוגמה 2.19 נבחן את הפונקציה $f(x) = x$ בקטע $[0,b]$.

תהי P חלוקה כלשהי

$$\begin{aligned} U(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i (t_i - t_{i-1}) \\ L(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i (t_i - t_{i-1}) \\ U(f,P) - L(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1})^2 \end{aligned}$$

ניקח חלוקה P שעבורה $t_i - t_{i-1} = \frac{b}{n}$ (כלומר: $t_i = \frac{ib}{n}$)

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{b}{n}\right)^2 = \frac{b^2}{n}$$

בהינתן $\varepsilon > 0$ נבחר $n = \left\lfloor \frac{b^2}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ ואז:

$$U(f,P) - L(f,P) \le \varepsilon$$

לכן f אינטגרבילית ב $[0,b]$. נחשב את I.

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i (t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} t_i (t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{ib}{n} \cdot \frac{b}{n} = \frac{b^2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i = \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{(n+1) \cdot n}{2}$$

ובאופן דומה:

$$L(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i (t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} t_{i-1} (t_i - t_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)b}{n} \cdot \frac{b}{n} = \frac{b^2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} (i-1) = \frac{b^2}{n^2} \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2}$$

$$\frac{b^2}{2} \xleftarrow[n\to\infty]{} \frac{b^2}{2n}(n-1) = L(f,P) \le I \le U(f,P) = \frac{b^2}{2n}(n+1) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{b^2}{2}$$

ומאחר שזה נכון לכל n נקבל $I = \frac{b^2}{2}$.

הערה 2.20 אפשר היה לקצר את החישוב של I ע"י השיקול הבא:

$$I \leq U(f,P) = \frac{b^2}{2n}(n+1) \to \frac{b^2}{2} \Rightarrow I \leq \frac{b^2}{2}$$

נראה שלא ייתכן $I < \frac{b^2}{2}$. נניח בשלילה ש $I \leq \frac{b^2}{2} - \varepsilon$ עבור $\varepsilon > 0$ מסויים. קיימת חלוקה P כך ש:

$$L(f,P) > \frac{b^2}{2} - \varepsilon$$

2.4 תנאים מספיקים לאינטגרביליות

2.4.1 מונוטוניות

משפט 2.21

בהינתן f פונקצייה מונוטונית בקטע $[a.b]$אזי f אינטגרבילית באותו הקטע.

הוכחה: נניח ש f היא פונקציה מונוטונית עולה (לשם הנוחות, באותה אופן בדיוק ניתן להוכיח למונוטונית יורדת).

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(t_i - t_{i-1})$$

$$\begin{aligned} M_i &= f(t_i) \\ m_i &= f(t_{i-1}) \end{aligned}$$

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{i=1}^{n}(f(t_i) - f(t_{i-1}))(t_i - t_{i-1})$$

נבחר חלוקה שבה $t_i - t_{i-1} = \frac{b-a}{n}$ (n טבעי) ואז:

$$U(f,P) - L(f,P) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}(f(t_i) - f(t_{i-1})) = \frac{b-a}{n}\cdot(f(b) - f(a))$$

בהינתן $\varepsilon > 0$ נבחר $n > \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{\varepsilon}$ ואז נקבל $A < \varepsilon$ ולכן f אינטגרבילית. ■

2.4.2 רציפות

משפט 2.22

בהינתן f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ אזי f אינטגרבילית באותו הקטע.

הוכחה: כמו בהוכחה הקודמת:

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{i=1}^{n}(M_i - m_i)(t_i - t_{i-1})$$

הפונקציה f רציפה בקטע $[a,b]$ולכן f גם רציפה במידה שווה בקטע $[a,b]$ (לפי משפט קנטור). בהינתן $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שם $|x-y| < \delta$ אז $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

תהי P חלוקה כך ש $0 < t_i - t_{i-1} < \delta$ לכל $1 \le i \le n$. לכל $x, y \in [t_{i-1}, t_i]$ מתקיים:

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \Rightarrow M_i - m_i \le \varepsilon$$

(במקרה זה, ניתן להחמיר באי השיוויון ל $M_i - m_i < \varepsilon$, כיוון שמדובר בקטע סגור בפונקציה רציפה ולכן הוא מקבל מינימום ומקסימום לפי משפט ויירשטראס השני)

$$U(f,P) - L(f,P) \le \sum_{i=1}^{n} \varepsilon (t_i - t_{i-1}) = \varepsilon \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) = \varepsilon (b-a)$$

בהינתן $\varepsilon_0 > 0$ נבחר $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{b-a}$ ואז $U(f,P) - L(f,P) \le \varepsilon_0$ ולכן f אינטגרבילית. ■

2.5 תכונות האינטגרל

2.5.1 ערך המוחלט של פונקציה

משפט 2.23

בהינתן f פונקציה אינטגרבילית, אזי גם $|f|$ פונקציה אינטגרבילית.

הוכחה:

$$M_i(|f|) = \begin{cases} M_i & M_i \ge 0,\ m_i \ge 0 \\ \max\{M_i, -m_i\} & M_i \ge 0,\ m_i \le 0 \\ -m_i & M_i \le 0,\ m_i \le 0 \end{cases}$$

$$m_i(|f|) = \begin{cases} m_i & M_i \ge 0,\ m_i \ge 0 \\ A \ge 0 & M_i \ge 0,\ m_i \le 0 \\ -M_i & M_i \le 0,\ m_i \le 0 \end{cases}$$

$$M_i(|f|) - m_i(|f|) \overset{\ge}{\underset{\le}{?}} M_i(f) - m_i(f)$$

$$M_i(|f|) - m_i(|f|) = \begin{cases} M_i - m_i & M_i \ge 0,\ m_i \ge 0 \\ \max\{M_i, -m_i\} - A & M_i \ge 0,\ m_i \le 0 \\ -M_i + m_i & M_i \le 0,\ m_i \le 0 \end{cases}$$

במקרה האמצעי: $M_i - A \le M_i \le M_i - m_i$ (כי $m_i \le 0$) כמו כן $-m_i - A \le -m_i \le M_i - m_i$ (כי $M_i \ge 0$) קיבלנו בכל מקרה כי:

$$M_i(|f|) - m_i(|f|) \le M_i(f) - m_i(f)$$

ולכן:

$$U(|f|, p) - L(|f|, P) = \sum_{i=0}^{n} (M_i(|f|) - m_i(|f|))(t_i - t_{i-1}) \le \sum_{i=0}^{n} (M_i - m_i)(t_i - t_{i-1})$$

יהי $\varepsilon > 0$, נבחר חלוקה P כך ש:

$$U(f,P) - L(f,P) \leq \varepsilon$$

ואז גם

$$U(|f|,P) - L(|f|,P) \leq \varepsilon$$

ולכן לפי קריטריון רימן $|f|$ אינטגרבילית. ■

17/02/11

2.5.2 פונקציות אי שליליות

טענה 2.24

תהי f פונקציה אי שלילית בקטע $[a,b]$ ($\forall x \in [a,b]\ \ f(x) \geq 0$) אזי: $\int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0$

הוכחה:

$$L(f,P) = \sum_{i=0}^{n} m_i (t_i - t_{i-1}) \geq 0$$

אבל בהכרח מתקיים $m_i \geq 0$ ולכן:

$$I = \sup \mathscr{L} \geq 0$$

■

2.5.3 השוואה

טענה 2.25

תהיינה f,g פונקציות כך ש $g \leq f$ בקטע $[a,b]$אזי: $\int\limits_a^b g(t)\,\mathrm{d}t \leq \int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

הוכחה: מספיק להראות כי $m_i(g) \leq m_i(f)$לכל i.

אנו יודעים כי $g \leq f$ ולכן:

$$\inf_{t\in[t_{i-1},t_i]} f(t) \leq \inf_{t\in[t_{i-1},t_i]} g(t)$$

ולכן:

$$L(f,P) \leq L(g,P)$$

ומתקיים:

$$\sup_P L(f,P) \leq \sup_P L(g,P)$$

ולכן:

$$\int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int\limits_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

■

דוגמה 2.26 נתבונן בפונקציה $f\left(x\right)=\begin{cases}1 & x=1\\ 0 & x\neq1\end{cases}$ בקטע $\left[0,2\right]$. נבחין כי:

$$\int\limits_a^b f\left(t\right)\mathrm{d}t=0$$

מסקנה 2.27

אם $m\leq f\leq M$ אזי $m\left(b-a\right)\leq\int\limits_a^b f\left(t\right)\mathrm{d}t\leq M\left(a-b\right)$

הוכחה: ראינו ש:

$$\int\limits_a^b M\mathrm{d}t=M\left(b-a\right)$$

בטענה קודמת. ולכן ההוכחה טריוויאלית מהטענה. ■

מסקנה 2.28

ראינו שאם f אינטגרבילית אז גם $|f|$אינטגרבילית. טענה: $\left|\int\limits_a^b f\left(t\right)\mathrm{d}t\right|\leq\int\limits_a^b\left|f\left(t\right)\right|\mathrm{d}t$

הוכחה:

$$-\left|f\right|\leq f\leq\left|f\right|$$

וזה גורר:

$$-\int\limits_a^b\left|f\left(t\right)\right|\mathrm{d}t=\int\limits_a^b-\left|f\left(t\right)\right|\mathrm{d}t\leq\int\limits_a^b f\left(t\right)\mathrm{d}t\leq\int\limits_a^b\left|f\left(t\right)\right|\mathrm{d}t$$

נשאר להוכיח:

$$\int\limits_a^b -f\left(t\right)\mathrm{d}t=-\int\limits_a^b f\left(t\right)\mathrm{d}t$$

(יוכח בהמשך) ■

2.5.4 אינטגרלית בכל תת קטע

משפט 2.29

בהינתן $a<c<b$. ובהינתן f פונקציה. אזי f אינטגרבילית בקטע $\left[a,b\right]$ אס"ם f אינטגרבילית בקטע $\left[a,c\right]$ובקטע $\left[c,b\right]$.

הוכחה: **כיוון ראשון:** נניח f אינטגרבילית ב$[a,b]$. יהי $\varepsilon>0$. קיימת חלוקה P של $[a,b]$כך ש:

$$U(f,P)-L(f,P)\le\varepsilon$$

נגדיר $Q=P\cup\{c\}$ ונרשום: $Q=Q_1\cup Q_2$ כאשר Q_1 חלוקה של $[a,c]$וQ_2חלוקה של $[c,b]$

$$\begin{aligned}U(f,P)&\ge U(f,Q)=U(f,Q_1)+U(f,Q_2)\\L(f,P)&\le L(f,Q)=L(f,Q_1)+L(f,Q_2)\end{aligned}$$

(Q עידון של P).

$$A=U(f,Q)-L(f,Q)\le U(f,P)-L(f,P)\le\varepsilon$$

ולכן:

$$\varepsilon\ge A=\underbrace{U(f,Q_1)-L(f,Q_1)}_{\ge0}+\underbrace{U(f,Q_2)-L(f,Q_2)}_{\ge0}$$

ולכן:

$$\begin{aligned}U(f,Q_1)-L(f,Q_1)&\le\varepsilon\\U(f,Q_2)-L(f,Q_2)&\le\varepsilon\end{aligned}$$

ולכן לפי קריטריון רימן, f אינטגרבילית בקטע $[a,c]$ ובקטע $[c,b]$.
כיוון שני: נניח ש f אינטגרבילית בקטע $[a,c]$ובקטע $[c,b]$. יהי $\varepsilon>0$. קיימת חלוקה Q_1 של $[a,c]$וחלוקה Q_2 של $[c,b]$כך ש:

$$\begin{aligned}U(f,Q_1)-L(f,Q_1)&\le\frac{\varepsilon}{2}\\U(f,Q_2)-L(f,Q_2)&\le\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

נגדיר: $Q=Q_1\cup Q_2$ חלוקה של $[a,b]$

$$U(f,Q)-L(f,Q)=U(f,Q_1)-L(f,Q_1)+U(f,Q_2)-L(f,Q_2)\le\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

■

2.5.5 אריתמטיקה של אינטגרלים

טענה 2.30

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t+\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$ כאשר $a<c<b$

הוכחה:

$$L(f,Q_1)\le\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t\le U(f,Q_1)$$

כאשר Q_1 חלוקה של $[a,c]$.

$$L(f,Q_2)\le\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t\le U(f,Q_2)$$

כאשר Q_2 חלוקה של $[c,b]$.

$$\begin{aligned}L(f,Q_1\cup Q_2)=L(f,Q_1)+L(f,Q_2)\le\\ \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t+\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t\\ \le U(f,Q_1)+U(f,Q_2)=U(f,Q_1\cup Q_2)\end{aligned}$$

אם P חלוקה כלשהי של $[a,b]$ נגדיר $Q=P\cup\{c\}$ נרשום: $Q=Q_1\cup Q_2$. כאשר Q_1 חלוקה של $[a,c]$ ו־Q_2 חלוקה של $[c,b]$.

$$\begin{aligned}U(f,Q)&\le U(f,P)\\ L(f,Q)&\ge L(f,P)\end{aligned}$$

מאי השיוויון הגדול נקבל:

$$L(f,P)\le\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t+\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t\le U(f,P)$$

לכל חלוקה P של $[a,b]$.
מאחר שקיים מספר יחיד שנמצא מתחת לכל סכום עליון ומעל לכל סכום תחתון נובע:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t+\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

■

הגדרה 2.31 $\int_a^a f(t)\,\mathrm{d}t=0$ ואם $a<b$ נגדיר: $\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t=-\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

תרגיל: תחת ההגדרה הנ"ל הטענה: $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t+\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ נכונה עבור a,b,c כלשהם.

משפט 2.32

בהינתן f,g פונקציות אינטגרביליות אזי הפונקציות הבאות אינטגרביליות:
1. $-f$
2. $c\cdot f$, $c\in\mathbb{R}$
3. $f+g$

הוכחה:

.1

$$\begin{aligned} M_i(-f) &= -m_i(f) \\ m_i(-f) &= -M_i(f) \end{aligned}$$

ולכן נקבל כי:

$$\begin{aligned} U(-f,P) &= -L(f,P) \\ L(-f,P) &= -U(f,P) \end{aligned}$$

ולכן:

$$U(-f,P)-L(-f,P)=U(f,P)-L(f,P)$$

ולכל לכל $\varepsilon>0$ נוכל לבחור חלוקה P כך ש:

$$U(f,P)-L(f,P)\leq\varepsilon$$

נשים לב שמהוכחה זו אנו גם מקבלים כי

$$\int_a^b(-f)(t)\,\mathrm{d}t=\sup_P L(-f,P)=\sup_P -U(f,P)=-\inf_P U(f,P)=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

.2 **<u>הוכחנו בתרגיל 2</u>**

.3

$$U(f+g,P)\leq U(f,P)+U(g,P)$$

(הסבר: $\sup(f+g)\leq\sup_{[t_{i-1},t]}f+\sup_{[t_{i-1},t]}g$) ובאופן דומה:

$$L(f+g,P)\geq L(f,P)+L(g,P)$$

ולכן נקבל:

$$U(f+g,P)-L(f+g,P)\leq[U(f,P)-L(f,P)]+[U(g,P)-L(g,P)]$$

בהינתן $\varepsilon>0$ נבחר חלוקה P_1,P_2כך ש:

$$U(f,P_1)-L(f,P_1)\leq\frac{\varepsilon}{2},\ U(g,P_2)-L(g,P_2)\leq\frac{\varepsilon}{2}$$

נגדיר $P=P_1\cup P_2$ ונקבל:

$$\begin{aligned} U(f,P)-L(f,P) &\leq \frac{\varepsilon}{2} \\ U(g,P)-L(g,P) &\leq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

ולכן:

$$U(f+g,P)-L(f+g,P)\leq\varepsilon$$

כנדרש.

■

20/02/11

משפט 2.33

אם f,g אינטגרביליות ב $[a,b]$ ו $c\in\mathbb{R}$ אז:

1. $c\cdot f$ אינטגרבילית $\int\limits_a^b c\cdot f(t)\,\mathrm{d}t = c\cdot\int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

2. $f+g$ אינטגרבילית ו: $\int\limits_a^b f(t)+g(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int\limits_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$

הוכחה:

1. תרגיל (ראינו את 1 עבור $c=-1$, נשאר להוכיח עבור $c>0$) **(הראנו בתרגיל 2)**

2. הוכחנו ש $f+g$ אינטגרבילית

$$U(f+g,P)\leq U(f,P)+U(g,P)$$

(מכיוון ש: $\sup\limits_{[t_{k-1},t_k]} g(t) + \sup\limits_{[t_{k-1},t_k]} f(t) \geq \sup\limits_{[t_{k-1},t_k]} (f(t)+g(t))$) ולכן:

$$\int\limits_a^b f(t)+g(t)\,\mathrm{d}t = \inf_P U(f+g,P)\leq \inf_P (U(f,P)+U(g,P))$$

כמו כן, תמיד מתקיים ש:

$$\inf_P (U(f,P)+U(g,P))\geq \inf_P (U(f,P))+\inf_P (U(g,P))$$

נראה ש:

$$\inf_P (U(f,P)+U(g,P))\leq \inf_P (U(f,P))+\inf_P (U(g,P))$$

לצורך כך, נוסיף $\varepsilon>0$ לאגף ימין ונוכיח כי:

$$\inf_P (U(f,P)+U(g,P))\leq \left(\inf_P (U(f,P))+\frac{\varepsilon}{2}\right)+\left(\inf_P (U(g,P))+\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

קיימת חלוקה P_1 כך ש:

$$U(f,P_1)\leq \inf_P (U(f,P))+\frac{\varepsilon}{2}$$

וקיימת חלוקה P_2 כך ש:

$$U(g,P_2)\leq \inf_P (U(g,P))+\frac{\varepsilon}{2}$$

נסמן $P_3=P_1\cup P_2$ (עידון של P_1 ושל P_2).

$$\begin{aligned} U(f,P_3) &\leq U(f,P_1)\\ U(g,P_3) &\leq U(g,P_2)\end{aligned}$$

ולכן, מארבעת האי שוויונים האחרונים נקבל כי:

$$\inf_P (U(f,P))+\inf_P (U(g,P))+\varepsilon\geq U(f,P_3)+U(g,P_3)\geq \inf_P (U(f,P)+U(g,P))$$

הוכחנו שלכל $\varepsilon > 0$ מתקיים:

$$\inf_P U(f+g,P) \le \inf_P \left(U(f,P)+U(g,P)\right) \le \inf_P \left(U(f,P)\right) + \inf_P \left(U(g,P)\right) + \varepsilon$$

ולכן נקבל כי:

$$\int_a^b f(t)+g(t)\,\mathrm{d}t \le \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

אפשר לחזור על ההוכחה עם סכומים תחתונים במקום סכומים עליונים ונקבל את אי השיוויון ההפוך:

$$\int_a^b f(t)+g(t)\,\mathrm{d}t \ge \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

ולכן:

$$\int_a^b f(t)+g(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

דרך נוספת לקבל אי שיוויון הפוך היא לומר ש:

$$\int_a^b (-f(t)) + (-g(t))\,\mathrm{d}t \le \int_a^b -f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b -g(t)\,\mathrm{d}t$$

אנו יודעים ש:

$$\int_a^b -h(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^b h(t)\,\mathrm{d}t$$

ומכן נובע ש:

$$-\int_a^b (f+g)(t)\,\mathrm{d}t \le -\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

ואם נכפול ב(-1) נקבל:

$$\int_a^b f(t)+g(t)\,\mathrm{d}t \ge \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

■

מסקנה 2.34

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(t)\,\mathrm{d}t = \alpha \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \beta \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

ולכן $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \mapsto f$היא פונקציונל לינארי.

הקטע הבא הוא הערה עקב שאלות של תלמידים, ואינו רלוונטי באמת או קשה:

טענה 2.35

אם $A \le B + \varepsilon$ לכל $\varepsilon > 0$, אזי $A \le B$.

הוכחה: נניח בשלילה $A > B$ נסמן: $\delta = A - B$ (נשים לב כי $\delta > 0$) נבחר $\varepsilon_0 = \frac{\delta}{2}$ ואז נקבל כי $A > B + \varepsilon_0$. בסתירה ל $A \le B + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$. ■

משפט 2.36

בהינתן f, g פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a,b]$. אזי גם $f \cdot g$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$.

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$. נרצה להראות כי:

$$U(f \cdot g, P) - L(f \cdot g, P) < \varepsilon$$

לצורך הנוחות נוכיח את הטענה עבור $f, g > 0$ נשים לב כי:

$$M_i(f \cdot g) \le M_i(f) \cdot M_i(g)$$

הערה 2.37 דוגמה שבה $M_i(f \cdot g) < M_i(f) \cdot M_i(g)$ נסתכל על הפונקציות: $f(t) = t,\ g(t) = 1 - t$ בקטע $[0,1]$נשים לב כי $\sup\limits_{[0,1]} g = 1,\ \sup\limits_{[0,1]} f = 1,$ אבל $\sup\limits_{[0,1]} t(1-t) = \frac{1}{4}$

$$m_i(f \cdot g) \ge m_i(f) \cdot m_i(g)$$

$$M_i(f \cdot g) - m_i(f \cdot g) \le M_i(f) \cdot M_i(g) - m_i(f) \cdot m_i(g)$$

$$U(f \cdot g, P) - L(f \cdot g, P) \le \sum_{i=1}^{n} \left(M_i(f) \cdot M_i(g) - m_i(f) \cdot m_i(g)\right)(t_i - t_{i-1}) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left[M_i(f) \cdot M_i(g) - M_i(f) \cdot m_i(g) + M_i(f) \cdot m_i(g) - m_i(f) \cdot m_i(g)\right](t_i - t_{i-1}) =$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_i(f) \cdot (M_i(g) - m_i(g)) \cdot (t_i - t_{i-1}) + \sum_{i=1}^{n} m_i(g) \cdot (M_i(f) - m_i(f)) \cdot (t_i - t_{i-1}) \le$$

$$\sup_{[a,b]} f \cdot \sum_{i=1}^{n} (M_i(g) - m_i(g))(t_i - t_{i-1}) + \sup_{[a,b]} g \cdot \sum_{i=1}^{n} (M_i(f) - m_i(f))(t_i - t_{i-1}) =$$

$$\sup_{[a,b]} f \cdot (U(g, P) - L(g, P)) + \sup_{[a,b]} g \cdot (U(f, P) - L(f, P))$$

נבחר חלוקה P_1 כך ש:

$$U(g, P_1) - L(g, P_1) \le \frac{\varepsilon}{2 \sup\limits_{[a,b]} f}$$

וחלוקה P_2כך ש:

$$U\left(f,P_2\right)-L\left(f,P_2\right)\le\frac{\varepsilon}{2\sup\limits_{[a,b]}g}$$

(במידה ו$\sup\limits_{[a,b]}g$ או $\sup\limits_{[a,b]}f$ שווים לאפס, ההוכחה טריוואלית)

נסמן $P_3=P_1\cup P_2$ (עידון של P_1 ו־P_2).

$$\begin{aligned}U\left(g,P_3\right)-L\left(g,P_3\right) & \le\frac{\varepsilon}{2\sup\limits_{[a,b]}f}\\ U\left(f,P_3\right)-L\left(f,P_3\right) & \le\frac{\varepsilon}{2\sup\limits_{[a,b]}g}\end{aligned}$$

ומכאן:

$$\begin{aligned}&U\left(f\cdot g,P_3\right)-L\left(f\cdot g,P_3\right)\le\\ &\quad\sup\limits_{[a,b]}f\cdot\left(U\left(g,P_3\right)-L\left(g,P_3\right)\right)+\sup\limits_{[a,b]}g\cdot\left(U\left(f,P_3\right)-L\left(f,P_3\right)\right)\le\\ &\qquad\sup\limits_{[a,b]}f\cdot\frac{\varepsilon}{2\sup\limits_{[a,b]}f}+\sup\limits_{[a,b]}g\cdot\frac{\varepsilon}{2\sup\limits_{[a,b]}g}=\varepsilon\end{aligned}$$

ולכן הטענה נכונה עבור $f,g\ge0$.

כאשר f,g אינם בהכרח אי־שליליים:

בהינתן f נגדיר:

$$f^{+}\left(t\right)=\begin{cases}f\left(t\right) & f\left(t\right)>0\\ 0 & f\left(t\right)\le0\end{cases},\quad f^{-}\left(t\right)=\begin{cases}0 & f\left(t\right)>0\\ -f\left(t\right) & f\left(t\right)\le0\end{cases}$$

נשים לב כי $f^{+},f^{-}\ge0$ וכמו כן: $f=f^{+}-f^{-}$. (עוד משהו שכדאי להשים לב, אבל לא רלוונטי: $|f|=f^{+}+f^{-}$, וניתן לרשום: $f^{+}=\max\left\{f,0\right\}$ ו $f^{-}=-\min\left\{f,0\right\}$)

באופן דומה נגדיר $g=g^{+}-g^{-}$.

טענה 2.38

אם f אינטגרבילית אז f^{+},f^{-}אינטגרביליות.

הוכחה: ניתן להוכיח בקלות על סמך המשפט האומר ש $|f|$ אינטגרבילית אם f אינטגרבילית (נשים לב כי $2f^{+}=|f|+f$). אבל אנו נוכיח בדרך אחרת:

$$\begin{aligned}M_i\left(f^{+}\right) & =\begin{cases}M_i\left(f\right) & M_i\left(f\right)\ge0,\ m_i\left(f\right)\ge0\\ M_i\left(f\right) & M_i\left(f\right)\ge0,\ m_i\left(f\right)\le0\\ 0 & M_i\left(f\right)\le0,\ m_i\left(f\right)\le0\end{cases}\\ m_i\left(f^{+}\right) & =\begin{cases}m_i\left(f\right) & M_i\left(f\right)\ge0,\ m_i\left(f\right)\ge0\\ 0 & M_i\left(f\right)\ge0,\ m_i\left(f\right)\le0\\ 0 & M_i\left(f\right)\le0,\ m_i\left(f\right)\le0\end{cases}\\ M_i\left(f^{+}\right)-m_i\left(f^{+}\right) & =\begin{cases}M_i\left(f\right)-m_i\left(f\right) & M_i\left(f\right)\ge0,\ m_i\left(f\right)\ge0\\ M_i\left(f\right) & M_i\left(f\right)\ge0,\ m_i\left(f\right)\le0\\ 0 & M_i\left(f\right)\le0,\ m_i\left(f\right)\le0\end{cases}\end{aligned}$$

נשים לב כי בכל מקרה:

$$M_i\left(f^+\right)-m_i\left(f^+\right)\leq M_i\left(f\right)-m_i\left(f\right)$$

וזה גורר כי בכל מקרה:

$$U\left(f^+,P\right)-L\left(f^+,P\right)\leq U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right)$$

אם P היא חלוקה שעבורה: $U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right)<\varepsilon$ נקבל שגם: $U\left(f^+,P\right)-L\left(f^+,P\right)<\varepsilon$ כנדרש. באופן דומה ניתן להוכיח עבור f^-. ■

נשים לב כי: $f\cdot g=f^+\cdot g^+-f^+g^--f^-g^++f^-g^-$. כיוון שכל אחד מהמחוברים אינטגרבילי, לכן גם הסכום אינטגרבילי.

הערה 2.39 מכאן נובע גם ש $|f|=f^++f^-$ אינטגרבילית.

2.5.6 הרכבה

■

משפט 2.40

אם g אינטגרבילית ב $[a,b]$ו־ f רציפה ב$\mathbb{R}$אז $f\circ g$ אינטגרבילית ב$[a.b]$.

דוגמה 2.41 הפונקצייה $f=\max\left\{x,0\right\}$ היא רציפה וההרכבה $f\circ g=g^+$ והראנו כי היא אינטגרבילית.

הערה 2.42 בעזרת המשפט ניתן להראות בצורה נוספת כי אם f,g אינטגרביליות אז $f\cdot g$ אינטגרביליות.

הוכחה: f אינטגרבילית אזי f^2 אינטגרבילית (הפונקציה $h\left(x\right)=x^2$ היא רציפה, $f\left(t\right)^2=f\circ h=h\left(f\left(t\right)\right)$) כמו כן, כיוון ש$f,g$ אינטגרביליות אז גם $\left(f+g\right)^2$ אינטגרבילית אבל:

$$\left(f+g\right)^2=f^2+2fg+g^2$$

ונקבל כי:

$$f\cdot g=\frac{1}{2}\left(\left(f+g\right)^2-f^2-g^2\right)$$

וכיוון שמדובר בסכום של פונקציות אינטגרביליות והכפלה בקבוע, אזי $f\cdot g$ אינטגרבילית.

■

טענה 2.43

אם $f\geq c>0$ אינטגרבילית אזי $\frac{1}{f}$ אינטגרבילית

הוכחה: נשים לב ש $0\leq\frac{1}{f}\leq\frac{1}{c}$ <u>חסומה</u>.

$$M_i\left(\frac{1}{f}\right)=\frac{1}{m_i\left(f\right)},\quad m_i\left(\frac{1}{f}\right)=\frac{1}{M_i\left(f\right)}$$

$$M_i\left(\frac{1}{f}\right)-m_i\left(\frac{1}{f}\right)=\frac{1}{m_i\left(f\right)}-\frac{1}{M_i\left(f\right)}=\frac{M_i\left(f\right)-m_i\left(f\right)}{M_i\left(f\right)\cdot m_i\left(f\right)}\leq\frac{1}{c^2}\cdot\left(M_i\left(f\right)-m_i\left(f\right)\right)$$

$$U\left(\frac{1}{f},P\right)-L\left(\frac{1}{f},P\right)\leq\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{c^{2}}\left(M_{i}\left(f\right)-m_{i}\left(f\right)\right)\left(t_{i}-t_{i-1}\right)=\frac{1}{c^{2}}\left(U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right)\right)$$

בהינתן $\varepsilon>0$ נמצא חלוקה P כך ש $U\left(f,P\right)-L\left(f,P\right)\leq c^{2}\varepsilon$ ואז נקבל:

$$U\left(\frac{1}{f},P\right)-L\left(\frac{1}{f},P\right)\leq\varepsilon$$

כנדרש. ■

מסקנה 2.44

אם f,g אינטגרביליות $g\geq c>0$ אז גם $\frac{f}{g}$ אינטגרבילית.

הערה 2.45 המסקנה נכונה גם תחת ההנחה החזקה יותר $|g|\geq c>0$. ניתן להוכחה בעזרת שיקולים דומים למה שראינו. g^{+},g^{-}.

23/02/11

למה 2.46

אם h פונקצייה בקטע $[c,d]$ אז: $\sup_{[c,d]}h-\inf_{[c,d]}h=\sup_{x,y\in[c,d]}\left(h\left(x\right)-h\left(y\right)\right)$

תרגיל: להוכיח את הלמה הנ"ל

משפט 2.47

אם g פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ו־ f רציפה ב$\mathbb{R}$ אז $f\circ g$ אינטגרבילית בקטע $[a.b]$.

דוגמה 2.48 f^{-}, f^{+}, $|f|$,$\sin\sqrt[3]{|f|}$, $\max\left\{f,g\right\}$

$$\max\left\{f,g\right\}=f+\max\left\{g-f,0\right\}=f+\left(g-f\right)^{+}$$

$g\left(x\right)=\begin{cases}x & x\neq0\\1 & x=0\end{cases}$ בקטע $[0,1]$ היא אינטגרבילית. $f\left(x\right)=\frac{1}{x}$ רציפה ב$(0,\infty)$.

$$f\left(g\left(x\right)\right)=\begin{cases}1 & x=0\\\frac{1}{x} & x\neq0\end{cases}$$

נשים לב ש $f\circ g$ אפילו לא חסומה ולכן **לא אינטגרבילית**. (לשים דגש במהלך ההוכחה איפה הדוגמה הנ"ל נופלת).

הערה 2.49 כדי שההרכבה $f\circ g$ תהיה מוגדרת, נדרש ש f תהיה מוגדרת על $\text{Im}\left(g\right)$. לדוגמה: $g\left(x\right)=x+2$ בקטע $[1,2]$, f מוגדרת בקטע $[1,2]$אז $f\circ g$ **לא** מוגדרת. f צריכה להיות מוגדרת ב$[3,4]$.

הוכחה:

$$U\left(f\circ g,P\right)-L\left(f\circ g,P\right)=\sum_{i=1}^{n}\left[M_{i}\left(f\circ g\right)-m_{i}\left(f\circ g\right)\right]\cdot\left(t_{i}-t_{i-1}\right)=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\sup_{x,y\in[t_{i-1},t_{i}]}\left[f\left(g\left(x\right)\right)-f\left(g\left(y\right)\right)\right]\left(t_{i}-t_{i-1}\right)$$

נניח ש $-M \le g \le M$, f רציפה בקטע הסגור $[-M,M]$. לכל $\varepsilon_1 > 0$ נבחר $\delta_1 > 0$ כך שאם $|x-y| < \delta_1$ ו $x-y \in [-M,M]$ אז $|f(x)-f(y)| < \varepsilon_1$ (אנו מסתמכים על כך שהפונקציה f רציפה במידה שווה בקטע $[-M,M]$ לפי משפט קנטור).

הקטע $[t_{i-1},t_i]$ ייקרא **קטע טוב** אם $|g(x)-g(y)| < \delta_1$ לכל $|x,y| \in [t_{i-1},t_i]$.

הקטע $[t_{i-1},t_i]$ ייקרא **קטע רע** אם $\sup\limits_{x,y\in[t_{i-1},t_i]} |g(x)-g(y)| \ge \delta_1$ (קיימות שתי נקודות $x_0,y_0 \in [t_{i-1},t_i]$ כך ש $|g(x_0)-g(y_0)| \ge \delta_1$).

$$\sum_{i=1}^{n} \sup_{x,y\in[t_{i-1},t_i]} \left[f(g(x))-f(g(y))\right](t_i-t_{i-1}) = \sum_{\text{קטעים טובים}} + \sum_{\text{קטעים רעים}}$$

נשים לב כי:

$$\sum_{\text{קטעים טובים}} \le \sum_{\text{קטעים טובים}} \varepsilon_1 \cdot (t_i-t_{i-1}) \le \varepsilon_1 (b-a)$$

נראה ש"אין הרבה" קטעים רעים. נספר אותם או שנראה שאורכם הכולל קטן. כאן תכנס לשיקול האינטגרביליות של g.

לכל $\varepsilon_2 > 0$ קיימת חלוקה P כך ש:

$$U(g,P)-L(g,P) < \varepsilon_2$$

$$\varepsilon_2 > \sum_{i=1}^{n} (M_i(g)-m_i(g))(t_i-t_{i-1}) \ge \sum_{\text{קטעים רעים}} (M_i(g)-m_i(g))(t_i-t_{i-1}) \ge$$
$$\sum_{\text{קטעים רעים}} \delta_1 \cdot (t_i-t_{i-1}) = \delta_1 \sum_{\text{קטעים רעים}} (t_i-t_{i-1}) =$$
$$\delta_1 \,(\text{האורך הכולל של הקטעים הרעים})$$

ולכן קיבלנו כי:

$$\frac{\varepsilon_2}{\delta_1} \ge \text{האורך הכולל של הקטעים הרעים}$$

$$\sum_{\text{קטעים רעים}} \sup_{x,y\in[t_{i-1},t_i]} (f(g(x))-f(g(y)))(t_i-t_{i-1}) \le$$
$$\left(\max_{[-M,M]} f - \min_{[-M,M]} f\right) \sum_{\text{קטעים רעים}} (t_i-t_{i-1}) \le \frac{\varepsilon_2}{\delta_1}\left(\max_{[-M,M]} f - \min_{[-M,M]} f\right)$$

לסיכום,

$$U(f\circ g,P)-L(f\circ g,P) \le \varepsilon_1 (b-a) + \frac{\varepsilon_2}{\delta_1}\left(\max_{[-M,M]} f - \min_{[-M,M]} f\right)$$

יהי $\varepsilon > 0$ נתון. נגדיר $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ בעזרת ε_1 נגדיר את δ_1 (מהרציפות במידה שווה של f). נגדיר את ε_2 להיות $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon\cdot\delta_1}{2\left(\max\limits_{[-M,M]} f - \min\limits_{[-M,M]} f\right)}$.

כעת נבחר חלוקה P שמקיימת:

$$U(g,P)-L(g,P)<\varepsilon_2$$

עבור חלוקה P הנ"ל מתקיים:

$$U(f\circ g,P)-L(f\circ g,P)<\varepsilon$$

■

הערה 2.50 במשפט הקודם, מספיק לדרוש ש־f רציפה בקטע סגור שמכיל את $\text{Im}(g)$. למעשה מספיק ש־f רציפה על $\overline{\text{Im}(g)}$

שאלה מה קורה אם נרכיב $f\circ g$ כאשר f,g אינטגרביליות כלשהן? או אם g רציפה ו f אינטגרבילית?

בכל אחד מהמקרים הנ"ל קיימות דוגמאות שבהן $f\circ g$ **לא אינטגרבילית**.

הערה 2.51 עבור **אינטגרל־לבג** הרכבה שומרת על אינטגרביליות.

3 סכומי רימן

הגדרת האינטגרל לפי רימן (המאה ה19)

בהינתן f פונקציה חסומה המוגדרת בקטע $[a,b]$. ותהי P חלוקה של הקטע $[a,b]$.

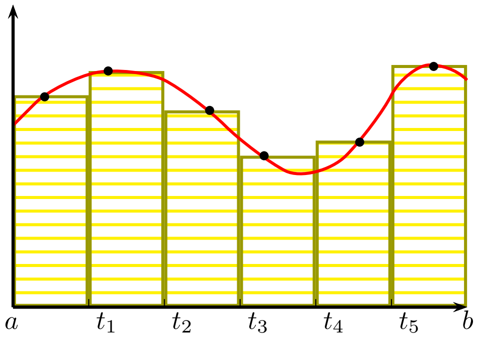
$$a=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n=b$$

בכל קטע חלוקה $[t_{i-1},t_i]$נבחר נקודה x_i ונביט בסכום:

$$S(f,P,x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}f(x_i)(t_i-t_{i-1})$$

(הביטוי הנ"ל נקרא סכום רימן)

$$L(f,P)\leq S(f,P,x_1,\ldots,x_n)\leq U(f,P)$$



למה 3.1

לכל חלוקה P ולכל $\varepsilon > 0$ קיימת בחירה של נקודות $x_1, \ldots, x_n$ כך ש $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$ ו:

$$0 \leq U(f,P) - S(f,P,x_1,\ldots,x_n) < \varepsilon$$

באופן דומה קיימת בחירה של נקודות כך ש:

$$0 \leq S(f,P,x_1,\ldots,x_n) - L(f,P) < \varepsilon$$

הוכחה:

$$U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i (t_i - t_{i-1})$$

לכל $\varepsilon_1 > 0$ ולכל i קיימת נקודה $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$ כך ש $M_i - f(x_i) < \varepsilon_1$.

$$U(f,P) - S(f,P,x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - f(x_i))(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon_1 (b-a)$$

יהי $\varepsilon > 0$ נתון. נגדיר $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{b-a}$ בעזרתו נגדיר את הנקודות $x_1, \ldots, x_n$ ואז:

$$U(f,P) - S(f,P,x_1,\ldots,x_n) < \varepsilon$$

■

הערה 3.2 אם f רציפה קיימת בחירה של נקודות כך ש:

$$U(f,P) = S(f,P,x_1,\ldots,x_n)$$

דוגמה 3.3 $f(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ x & x \neq 0 \end{cases}$ בקטע $[0,1]$. $P = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$

$$L(f,P) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

(בקטע $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ אין מינימום).

$$S(f,P,x_1,x_2) = \underbrace{f(x_1)}_{>0} \cdot \frac{1}{2} + f(x_2) \cdot \frac{1}{2} > f(x_2) \cdot \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

ולכן:

$$\forall x_1, x_2 \quad S(f,P,x_1,x_2) > \frac{1}{4}$$

3.1 אינטגרביליות לפי רימן

הגדרה 3.4 פרמטר החלוקה: אם P חלוקה $\mu(P) = \max\limits_{1\le i\le n}(t_i - t_{i-1})$ נקרא **פרמטר החלוקה**.

הגדרה 3.5 נאמר ש $\lim\limits_{\mu(P)\to 0} S(f,P,x_1\dots,x_n) = A$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $\mu(P) < \delta$ אז:

$$|S(f,P,x_1,\dots,x_n) - A| < \varepsilon$$

לכל בחירה של נקודות $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$.

הגדרה 3.6 אינטגרביליות לפי רימן: f **אינטגרבילית לפי רימן** אם קיים הגבול $\lim\limits_{\mu(P)\to 0} S(f,P,x_1\dots,x_n)$

משפט 3.7

$\lim\limits_{\mu(P)\to 0} S(f,P,x_1\dots,x_n) = A$ אס"ס f אינטגרבילית לפי דרבו ו: $A = \int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

הוכחה:

■

24/02/11

המשך סכומי רימן.

$$S(f,P,x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(t_i - t_{i-1}) \quad x_i \in [t_{i-1}, t_i]$$

נשים לב שסכום רימן מוגדר גם עבור פונקציות **לא חסומות**.

למה 3.8

אם $\sup\limits_{[a,b]} f = \infty$, P חלוקה כלשהי של $[a,b]$ ו $M > 0$ אז קיימת בחירה של נקודות $x_i \in [t_{i-1}, t_i]$ כך ש $S(f,P,x_1,\dots,x_n) > M$

הוכחה: קיים קטע $[t_{i-1}, t_i]$ שעבורו $\sup\limits_{[t_{i-1},t_i]} f = \infty$.

לכל $N > 0$ קיים $x_i^N \in [t_{i-1}, t_i]$ כך ש: $f(x_i^N) > N$.

תהיינה $x_1,\dots,x_k,\dots,x_n$ נקודות כך ש:

$$\begin{aligned} x_k &\in [t_{k-1}, t_k] \\ x_i &= x_i^N \end{aligned}$$

ואז

$$S\left(f,P,x_1,\dots,x_i^N,\dots,x_n\right) = \sum_{\substack{k=1\\k\ne i}}^{n} f(x_k)(t_k - t_{k-1}) + f\left(x_i^N\right)(t_i - t_{i-1}) >$$

$$\sum_{k\ne i} f(x_k)(t_k - t_{k-1}) + N(t_i - t_{i-1})$$

נשים לב כי $N \to \infty$. ולכן מצאנו סדרה של סכומי רימן שמתאימים לחלוקה P ושואפת ל∞ כלומר נוכל למצוא $N > 0$ כך ש

$$S\left(f, P, x_1, \ldots, x_i^N, \ldots, x_n\right) > M$$

■

הערה 3.9 בעתיד נראה שאפשר להגדיר:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t = A < \infty$$

למרות זאת, לכל חלוקה P נוכל למצוא סכום רימן מתאים שערכו גדול כרצוננו.

הגדרה 3.10 נאמר ש $\lim\limits_{\mu(P)\to 0} S(f,P) = A$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל חלוקה P עם פרמטר קטן מδ ולכל בחירה מתאימה של נקודות:

$$\left|S(f, P, x_1, \ldots, x_n) - A\right| < \varepsilon$$

מסקנה 3.11

אם קיים הגבול $\lim\limits_{\mu(P)\to 0} S(f,P) = A$ אז f חסומה.

הוכחה: קיים $\delta > 0$ כך שלכל חלוקה P עם פרמטר קטן מδ $S(f, P, x_1, \ldots, x_n) < A + 1$ לכל $x_1, \ldots, x_n$.
תהי P_0 חלוקה עם פרמטר $\mu(P_0) < \delta$ אם f לא חסומה אז לפי הלמה הקודמת קיימת בחירה של נקודות $x_1, \ldots, x_n$ כך ש:

$$S(f, P_0, x_1, \ldots, x_n) > A + 1$$

סתירה לתכונה של P_0 לכן f חסומה. ■

משפט 3.12

אם קיים הגבול $\lim\limits_{\mu(P)\to 0} S(f,P) = A$ אז f אינטגרבילית לפי דרבו ו: $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = A$

הוכחה: מהמסקנה הקודמת, ראינו כי f חסומה.
יהי נתון $\varepsilon > 0$, קיים $\delta > 0$ כך ש $\mu(P) < \delta$ אז

$$A - \frac{\varepsilon}{4} < S(f, P, x_1, \ldots, x_n) < A + \frac{\varepsilon}{4}$$

לכל בחירה $x_1, \ldots, x_n$ מתאימה.
קיימת בחירה של נקודות $x_1^1, \ldots, x_n^1$ כך ש

$$0 \le U(f,P) - S\left(f, P, x_1^1, \ldots, x_n^1\right) < \frac{\varepsilon}{4}$$

קיימת בחירה $x_1^2, \ldots, x_n^2$ כך ש:

$$S\left(f, P, x_1^2, \ldots, x_n^2\right) - L(f,P) < \frac{\varepsilon}{4}$$

משלושת האי שוויונים הנ"ל נקבל כי:

$$U(f,P)-A < \frac{\varepsilon}{2}$$
$$A-L(f,P) < \frac{\varepsilon}{2}$$

נחבר את המשוואות הנ"ל ונקבל:

$$U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$$

לכל חלוקה עם פרמטר קטן מδ.
נשאר להראות כי

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = A$$

נראה $\inf \mathscr{U} \le A$. נוסיף $\varepsilon > 0$ לאגף ימין ונקבל:

$$\inf \mathscr{U} < A+\varepsilon$$

נמצא סכום עליון כך ש $U(f,P) < A+\varepsilon$ כבר מצאנו כזה סכום עליון במשוואה $U(f,P)-A<\frac{\varepsilon}{2}$. באופן דומה $A\le \sup \mathscr{L}$ בהסתמך על: $A-L(f,P)<\frac{\varepsilon}{2}$. ונקבל כי:

$$A \le \sup \mathscr{L} \le \inf \mathscr{U} \le A$$

ולכן יש שיוויון:

$$\inf \mathscr{U} = \sup \mathscr{L} = A$$

כנדרש. ■

27/02/11

3.2 השקילות בין אינטגרל דרבו לאינטגרל רימן

$$\lim_{\mu(P)\to 0} S(f,P)=A$$

אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל חלוקה P עם פרמטר $\mu(P)<\delta$ ולכל בחירה מתאימה של נקודות $x_i\,[t_{i-1},t_i]$ מתקיים:

$$|S(f,P,x_1,\ldots,x_n)-A|<\varepsilon$$

משפט 3.13

אם f אינטגרבילית דרבו אז הגבול $\lim_{\mu(P)\to 0} S(f,P)$ קיים (ושווה לאינטגרל)

הוכחה: יהי $\varepsilon>0$ נתון. קיימת חלוקה P_1 כך ש:

$$U(f,P_1)-L(f,P_1)<\varepsilon$$

נסמן $I=\int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ מכאן נובע גם:

$$\begin{cases}U(f,P_1)-I<\varepsilon\\ I-L(f,P_1)<\varepsilon\end{cases}$$

כי $L(f,P_1)\le I\le U(f,P_1)$.
אם Q חלוקה כלשהי שמעדנת את P_1אז:

$$\begin{cases}U(f,Q)-I<\varepsilon\\ I-L(f,Q)<\varepsilon\end{cases}$$

מכיוון ש $U(f,Q)\le U(f,P_1)$ וגם $L(f,P_1)\le L(f,Q)$.
אם Q חלוקה כלשהי שמעדנת את P_1 ו$x_1,\ldots,x_n$ מתאימה של נקודות אז:

$$\begin{cases}S(f,Q,x_1,\ldots,x_n)-I\le U(f,Q)-I<\varepsilon\\ I-S(f,Q,x_1,\ldots,x_n)<\varepsilon\end{cases}$$

תהי Q_0 חלוקה עדינה עם פרמטר $>\delta$ ($\mu(Q_0)<\delta$). תהי $x_1,\ldots,x_n$ בחירה מתאימה של נקודות. אם Q_0 מעדנת את P_1 אז:

$$|S(f,Q_0,x_1,\ldots,x_n)-I|<\varepsilon$$

נמצא סידרה של חלוקות:

$$Q_0\subset Q_1\subset Q_2\subset\ldots\subset Q_m=Q_0\cup P_1$$

כך שמספר הנקודות Q_k הוא בדיוק אחד יותר ממספר הנקודות ב Q_{k-1}. מספר הנקודות ב $m\le P_1$.
נרצה להעריך:

$$S(f,Q_0,x_1,\ldots,x_n)-I=$$
$$[S(f,Q_0)-S(f,Q_1)+S(f,Q_1)-S(f,Q_2)+\ldots+S(f,Q_{m-1})-S(f,Q_m)]+S(f,Q_m)-I=$$
$$\sum_{k=1}^{m}[S(f,Q_{k-1})-S(f,Q_k)]+S(f,Q_m)-I$$

תהי $\{x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_k\}$קבוצת הנקודות שבחרנו עבור החלוקה Q_k (עבור כל חלוקה Q_k הוספנו נקודה 1, לכן מספר הנקודות ב Q_k שווה למספר הנקודות בQ_0 פלוס k נקודות)
נקרא לנקודות החלוקה של Q_{k-1}: $s_0,s_1,\ldots,s_{n+k-1}$ וc_k נקודת החלוקה הנוספת של Q_k. תהי $y_i\in[s_{i-1},s_i]$ וu_k נקודה נוספת בקטע שהתפצל.

$$S(f,Q_{k-1})-S(f,Q_k)=f(y_i)(s_i-s_{i-1})-[f(u_k)\cdot(c_k-s_{i-1})+f(y_i)\cdot(s_i-c_k)]$$
$$=f(y_i)(s_i-c_k)+f(y_i)(c_k-s_{i-1})-[f(u_k)\cdot(c_k-s_{i-1})+f(y_i)\cdot(s_i-c_k)]=$$
$$[f(y_i)-f(y_i)](s_i-c_k)+[f(y_i)-f(u_k)](c_k-s_{i-1})=$$
$$[f(y_i)-f(u_k)](c_k-s_{i-1})\le\left(\sup_{[a,b]}f-\inf_{[a,b]}f\right)\cdot\delta$$

נעריך:

$$S(f,Q_0)-S(f,Q_m)=\sum_{k=1}^{m}S(f,Q_{k-1})-S(f,Q_k)\le[\sup f-\inf f]\cdot m\delta$$

נבחר $\delta=\frac{\varepsilon}{(\sup f-\inf f)\cdot m}$ נקבל:

$$S(f,Q_0)-I=S(f,Q_0)-S(f,Q_m)+S(f,Q_m)-I\le$$
$$\left|\underbrace{S(f,Q_0)-S(f,Q_m)}_{\le\varepsilon}\right|+\left|\underbrace{S(f,Q_m)-I}_{\le\varepsilon}\right|\le\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon$$

סקירה של ההוכחה

יהי $\varepsilon>0$ נתון. מצאנו חלוקה P_1כך ש $U(f,P_1)-L(f,P_1)<\frac{\varepsilon}{2}$. מספר הנקודות ב$P_1$ הוא N. נגדיר $\delta=\frac{\varepsilon}{2N(\sup f-\inf f)}$. תהי Q_0 חלוקה כלשהי עם פרמטר $>\delta$. נגדיר סידרה של חלוקות:

$$Q_0\subset Q_1\subset\ldots\subset Q_m=Q_0\cup P_1$$

הראינו ש $|S(f,Q_m)-I|<\varepsilon$ לכל בחירה של נקודות מתאימות ל Q_m. הראינו גם כי $|S(f,Q_{k-1})-S(f,Q_k)|\le(\sup f-\inf f)\delta$ וזה גורר כי

$$|S(f,Q_0)-S(f,Q_m)|\le m\delta(\sup f-\inf f)\le N\delta(\sup f-\inf f)=\frac{\varepsilon}{2}$$

$$|S(f,Q_0)-I|\le|S(f,Q_0)-S(f,Q_m)|+|S(f,Q_m)-I|<\varepsilon$$

■

דוגמה 3.14 נגדיר

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{q} & x=\frac{p}{q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

בקטע $[0,1]$. $\frac{p}{q}$ שבר מצומטם. נזכור כי f רציפה בכל הנקודות האי רציונאליות וf לא רציפה בכל נקודה רציונלית. (מדובר בפונקציית רימן, הטענות הנ"ל הוכחו באינפי 1). נראה ש f אינטגרבילית (בעתיד נרצה לאפיין את כל הפונקציות האינטגרביליות).

יהי $\varepsilon>0$ נתון. נרצה למצוא חלוקה P כך ש:

$$U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$$

נשים לב כי עבור כל חלוקה P מתקיים $L(f,P)=0$. יהי $\mathbb{N}\ni N>0$ נביט בקבוצת הנקודות שבהן הפונקציה $f\ge\frac{1}{N}$ נסמנה ב A. נשים לב שזוהי קבוצה סופית.

$$A=\left\{\frac{0}{1},\frac{1}{1},\frac{0}{2},\frac{1}{2},\frac{2}{2},\ldots,\frac{0}{N},\frac{1}{N},\frac{2}{N},\ldots,\frac{N-1}{N}\right\}$$

נסמן ב a את מספר הנקודות ב A. מסביב לכל נקודה $x_0\in A$ ניקח נקודות חלוקה $x_0-\frac{\varepsilon}{a},x_0+\frac{\varepsilon}{a}$. לא ניקח נקודות חלוקה אחרות. נביט בחלוקה P המתקבלת. בקטע חלוקה שבו נופלות נקודות מA הם הקטעים הרעים ושם נקבל כי:

$$M_i(f)(t_i-t_{i-1})\le1(t_i-t_{i-1})\le2\frac{\varepsilon}{a}$$

בקטע חלוקה שבו אין נקודות מA נקבל קטעים טובים:

$$M_i(f)(t_i - t_{i-1}) \leq \frac{1}{N}(t_i - t_{i-1})$$

נשים לב שיש לכל היותר a קטעים רעים ולכן:

$$\sum_{\text{bad intervals}} M_i(t_i - t_{i-1}) \leq \frac{2\varepsilon}{a} \cdot a = 2\varepsilon$$

$$\sum_{\text{good intervals}} M_i(t_i - t_{i-1}) \leq \sum \frac{1}{N}(t_i - t_{i-1}) \leq \frac{1}{N}(b-a) = \frac{1}{N}$$

$$U(f,P) \leq 2\varepsilon + \frac{1}{N}$$

בהינתן $\varepsilon_0 > 0$ נגדיר $N > \frac{1}{2\varepsilon_0}$ $N \in \mathbb{N}$ ונגדיר את הקבוצה A שמתאימה ל N. ואז נקח $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{4}$ ונגדיר בעזרת הקבוצה A את החלוקה. עבור חלוקה זו נקבל:

$$U(f,P) < \varepsilon_0$$

משפט 3.15

אם קבוצה נקודות האי רציפות של f היא סופית אז f אינטגרבילית. למשל $\sin\frac{1}{x}$ אינטגרבילית ב$[-1,1]$.

02/03/11

שאלה האם $f(x) = \begin{cases} x & 0 \leq x \leq 1 \\ x+1 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ האם f אינטגרבילית ב $[0,2]$?

$f|_{[0,1]}$ רציפה ולכן אינטגרבילית. $f|_{[1,2]}$ לא רציפה. נגדיר $g(x) = x+1$ בקטע $[1,2]$. נגדיר $f(x) = g(x) + h(x)$ ונגדיר $h(x) = \begin{cases} -1 & x = 1 \\ 0 & 1 < x \leq 2 \end{cases}$ ראינו ש h אינטגרבילית. ולכן f אינטגרבילית ב $[0,2]$.

שאלה 2 האם $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ אינטגרבילית ב$[-1,1]$?

משפט 3.16

אם f חסומה ב$[a,b]$וקבוצה נקודות אי־הרציפות של f סופית, אזי f אינטגרבילית ב$[a,b]$

הוכחה: אם קבוצת נקודות אי הרציפות E היא ריקה. אז f רציפה ולכן אינטגרבילית.
נניח שהוכחנו את הטענה במקרה של $|E| = k$נוכיח את הטענה עבור $|E| = k+1$.
תהי $x_0 \in [a,b]$ נקודת אי רציפות של f. יהי $\varepsilon_1 > 0$. בקטע $[a, x_0 - \varepsilon_1]$ f אינטגרבילית. (הנחת האינדוקציה) כמו כן גם בקטע $[x_0 + \varepsilon_1, b]$.
יהי $\varepsilon_2 > 0$. קיימת חלוקה P_1של $[a, x_0 - \varepsilon_1]$ כך ש $U(f,P_1) - L(f,P_1) < \varepsilon_2$, כמו כן קיימת חלוקה P_2של $[x_0 + \varepsilon_1, b]$כך ש $U(f,P_2) - L(f,P_2) < \varepsilon_2$.
נגדיר $P = P_1 \cup P_2$ חלוקה של $[a,b]$.

$$U(f,P) = U(f,P_1) + U(f,P_2) + \left(\sup_{[x_0-\varepsilon_1, x_0+\varepsilon_1]} f\right) \cdot 2\varepsilon_1$$

$$U(f,P) = L(f,P_1) + L(f,P_2) + \left(\inf_{[x_0-\varepsilon_1, x_0+\varepsilon_1]} f\right) \cdot 2\varepsilon_1$$

$$U(f,P)-L(f,P)=U(f,P_1)+U(f,P_2)+\left(\sup_{[x_0-\varepsilon_1,x_0+\varepsilon_1]}f\right)\cdot 2\varepsilon_1-$$
$$L(f,P_1)+L(f,P_2)+\left(\inf_{[x_0-\varepsilon_1,x_0+\varepsilon_1]}f\right)\cdot 2\varepsilon_1<$$
$$2\varepsilon_2+2\varepsilon_1\left(\sup_{[x_0-\varepsilon_1,x_0+\varepsilon_1]}f-\inf_{[x_0-\varepsilon_1,x_0+\varepsilon_1]}f\right)\le 2\varepsilon_2+2\varepsilon_1\left(\sup_{[a,b]}f-\inf_{[a,b]}f\right)$$

יהי $\varepsilon>0$. נגדיר $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{4\left(\sup_{[a,b]}f-\inf_{[a,b]}f\right)}$, $\varepsilon_2=\frac{\varepsilon}{4}$. בעזרת $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ נגדיר P_1,P_2 ואז עבור $P=P_1\cup P_2$ נקבל:

$$U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon$$

■

3.3 משפט הערך הממוצע

משפט 3.17 משפט הערך הממוצע

תהי f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$ קיים $c\in(a,b)$ כך ש:

$$f(x)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

(זה נקרא הממוצע של f ב$[a,b]$).

הוכחה: נסמן $m=\min_{[a,b]}f,\ M=\max_{[a,b]}f$ ולכן:

$$m=\frac{1}{b-a}\int_a^b m\mathrm{d}t\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\le\frac{1}{b-a}\int_a^b M\mathrm{d}t=M$$

f רציפה, לכן לפי משפט ערך הביניים מקבלת כל ערך בין m לM. בפרט, קיים $c\in[a,b]$ כך ש $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

נראה שניתן לבחור $c\in(a,b)$.

למה 3.18

אם f לא קבועה, אז קיימת נקודה $x_1\in[a,b]$ כך ש: $f(x_1)>\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

הוכחה: נניח שלא קיימת x_1 כנ"ל. אזי

$$\forall x\ f(x)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=L$$

(סומן L לצורך נוחות)

$$\forall x\ f(x) - L \leq 0$$

אזי:

$$\int_a^b (f(x) - L)\,\mathrm{d}x < 0$$

(כי $f - L$ לא קבועה ורציפה).

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{b-a}\int_a^b L\mathrm{d}x = \frac{1}{b-a}\int_a^b (f(x) - L)\,\mathrm{d}x < 0$$

אבל אנו יודעים כי:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{b-a}\int_a^b L\mathrm{d}x = 0$$

ולכן קיבלנו $0 < 0$ וזו סתירה. ■

למה 3.19

אם f לא קבועה אז קיימת נקודה $x_2 \in [a,b]$ כך ש $f(x_2) < \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

הוכחה: באופן זהה ללמה הקודמת. ■

מסקנה 3.20

בקטע (x_1, x_2)הערך $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ מתקבל.

ולכן מהמסקנה, הטענה נכונה כנדרש. ■

דוגמה 3.21 $f(x) = \begin{cases} -1 & -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$ הממוצע של f בקטע $[-1,1]$הוא 0.
f לא מקבלת את הערך 0 כי היא לא רציפה.

3.3.1 גרסה כללית יותר של משפט ערך הממוצע

משפט 3.22

תהי f רציפה בקטע $[a,b]$. תהי g פונקציה אינטגרבילית ב$[a,b]$ ואי שלילית. (או אי

חיובית). אזי קיים $c\in[a,b]$ כך ש:

$$f\left(c\right)=\frac{\int\limits_a^b f\left(x\right)g\left(x\right)\mathrm{d}x}{\int\limits_a^b g\left(x\right)\mathrm{d}x}$$

הוכחה: בה"כ נדון ב $g\geq 0$

$$\int\limits_a^b mg\left(x\right)\mathrm{d}x\leq\int\limits_a^b f\left(x\right)g\left(x\right)\mathrm{d}x\leq\int\limits_a^b Mg\left(x\right)\mathrm{d}x$$

ההמשך הוא כמו בהוכחה הקודמת. ■

4 המשפט היסודי של החשבון האינטגרלי

הגדרה 4.1 בהינתן f פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$. נגדיר: $F\left(x\right):=\int\limits_a^x f\left(t\right)\mathrm{d}t$ פונקצייה של x.

דוגמה 4.2 $f\left(t\right)=\begin{cases}1 & 0\leq t\leq 1\\ 2 & 1<t\leq 2\end{cases}$ נשתמש בהגדרה הנ"ל ונקבל:

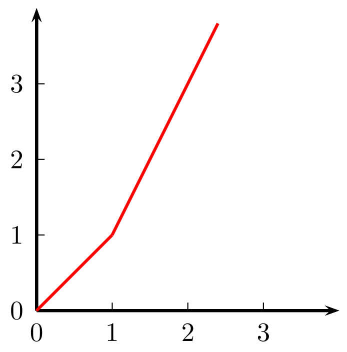
$$F\left(x\right)=\int\limits_0^x f\left(t\right)\mathrm{d}t$$

אם $x\leq 1$ אזי:

$$F\left(x\right)=\int\limits_0^x 1\mathrm{d}t=x$$

אם $1<x\leq 2$ אז:

$$F\left(x\right)=\int\limits_0^1 1\mathrm{d}t+\int\limits_a^x 2\mathrm{d}t=1+2\left(x-1\right)=2x-1$$



F רציפה.

משפט 4.3 המשפט היסודי של החשבון האינטגרלי

תהי f פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$. נגדיר

$$\forall a\le x\le b\quad F\left(x\right):=\int_{a}^{x}f\left(t\right)\mathrm{d}t$$

אזי F פונקצייה רציפה. יתר על כן: אם f רציפה בנקודה x_0 אז F גזירה בx_0 ומתקיים: $F'\left(x_0\right)=f\left(x_0\right)$.

הוכחה: נראה ש F רציפה. צריך להראות כי: $\lim\limits_{h\to0}F\left(x+h\right)=F\left(x\right)$.

$$F\left(x+h\right)-F\left(x\right)=\int_{a}^{x+h}f\left(t\right)\mathrm{d}t-\int_{a}^{x}f\left(t\right)\mathrm{d}t=\int_{x}^{x+h}f\left(t\right)\mathrm{d}t$$

לצורך נוחות, נתמקד כרגע ב$h\ge0$ נקבל:

$$F\left(x+h\right)-F\left(x\right)=\int_{x}^{x+h}f\left(t\right)\mathrm{d}t\le M\left(\left(x+h\right)-x\right)=Mh$$

(אנו מניחים כי $|f|\le M$)

$$\left|F\left(x+h\right)-F\left(x\right)\right|\le M\cdot h$$

באופן דומה, אם $h\le0$ נקבל גם:

$$\left|F\left(x+h\right)-F\left(x\right)\right|\le M\left|h\right|$$

יהי $\varepsilon>0$ נגדיר $\delta=\frac{\varepsilon}{M}$ אם $|h|<\delta$ נקבל:

$$\left|F\left(x_0+h\right)-F\left(x_0\right)\right|\le\varepsilon$$

כלומר:

$$\lim_{h\to0}\left(F\left(x_0+h\right)-F\left(x_0\right)\right)=0$$

מ.ש.ל. מהרציפות.

הערה 4.4 הוכחנו קצת יותר מרציפות. למעשה הוכחנו ש F היא פונקציה ליפשיצית.

נוכיח גזירות: נראה שאם f רציפה בx_0 אז F גזירה בx_0 ומתקיים: $F'(x_0) = f(x_0)$
נרצה להראות כי:

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0)=0$$

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0)=\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}f(t)\,\mathrm{d}t-f(x_0)=\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{h}\cdot h\cdot f(x_0)=$$

$$\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}f(t)\,\mathrm{d}t-\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}f(x_0)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{h}\int_{x}^{x+h}\left[f(t)-f(x_0)\right]\mathrm{d}t$$

יהי $\varepsilon>0$. קיים $\delta>0$ כך שאם $|t-x_0|<\delta$ אז מהרציפות של f בx_0 מתקבל:

$$|f(t)-f(x_0)|<\varepsilon$$

ולכן אם $|h|<\delta$ אז $|f(t)-f(x_0)|<\varepsilon$ לכל $t\in[x_0-h,x_0+h]$ ואז נקבל כי:

$$-\varepsilon=\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}-\varepsilon\mathrm{d}t\le\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}\left(f(t)-f(x_0)\right)\mathrm{d}t\le\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}\varepsilon\mathrm{d}t=\varepsilon$$

כלומר:

$$\frac{1}{h}\left|\int_{x_0}^{x_0+h}f(t)-f(x_0)\,\mathrm{d}t\right|<\varepsilon$$

לסיכום, מצאנו $\delta>0$ כך שאם $|h|<\delta$ אזי:

$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0)\right|<\varepsilon$$

מ.ש.ל. ■

מסקנה 4.5

אם f רציפה ב: $[a,b]$ אז $F'=f$ (בפרט לf יש פונקצייה קדומה).

דוגמאות חשבו את הנגזרות של:

.1

$$F(x)=\int_1^x\sin^3 t\mathrm{d}t$$

לפי המשפט היסודי:

$$F'(x)=\sin^3 x$$

.2

$$F(x)=\int_a^{x^3}\sin^4 t\mathrm{d}t$$

נגדיר פונקציה $h(x)=x^3$ ונגדיר:

$$G(x)=\int_1^{x}\sin^4 t\mathrm{d}t$$

ולכן לפי המשפט היסודי:

$$G'(x)=\sin^4 x$$

כמו כן, נשים לב כי: $F(x)=G(h(x))$ ולכן, לפי כלל השרשרת:

$$F'(x)=G'(h(x))\cdot h'(x)$$

$$G'(x)=\sin^4 x\Rightarrow G'(h(x))=\sin^4 h(x)=\sin^4\left(x^3\right)$$

$$h'(x)=3x^2$$

ולכן:

$$F'(x)=\sin^4\left(x^3\right)\cdot 3x^2$$

.3

$$F(x)=\int_x^b f(t)\mathrm{d}t=-\int_b^x f(t)\Rightarrow F'(x)=-f(x)$$

.4

$$F(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)\mathrm{d}t$$

נשים לב כי:

$$F(x)=\int_0^{b(x)} f(t)\mathrm{d}t-\int_0^{a(x)} f(t)\mathrm{d}t$$

וכמו שראינו מקודם, לפי כלל השרשרת:

$$F'(x)=f(b(x))\cdot b'(x)-f(a(x))\cdot a'(x)$$

.5

$$F(x)=\int_0^x x\cdot f(t)\,\mathrm{d}t=x\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t+x\cdot f(x)$$

03/03/11

דוגמה 4.6 הוכיחו

$$\int_1^{ab}\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\int_1^{a}\frac{1}{t}\mathrm{d}t+\int_1^{b}\frac{1}{t}\mathrm{d}t$$

נגדיר

$$\begin{aligned}F_1(x) &= \int_1^{x}\frac{1}{t}\mathrm{d}t\\ F_2(x) &= \int_1^{ax}\frac{1}{t}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

נשים לב כי $\frac{1}{t}$ רציפה ב $[1,x]$ לכן אינטגרבילית.

$$\begin{aligned}F_1'(x) &= \frac{1}{x}\\ F_2'(x) &= \frac{1}{ax}\cdot a=\frac{1}{x}\end{aligned}$$

ולכן נקבל כי:

$$F_1'-F_2'=0$$

לכן קיים $c\in\mathbb{R}$ כך ש:

$$\forall x\quad F_1(x)-F_2(X)=c$$

נרצה למצוא את c. ננסה בהצבה:

$$F_1(1)=0,\quad F_2(1)=\int_1^{a}\frac{1}{t}\mathrm{d}t\Rightarrow$$

$$c=F_1(1)-F_2(1)=-\int_1^{a}f(t)\,\mathrm{d}t\Rightarrow F_2(x)=F_1(x)-c=F_1(x)+\int_1^{a}f(t)\,\mathrm{d}t$$

בפרט עבור $x=b$ נקבל:

$$\int_1^{ab}\frac{1}{t}\mathrm{dt}=\int_1^{b}\frac{1}{t}\mathrm{dt}+\int_1^{a}\frac{1}{t}\mathrm{dt}$$

(האינטגרל הנ"ל הוא דרך נוספת להגדיר לוגריתם)

מסקנה 4.7

(זמנית) של המשפט היסודי
תהי f רציפה בקטע $[a,b]$ותהי F פונקציה קדומה של f אז:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}=F(b)-F(a)$$

הוכחה: נגדיר $G(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{dt}$. נתון כי f רציפה ולכן לפי המשפט היסודי:

$$G'(x)=f(x)$$

בנוסף F היא פונקציה קדומה של f ולכן:

$$F'(x)=f(x)$$

לכן קיים $c\in\mathbb{R}$ כך ש:

$$\forall x\in[a,b]\quad G(x)-F(x)=c$$

נחשב את c:

$$c=G(a)-F(a)=0-F(a)=-F(a)$$

ולכן:

$$G(b)-F(b)=-F(a)$$

כלומר:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}=F(b)-F(a)$$

■

משפט 4.8 הנוסחה היסודית

אם f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ו־ F פונקציה רציפה ב $[a,b]$ כך ש $f=F'$ ב (a,b) אז:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{dt}=F(b)-F(a)$$

הוכחה: תהי P חלוקה של $[a,b]$. נראה ראשית כי: $L(f,P)\le F(b)-F(a)\le U(f,P)$

$$U(f,P)=\sum_{i=1}^{n}M_i(f)\cdot(t_i-t_{i-1})$$

נשים לב כי $M_i(f)=M_i(F')$ אם אנחנו מניחים ש $F'=f$ ב $[a,b]$. נראה כי:

$$M_i(F')(t_i-t_{i-1})\ge F(t_i)-F(t_{i-1})$$

כיוון שלפי משפט לגראנז', קיימת נקודה $\tau_i\in(t_{i-1},t_i)$ כך ש:

$$F(t_i)-F(t_{i-1})=F'(\tau_i)(t_i-t_{i-1})\le M_i(F')(t_i-t_{i-1})$$

(כיוון ש $F'(\tau_i)\le M_i(F')$). ולכן:

$$\sum_{i=1}^{n}M_i(F')(t_i-t_{i-1})\ge\sum_{i=1}^{n}F(t_i)-F(t_{i-1})=F(b)-F(a)$$

כיוון שמדובר בטור טלסקופי.
באופן דומה לכל P נקבל כי:

$$L(f,P)\le F(b)-F(a)$$

f אינטגרבילית, לכן בהכרח:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=F(b)-F(a)$$

■

הערה 4.9 בעצם לא השתמשנו בהנחה ש $F'=f$ ב $[a,b]$ אלא מספיק להניח ש $F'=f$ ב (a,b) מכיוון ש:

$$U(f,P)=\sum_{i=1}^{n}M_i(f)\cdot(t_i-t_{i-1})\ge\sum_{i=1}^{n}\sup_{(t_{i-1},t_i)}(t_i-t_{i-1})\ge\sum_{i=1}^{n}F(t_i)-F(t_{i-1})$$

אי השיוויון האחרון לפי משפט לגראנז'

06/03/11

דוגמה 4.10 למה הרציפות הכרחית במשפט היסודי?

$$f(t)=\begin{cases}0 & 0\le t<1\\ 1 & 1\le t\le 2\end{cases}$$

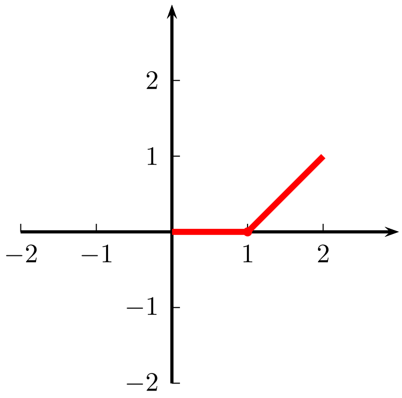
אם $0\le x<1$ אז:

$$F(x)=\int_0^x 0\mathrm{d}t=0$$

אם $1\le x<2$ אז:

$$F(x)=\int_0^1 0\mathrm{d}t+\int_1^x 1\mathrm{d}t=x-1$$

כלומר הגרף של $F(x)$ הוא:



F לא גזירה בנקודה $x_0 = 1$. נשים שהנוסחה היסודית עדיין מתקיימת!

$$\underbrace{\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t}_{=1} = \underbrace{F(2)}_{1} - \underbrace{F(0)}_{0}$$

למרות ש f לא רציפה.

מסקנה 4.11

מהנוסחה היסודית: אם f אינטגרבילית ב $[a,b]$, וקיימת F רציפה ב $[a,b]$ כך ש $F' = f$ פרט אולי למספר סופי של נקודות בקטע (a,b) אז:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

דוגמה 4.12 בדוגמה להעיל:

$$\int_0^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t =$$

$$F(1) - F(0) + F(2) - F(1) = F(2) - F(0)$$

$F' = f$ בקטעים $(0,1)$ ו־$(1,2)$

דוגמה 4.13 $f(t) = \begin{cases} \sin\frac{1}{t} & t \neq 0 \\ 2 & t = 0 \end{cases}$ בקטע $[-1,1]$, f אינטגרבילית ולא רציפה באפס.

$$F(x) = \int_{-1}^{x} \sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$$

נחשב $F'(0)$. האם קיימת:

$$\frac{F(0+h)-F(0)}{h}=\frac{1}{h}\left(\int_{-1}^{h}\sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t-\int_{-1}^{0}\sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t\right)=\frac{1}{h}\cdot\int_{0}^{h}\sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t$$

כאשר $h\to 0$ אזי לא קיים.

דוגמה 4.14 חשבו:

$$f(t)=t^2,\quad \int_0^b t^2\mathrm{d}t$$

נגדיר $G(t)=\frac{t^3}{3}+2$

$$\int_0^b t^2\mathrm{d}t=G(b)-G(0)=\frac{b^3}{3}$$

5 שיטות אינטגרציה

5.1 אינטגרציה בחלקים

טענה 5.1 אינטגרציה בחלקים

$$\int_a^b f'(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t=-\int_a^b f(t)\,g'(t)\,\mathrm{d}t+f(b)\,g(b)-f(a)\,g(a)$$

f,g גזירות ב $[a,b]$. f',g' אינטגרביליות.

הוכחה:

$$\int_a^b f'(t)\,g(t)\,\mathrm{d}t+\int_a^b f(t)\,g'(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b f'(t)\,g(t)+f(t)\,g'(t)\,\mathrm{d}t=$$

$$\int_a^b (f\cdot g)'(t)\,\mathrm{d}t=(f\cdot g)(b)-(g\cdot g)(a)=\left.f\cdot g\right|_a^b$$

(נזכור כי $(f\cdot g)'$ אינטגרבילית על מנת להצדיק את השיווין אחד לפני האחרון) ■

הערה 5.2 באמצע המאה גילו דרך לגזור כל פונקצייה. הכלי העיקרי להגדרת הנגזרת הנזו הוא אינטגרציה בחלקים. (תורת הדיסטריבוציות)

למה 5.3 הלמה של רימן־לבג

נגדיר:

$$a_n:=\int_a^b f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t$$

כאשר f גזירה ברציפות ב $[a,b]$. כיצד מתנהגת הסדרה כאשר $n\to\infty$? נראה ש $a_n\to 0$.

הוכחה: נגדיר $g'(t)=\cos nt$ ולכן $g(t)=\frac{\sin nt}{n}$ נקבל:

$$a_n=\int_a^b f(t)\cdot g'(t)\,\mathrm{d}t=-\int_a^b f'(t)\cdot\frac{\sin nt}{n}\mathrm{d}t+f\cdot\frac{\sin nt}{n}\Big|_a^b=$$

$$-\frac{1}{n}\int_a^b f'(t)\sin nt\mathrm{d}t+\frac{1}{n}\left(f(b)\sin nb-f(a)\sin na\right)$$

קיים $M>0$ כך ש $|f'|\le M$ כי f' רציפה ב$[a,b]$ ולכן נקבל כי

$$\left|\int_a^b f'(t)\sin nt\mathrm{d}t\right|\le\int_a^b|f'(t)|\cdot|\sin nt|\,\mathrm{d}t\le M(b-a)$$

מכאן $a_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$. (למעשה: $|a_n|\le\frac{c}{n}$) ■

מסקנה 5.4

באופן דומה ניתן להראות שאם $f(a)=f(b)=0$ וf גזירה פעמיים ברציפות אז $a_n\le\frac{c}{n^2}$

5.1.1 פולינומי טיילור

משפט 5.5 טיילור

בהינתן f גזירה n פעמים בקטע $[a,b]$ובהינתן $x_0\in(a,b)$. פולינום טיילור מסדר n של f סביב הנקודה x_0 הוא פולינום P_n מדרגה $\le n$ כך ש:

$$f(x_0)=P_n(x_0)\,,\ f'(x_0)=P_n'(x_0)\,,\ldots,\ f^{(k)}(x_0)=P_n^{(k)}(x_0)$$

לכל $0\le k\le n$. הטענה: פולינום טיילור קיים ויחיד והוא ניתן ע"י הנוסחה:

$$P_n(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\cdot(x-x_0)^n$$

הוכחה: הוכחנו באינפי 1. ■

שארית הפולינום נרצה לקבל הצגה של השארית $R_n(x)$ כאשר R_n מוגדרת ע"י

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x)$$

נשים לב כי:

$$f(x)=f(x_0)+(f(x)-f(x_0))=f(x_0)+\int_{x_0}^{x}f'(t)\,\mathrm{d}t$$

נבצע אינטגרציה בחלקים ונקבל:

$$\int_{x_0}^{x} \overbrace{f'(t)}^{h} \cdot \overbrace{1}^{g'} \mathrm{d}t = -\int_{x_0}^{x} f''(t) \cdot (t+c)\,\mathrm{d}t + f'(t)(t+c)\Big|_{x_0}^{x}$$

$$g' = 1 \quad g(t) = t + c$$

נבחר $c = -x$ ונקבל:

$$\int_{x_0}^{x} f'(t)\,\mathrm{d}t = -\int_{x_0}^{x} f''(t)(t-x)\,\mathrm{d}t - f'(x_0)(x_0 - x) =$$

$$\int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t) + f'(x_0)(x - x_0)$$

נסכם עד עתה:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \int_{x_0}^{x} f''(t)(x-t)\,\mathrm{d}t$$

נבצע שוב אינטגרציה בחלקים ונקבל כי:

$$\int_{x_0}^{x} \overbrace{f''(t)}^{g} \overbrace{(x-t)}^{h'} \mathrm{d}t = -\int_{x_0}^{x} f'''(t) \cdot \left(-\frac{1}{2}(x-t)^2\right) \mathrm{d}t + f''(t)\left(-\frac{1}{2}\left(x - t^2\right)\right)\Bigg|_{x_0}^{x} =$$

$$\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} f'''(t)(x-t)^2\,\mathrm{d}t + \frac{1}{2} f''(x_0)(x - x_0)^2$$

ולכן כעת:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x} f'''(t)(x-t)^2\,\mathrm{d}t$$

באופן כללי נקבל:

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

כאשר

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \cdot \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t) \cdot (x-t)^n\,\mathrm{d}t$$

מספיק להניח שf גזירה $n+1$ פעמים ו $f^{(n+1)}$ אינטגרבילית.

נוכיח באינדוקציה. **הוכחה:** נניח שהטענה נכונה עבור $k \leq n$ נוכיח שהטענה נכונה עבור $k = n+1$.

$$f(x) = P_{n+1}(x) + R_{n+1}(x)$$

כאשר R_{n+1} ניתנת ע"י הנוסחה $R_n(x)=\frac{1}{n!}\cdot\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\cdot(x-t)^n\,\mathrm{d}t$. אנו מניחים:

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x)$$

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\cdot\int\limits_{x_0}^{x}\overbrace{f^{(n+1)}(t)}^{g}\cdot\overbrace{(x-t)^n}^{h'}\mathrm{d}t=$$

$$-\frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+2)}(t)\left(-\frac{1}{n+1}(x-t)^{n+1}\right)\mathrm{d}t+\frac{1}{n!}f^{(n+1)}\left(-\frac{1}{n+1}(x-t)^{n+1}\right)\Bigg|_{x_0}^{x}=$$

$$\frac{1}{(n+1)!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}\mathrm{d}t+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0)\cdot(x-x_0)^{n+1}$$

ולכן לפי עקרון האינדוקציה מנכונות הבסיס והצעד, הטענה נכונה לכל $1\leq k\leq n$ כאשר $k\in\mathbb{N}$. ■

וקיבלנו כי:

$$f(x)=P_n(x)+R_n(x)=$$

$$P_n(x)+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(x_0)(x-x_0)^{n+1}+\frac{1}{(n+1)!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+2)}(t)(x-t)^{n+1}\mathrm{d}t=$$

$$P_{n+1}+R_{n+1}(x)$$

מסקנה 5.6 הצגת השארית בצורת לגרנז'

אם f גזירה ברציפות $n+1$ פעמים, לכל x קיים c בין x_0 ל-x כך ש:

$$f(x)=P_n(x)+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)(x-x_0)^{n+1}$$

הוכחה: ראינו:

$$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)\cdot(x-t)^n\,\mathrm{d}t$$

נעזר במשפט הערך הממוצע. אם $g\geq 0$ אינטגרבילית ו-h רציפה אז קיים $c\in\mathbb{R}$, $a\leq c\leq b$ כך ש:

$$h(c)\int\limits_a^b g(t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_a^b h(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

במקרה שלנו $0\leq g(t)=(x-t)^n$ קיימת נקודה $c\in[x_0,x]$ כך ש

$$\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(c)\cdot\int\limits_{x_0}^{x}(x-t)^n\,\mathrm{d}t=\frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,\mathrm{d}t$$

אגף שמאל שלנו שווה ל:

$$\frac{1}{n!}f^{(n+1)}\left(c\right)\left(-\frac{1}{n+1}\left(x-t\right)\right)^{n+1}\Bigg|_{x_0}^{x}=\frac{1}{\left(n+1\right)!}f^{(n+1)}\left(c\right)\cdot\left(x-x_0\right)^{n+1}$$

וזוהי הצגת לגרנז' כנדרש. ■

מסקנה 5.7

גם הצגת קושי היא מקרה פרטי:

$$\frac{1}{n!}\int\limits_{x_0}^{x}f^{(n+1)}\left(t\right)\left(x-t\right)^{n}\mathrm{d}t=\frac{1}{n!}\left(x-x_0\right)f^{(n+1)}\left(c\right)\left(x-c\right)^{n}$$

גם כאן, לפי משפט ערך הממוצע.

הערה 5.8 הצגת לגרנז' נכונה גם במקרה ש f גזירה $n+1$ פעמים (ללא הנחה על רציפות הנגזרת ה$n+1$)

09/03/11

5.2 החלפת משתנים

משפט 5.9 החלפת משתנים

בהינתן f פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$. ובהינתן $\phi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ פונקציה כך ש ϕ רציפה ובעלת נגזרת רציפה. $\phi\left(\alpha\right)=a,\ \phi\left(\beta\right)=b$. אזי:

$$\int\limits_{a}^{b}f\left(t\right)\mathrm{d}t\underset{"t=\phi(s)"}{=}\int\limits_{\alpha}^{\beta}f\left(\phi\left(s\right)\right)\phi'\left(s\right)\mathrm{d}s$$

הוכחה: תהי$F\left(t\right)$ פונקציה קדומה של f (F קיימת לפי המשפט היסודי). נגדיר: $G\left(s\right):=F\left(\phi\left(s\right)\right)$. $G:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ נשים לב כי:

$$G'\left(s\right)=F'\left(\phi\left(s\right)\right)\cdot\phi'\left(s\right)=f\left(\phi\left(s\right)\right)\phi'\left(s\right)$$

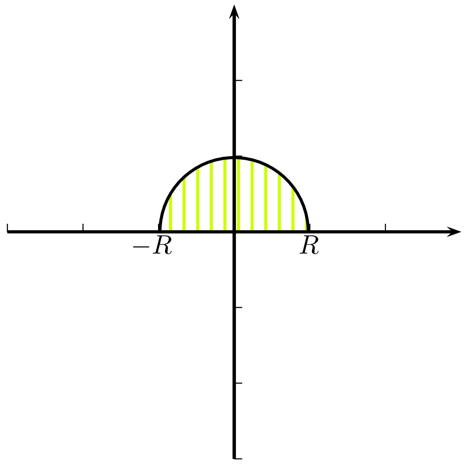
ולכן, לפי הנוסחה היסודית אנו יודעים כי: (נשים לב כי G' אינטגרבילית כי היא רציפה כהרכבה של פונקציות רציפות).

$$\int\limits_{\alpha}^{\beta}f\left(\phi\left(s\right)\right)\phi'\left(s\right)\mathrm{d}s=\int\limits_{\alpha}^{\beta}G'\left(s\right)\mathrm{d}s=G\left(\beta\right)-G\left(\alpha\right)=$$

$$F\left(\phi\left(\beta\right)\right)-F\left(\phi\left(\alpha\right)\right)=F\left(b\right)-F\left(a\right)=\int\limits_{a}^{b}f\left(t\right)\mathrm{d}t$$

■

דוגמה 5.10 חשבו שטח של $\frac{1}{2}$ עיגול ברדיוס R.



$$f(t)=\sqrt{R^2-t^2}$$

$$\int\limits_{-R}^{R}\sqrt{R^2-t^2}\mathrm{d}t=-\int\limits_{\pi}^{0}\sqrt{R^2-R^2\cos^2 s}R\sin s\mathrm{d}s$$

כיוון שבצענו $t=R\cos s$ ולכן אנחנו מקבלים כי $\mathrm{d}t=-R(\sin s)\,\mathrm{d}s$. כמו כן נשים לב כי הטווח כעת הוא: $0\le s\le\pi$.

$$=\int\limits_{0}^{\pi}R^2\sqrt{\sin^2 s}\sin s\mathrm{d}s=R^2\int\limits_{0}^{\pi}\sin^2 s\mathrm{d}s$$

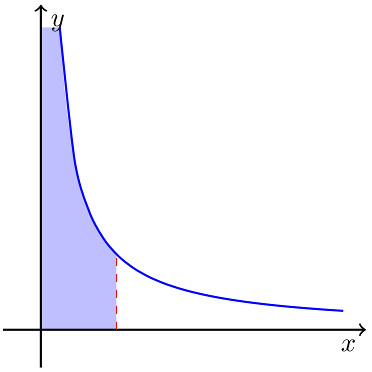
נזכור כי $\sin^2 s=\frac{1-\cos 2s}{2}$ ולכן נקבל:

$$=R^2\int\limits_{0}^{\pi}\frac{1-\cos 2s}{2}\mathrm{d}s=R^2\left(\frac{1}{2}s-\frac{\sin 2s}{4}\right)\Bigg|_{s=0}^{s=-\pi}=\frac{1}{2}\pi R^2$$

6 אינטגרלים לא אמיתיים

נרצה להגדיר אינטגרלים של פונקציות לא חסומות ואינטגרלים של פונקציות המוגדרות על קטע אינסופי.

דוגמה 6.1 $\frac{1}{x}$ בקטע $(0,1]$



הגדרה 6.2

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x := \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

הערה 6.3 ראינו שסכומי רימן של הפונקציה $\frac{1}{x}$ בקטע $[0,1]$ לא מתכנסים (כי הפונקציה לא חסומה).

נחשב את הגבול:

$$\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln x|_\varepsilon^1 = -\ln\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \infty$$

קיבלנו שהגבול $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ לא קיים. ולכן נאמר ש $\int_0^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ לא קיים.

הערה 6.4 נוכיח שוב כי $\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x \lim_{\varepsilon\to 0}$ הוא אינסוף בלי להשתמש ב-ln.

$$\int_{\delta}^{2\delta}\frac{1}{x}\mathrm{d}x \geq \int_{\delta}^{2\delta}\frac{1}{2\delta}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\delta}\cdot\delta = \frac{1}{2}$$

לכן, עבור כל δ קטן אשר לא יהיה, נקבל כי האינטגרל גדול מחצי. ולכן:

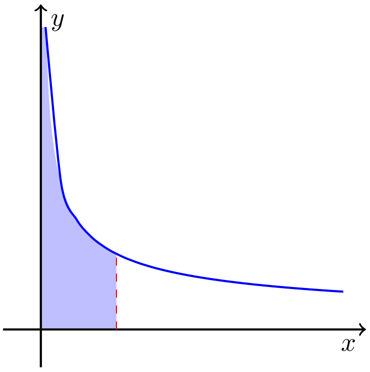
$$\int_{\frac{1}{2^n}}^{1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{1}{2^k}}^{\frac{1}{2^{k-1}}}\frac{1}{x}\mathrm{d}x \geq \frac{1}{2}n$$

ולכן אנו מקבלים כי:

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{2^n}}^{1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x = \infty$$

ולכן האינטגרל מתבדר.

דוגמה 6.5 $\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ (גם כאן, סכומי רימן אינם מתכנסים).



נביט בגבול:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0} 2\sqrt{x}\Big|_{\varepsilon}^{1} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(2-2\sqrt{\varepsilon}\right) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 2$$

ולכן קיבלנו כי האינטגרל של $\int_{0}^{1}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ מתכנס ושווה ל-2.

דוגמה 6.6 דוגמה כללית יותר: $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x$

כאשר $\alpha < 1$: (נשים לב כי $\frac{1}{x^\alpha} < \frac{1}{x}$ בקטע $(0,1)$)

$$0<\alpha<1 \qquad \int\limits_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x = \frac{1}{-\alpha+1}x^{-\alpha+1}\Big|_\varepsilon^1 = \frac{1}{1-\alpha}\left(1-\varepsilon^{1-\alpha}\right) \underset{\substack{\varepsilon\to 0\\(1-\alpha>0)}}{\longrightarrow} \frac{1}{1-\alpha}$$

ולכן, עבור $\alpha < 1$ האינטגרל $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ מתכנס.

כאשר $\alpha > 1$: (נשים לב כי $\frac{1}{x^\alpha} > \frac{1}{x}$ בקטע $(0,1)$)

$$\int\limits_\varepsilon^1 \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x \geq \int\limits_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\mathrm{d}x \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \infty$$

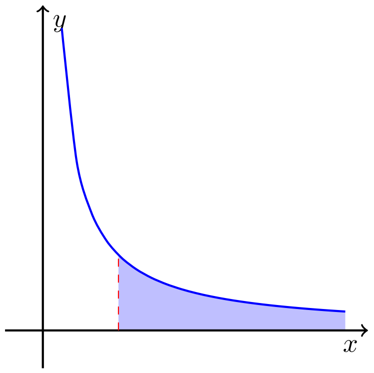
ולכן $\int\limits_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ לא קיים.

הערה 6.7 בהינתן f פונקציה אינטגרבילית בקטע $[a,b]$. האינטגרל $\int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ הוגדר בשתי צורות שונות:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

כיוון שהאינטגרל של פונקציה הוא פונקציה רציפה (לפי המשפט היסודי) השיוויון הנ"ל נכון.

דוגמה 6.8 $\frac{1}{x^\alpha}$ בקטע $[1,\infty)$



$$\int\limits_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x := \lim_{N\to\infty}\int\limits_1^N \frac{1}{\mathrm{x}^\alpha}\mathrm{d}x$$

במקרה של $\alpha = 1$:

$$\int_1^N \frac{1}{x}\mathrm{d}x \underset{x=\frac{1}{y},\ \mathrm{d}x=-\frac{1}{y^2}\mathrm{d}y}{=} \int_1^{\frac{1}{N}} y\left(-\frac{1}{y^2}\right)\mathrm{d}y = \int_{\frac{1}{N}}^1 \frac{1}{y}\mathrm{d}y \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

ולכן $\int_1^\infty \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ לא קיים.

עבור $\alpha > 1$: $\frac{1}{x^\alpha}$ בקטע $[1,\infty)$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha-1}x^{-\alpha+1}\Big|_1^N = \frac{1}{1-\alpha}\left(N^{1-\alpha}-1\right) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\alpha-1}$$

אותו חישוב מראה כי עבור $\alpha < 1$ האינטגרל $\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ מתבדר.

6.1 קריטריונים להתכנסות אינטגרלים לא אמיתיים

משפט 6.9 קריטריון קושי להתכנסות אינטגרלים

בהינתן f פונקציה המוגדרת בקטע $[0,\infty)$ אינטגרבילית בכל קטע $[a,b]$ סופי. אזי האינטגרל $\int_a^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$ מתכנס אם"ם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $a < N$ כך שלכל $N < c < d$ מתקיים:

$$\left|\int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon$$

תרגיל: להוכיח את קריטריון קושי להתכנסות אינטגרלים

משפט 6.10 השוואה

בהינתן $f,g \geq 0$ פונקציות בקטע $[0,\infty)$ אשר אינטגרביליות בכל קטע סופי ומתקיים $0 \leq f \leq g$ אזי:

1. אם $\int_a^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$ מתבדר אז גם $\int_a^\infty g(t)\,\mathrm{d}t$ מתבדר.
2. אם $\int_a^\infty g(t)\,\mathrm{d}t$ מתכנס אז גם $\int_a^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$ מתכנס.

הוכחה:

.1

$$\lim_{N\to\infty}\int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t = \infty$$

אבל כיוון ש $f \geq g$ אזי:

$$\int_a^N g(t)\,\mathrm{d}t \geq \int_a^N f(t)\,\mathrm{d}t \longrightarrow \infty$$

ולכן:

$$\lim_{N\to\infty}\int_a^N g(t)\,\mathrm{d}t = \infty$$

2. נעזר בקריטריון קושי. יהי $\varepsilon > 0$. קיים $N > a$ כך ש:

$$\left|\int_c^d g(t)\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon$$

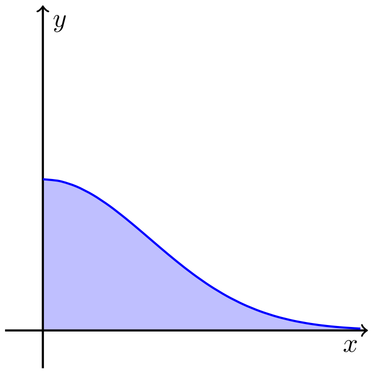
לכל $c, d > 0$. וכיוון ש $f \leq g$ אזי:

$$\left|\int_c^d f(t)\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon$$

הערה 6.11 בסעיף 2 אפשר להשתמש במונוטוניות של $\int_a^N f(t)\,\mathrm{d}t$ כפונקצייה של N כדי להסיק את הנדרש ישירות מסעיף 1.

■

דוגמה 6.12 $\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$



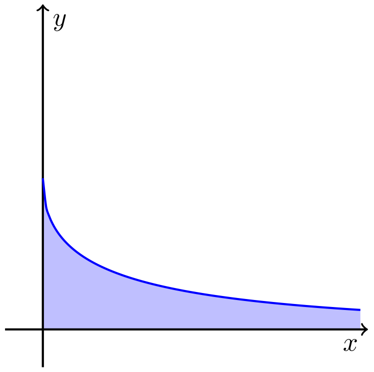
נשים לב כי לכל $x \geq 1$ מתקיים:

$$e^{-x^2} \leq e^{-x}$$

$$\int\limits_0^\infty e^{-x}\mathrm{d}x = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 1$$

ולכן $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x$ מתכנס.

דוגמה 6.13 $\int\limits_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ בקטע $[0,\infty)$



קיים $N > 0$ כך $e^{-\sqrt{x}} \leq \frac{1}{x^2}$ לכל $x > N$. ולכן:

$$\int\limits_N^\infty e^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x \leq \int\limits_N^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x < \infty$$

ולכן $\int\limits_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ מתכנס.

דוגמה 6.14 $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1+x}}$$

$\sqrt{1+x}$ בסביבת 1 שואף ל$\sqrt{2}$. לכן קיים קבוע c כך ש: $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \leq \frac{c}{\sqrt{1-x}}$.

לדוגמה: עבור $\frac{1}{2} < x < 1$ נקבל כי:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1+x}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x}\cdot\sqrt{1\frac{1}{2}}}$$

נשים לב כי:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\mathrm{d}x \underset{y=1-x}{=} \int_1^0 \frac{1}{\sqrt{y}}\left(-\mathrm{d}y\right) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y}}\mathrm{d}y < \infty$$

ולכן $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x < \infty$.

דוגמה 6.15 מה קורה עם האינטגרל של: $\int_0^\infty \sin x\mathrm{d}x$?

$$\int_0^\infty \sin x\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty}\int_0^N \sin x\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty} -\cos x|_0^N = 1-\cos N \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \text{Doesn't exist}$$

משפט 6.16

תהיינה $f\geq 0, g>0$ בקטע $[a,\infty)$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)} = c > 0$$

אז $\int_a^\infty f\left(x\right)\mathrm{d}x$ קיים אס"ם $\int_a^\infty g\left(x\right)\mathrm{d}x$ קיים.

הוכחה: קיים $N>0$ כך ש

$$\forall x>N \quad \left|\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}-c\right| < \frac{c}{2} \Rightarrow -\frac{c}{2} < \frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)} - c < \frac{c}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}c < \frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)} < \frac{3}{2}c$$

$$\frac{1}{2}cg\left(x\right) < f\left(x\right) < \frac{3}{2}cg\left(x\right)$$

עבור $x>N$ ולכן המשפט נובע ממשפט ההשוואה. ■

דוגמה 6.17 $\int_2^\infty \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$ (נשים לב כי: $\frac{c}{x^{1+\varepsilon}} \leq \frac{1}{x\ln x} \leq \frac{c}{x}$ $\forall\varepsilon>0$)

נציב $y=\ln x$ ונקבל ($\mathrm{d}y = \frac{1}{x}\mathrm{d}x \underset{x=e^y}{=} e^{-y}\mathrm{d}x$):

$$\int_2^\infty \frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x = \int_{\ln 2}^\infty \frac{1}{\cancel{e^y}y}\cancel{e^y}\mathrm{d}y = \int_{\ln 2}^\infty \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \infty$$

דוגמה 6.18 $\int\limits_2^\infty \frac{1}{x\left(\ln x\right)^2}\mathrm{d}x$ נשים לב כי: $\frac{c}{x^{1+\varepsilon}} \le \frac{1}{x(\ln x)^2}$ $\forall\varepsilon > 0$. נציב $y=\ln x$ נקבל:

$$= \int\limits_{\ln 2}^\infty \frac{1}{\cancel{e^y}y^2}\cancel{e^y}\mathrm{d}y$$

ואנו יודעים כי הביטוי הנ"ל מתכנס.

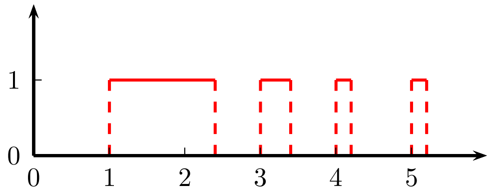
מסקנה 6.19

> הביטוי $\int\limits_2^\infty \frac{1}{x\left(\ln x\right)^\alpha}\mathrm{d}x$ מתכנס אס"ם $\alpha > 1$.

שאלה נניח ש $f \ge 0$ ו $\int\limits_1^\infty f\left(t\right)\mathrm{d}t$ מתכנס. מה אפשר להגיד על f?

דוגמה 6.20

$$f\left(t\right) = \begin{cases} 1 & n \le x \le n + \frac{1}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$



נשים לב שהמלבנים הולכים וקטנים.

$$N \in \mathbb{N} \qquad \int\limits_1^{N+\frac{1}{2}} f\left(x\right)\mathrm{d}\left(x\right) = \text{Area of rectangles} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2}$$

נראה ש $\lim\limits_{N\to\infty}\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2}$ קיים וסופי. נתבונן בפונקציה $\frac{1}{x^2}$ ונשים לב כי:

$$\sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} = 1 + \sum_{k=2}^N \frac{1}{k^2} \le 1 + \int\limits_1^N \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \tag{1}$$

ולכן קיבלנו:

$$S_{N'} = \sum_{k=1}^N \frac{1}{k^2} \le 1 + \int\limits_1^N \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x \le 1 + \int\limits_1^\infty \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \underbrace{c}_{=2} < \infty$$

נשים לב כי c לא תלוי בN! ולכן:

$$\forall N\in\mathbb{N}\quad S_N\le 2$$

כמו כן, הפונקציה היא אי שלילית לכן S_N מונוטונית עולה ולכן $\lim S_N$ קיים וסופי.

לסיכום: קיבלנו כי $\int\limits_1^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$ מתכנס אבל למרות ש f לא שואפת לאפס וגם $f\ge 0$.

הסבר לאי שיוון 1:

$$\frac{1}{(k+1)^2}=\int\limits_k^{k+1}\frac{1}{(k+1)^2}\mathrm{d}x\le\int\limits_k^{k+1}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\le\int\limits_k^{k+1}\frac{1}{k^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{k^2}$$

ולכן:

$$\int\limits_1^N\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{N-1}\int\limits_k^{k+1}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\ge\sum_{k=1}^{N-1}\frac{1}{(k+1)^2}=\sum_{l=2}^{N}\frac{1}{l^2}$$

דוגמה 6.21 דוגמה בה הפונקציה גם לא חייבת להיות חסומה:

$$f(x)=\begin{cases}n & n\le x\le n+\frac{1}{n^3}\\ 0 & \text{else}\end{cases}$$

במקרה זה השטח של כל מלבן יהיה עדיין $\frac{1}{n^2}$. ולכן כמו קודם $\int\limits_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ מתכנס למרות ש f לא חסומה.

דוגמה 6.22 מה נוכל לומר על: $\int\limits_1^\infty\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x$?

נתבונן על האינטגרל בקטע:

$$k\in\mathbb{N}\qquad\int\limits_{2\pi k}^{2\pi k+\pi}\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x\underset{\forall x\in[2\pi k,2\pi k+\pi]\ \sin x\ge 0}{=}\int\limits_{2\pi k}^{2\pi k+\pi}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\ge$$

$$\int\limits_{2\pi k}^{2\pi k+\pi}\frac{\sin x}{2\pi k+\pi}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi k+\pi}\int\limits_{2\pi k}^{2\pi k+\pi}\sin x\mathrm{d}x=\frac{2}{2\pi k+\pi}\ge\frac{2}{2\pi k+2\pi}=\frac{1}{\pi(k+1)}$$

$$\int\limits_{2\pi}^{2\pi N+2\pi}\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{2\pi k}^{2\pi k+2\pi}\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x\ge\sum_{k=1}^{N}\int\limits_{2\pi k}^{2\pi k+\pi}\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x\ge$$

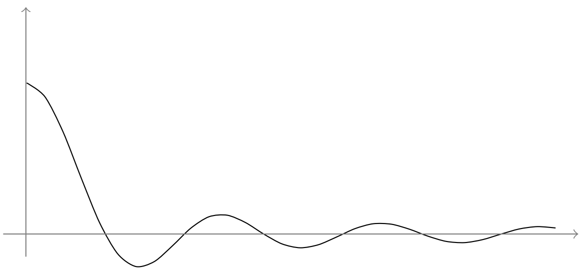
$$\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\pi(k+1)}=\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k+1}$$

ולכן:

$$\int_{1}^{2\pi N+2\pi}\frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x\geq\frac{1}{\pi}\sum_{l=2}^{N+1}\frac{1}{l}\geq\frac{1}{\pi}\int_{2}^{N+2}\frac{1}{x}\mathrm{d}x\underset{N\to\infty}{\longrightarrow}\infty$$

לסיכום האינטגרל הנ"ל מתבדר.

דוגמה 6.23 $\int_{1}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$.



נראה התכנסות בעזרת אינטגרציה בחלקים:

$$\int_{1}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

$$\begin{aligned} f'(x)&=\sin x & f(x)&=-\cos x\\ g(x)&=\frac{1}{x} & f'(x)&=-\frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

$$\int_{1}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=-\int_{1}^{\infty}(-\cos x)\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x+\left(-\frac{\cos x}{x}\right)\Big|_{1}^{\infty}=$$

$$-\int_{1}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x+\cos 1$$

נשים לב כי $\int_{1}^{\infty}\frac{\cos x}{x^2}\mathrm{d}x$ מתכנס כי :

$$\frac{|\cos x|}{x^2}\leq\frac{1}{x^2}$$

והרי: $\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ קיים.

לכן קיבלנו כי: $\int_{1}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ מתכנס.

הגדרה 6.24 התכנסות בתנאי: נאמר ש $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ **<u>מתכנס בתנאי</u>** אם $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ מתכנס ו $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x$ מתבדר.

הגדרה 6.25 התכנסות בהחלט: נאמר ש $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ **<u>מתכנס בהחלט</u>** אם $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x$ מתכנס.

טענה 6.26

אם $\int\limits_a^\infty |f(x)|\,\mathrm{d}x$ מתכנס אז $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ מתכנס.

הוכחה: נעזר בקריטריון קושי.
יהי $\varepsilon > 0$ נתון. קיים $N > 0 \ni \mathbb{N}$ כך שלכל $c, d > N$ מתקיים:

$$\int\limits_c^d |f(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon$$

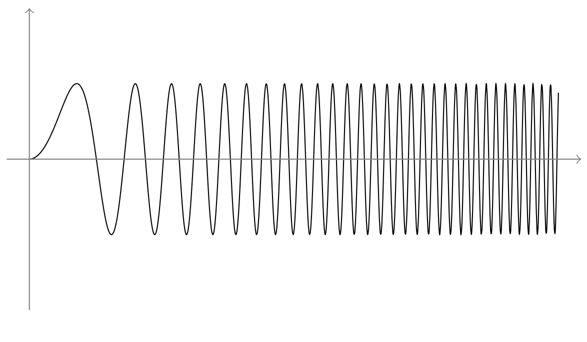
נקבל כי:

$$\left|\int\limits_c^d f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int\limits_c^d |f(x)|\,\mathrm{d}x < \varepsilon$$

ולכן לפי קריטריון קושי $\int\limits_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ מתכנס. ■

דוגמה 6.27 (מאופטיקה, Fresnel)

$$\int\limits_0^\infty \sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x$$



נציב: $y = x^2$ $x = \sqrt{y}$ נשים לב כי: $\mathrm{d}y \frac{1}{2\sqrt{y}} = \mathrm{d}x$ נקבל:

$$\int_1^\infty \sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{\sin y}{2\sqrt{y}}\mathrm{d}y$$

מתכנס, בעזרת אינטגרציה בחלקים.
ובאופן כללי יותר: הביטוי הנ"ל מתכנס לכל $\alpha > 0$.

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^\alpha}\mathrm{d}x = -\int_1^\infty \left(-\cos x\right)\left(-\alpha x^{-\alpha-1}\right)\mathrm{d}x + \left.\left(\frac{-\cos x}{x^\alpha}\right)\right|_1^\infty = -\int_1^\infty \frac{\alpha\cos x}{x^{\alpha+1}}\mathrm{d}x + \cos 1$$

אנו יודעים כי $\frac{1}{x^{\alpha+1}} \le \frac{|\cos x|}{x^{\alpha+1}}$ ו: $\int_1^\infty \frac{1}{x^{\alpha+1}}\mathrm{d}x$ מתכנס. כיוון ש $\int_1^\infty \frac{|\cos x|}{x^{\alpha+1}}\mathrm{d}x$ מתכנס אזי גם $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^{\alpha+1}}\mathrm{d}x$ מתכנס לפי הטענה.

טענה 6.28

בהינתן f פונקציה רציפה ובהינתן F פונקציה קדומה של f ($F' = f$). בהינתן $\alpha > 0$ אזי אם F חסומה האינטגרל $\int_1^\infty \frac{f(x)}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ מתכנס.

הוכחה: הוכחה בעזרת אינטגרציה בחלקים. ■

דוגמה 6.29 $\int_1^\infty x\sin x^3\mathrm{d}x$ פונקציה מתנדנדת לא חסומה. נציב $y = x^3$ ולכן $x = y^{\frac{1}{3}}$ וכמו כן $\mathrm{d}x = \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}\mathrm{d}y$.

$$\int_1^\infty x\sin\left(x^3\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int_1^\infty y^{\frac{1}{3}}\sin\left(y\right)\left(y^{-\frac{2}{3}}\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\int_1^\infty \frac{\sin y}{y^{\frac{1}{3}}}\mathrm{d}y$$

מתכנס.

6.1.1 פונקציית גאמא

דוגמה 6.30 (פונקציית גאמא)

$$\mathbb{R} \ni n \ge 0 \quad \Gamma\left(n\right) = \int_0^\infty e^{-t}t^{n-1}\mathrm{d}t$$

נראה ש $\Gamma\left(n\right)$ קיים: נשים לב כי הפונקציה הנ"ל היא אי שלילית כיוון ש $e^{-t}t^{n-1} \ge 0$.
נשים לב כי לכל n קיים $M > 0$ כך שלכל $t > M$ מתקיים האי שיוויון:

$$e^{-t} \le \frac{1}{t^{n+1}}$$

$$e^{-t}\cdot t^{n-1}\leq\frac{1}{t^{n+1}}\cdot t^{n-1}=\frac{1}{t^{2}}$$

$\int\limits_a^\infty \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ קיים לכן $\Gamma\left(n\right)$ קיים.

$$\Gamma\left(1\right)=\int\limits_0^\infty e^{-t}\mathrm{d}t=1$$

$$\Gamma\left(n+1\right)=\int\limits_0^\infty\overbrace{e^{-t}}^{g'}\cdot\overbrace{t^{n}}^{f}\mathrm{d}t=-\int\limits_0^\infty nt^{n-1}\left(-e^{-t}\right)\mathrm{d}t+\left(-t^{n}e^{-t}\right)\Big|_0^\infty=$$

$$n\int e^{-t}\cdot t^{n-1}\mathrm{d}t=n\Gamma\left(n\right)$$

ולכן לכל $\mathbb{R}\ni n\geq 0$ מתקיים:

$$\Gamma\left(n+1\right)=n\Gamma\left(b\right)=\left(n-1\right)!$$

דוגמה 6.31 $F\left(x\right)=\int\limits_{-1}^x\sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t$ חשבו את $F'\left(0\right)$ (האם קיים?)

$$\frac{F\left(h\right)-F\left(0\right)}{h}=\frac{\int\limits_0^h\sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t}{h}$$

$$\frac{1}{h}\int\limits_0^h\sin\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\frac{1}{h}\int\limits_\infty^{\frac{1}{h}}\left(\sin\left(s\right)\right)\left(-\frac{1}{s^{2}}\right)\mathrm{d}s$$

$$h>0\quad t=\tfrac{1}{s}\quad \mathrm{d}t=-\tfrac{1}{s^2}\mathrm{d}s$$

$$=\frac{1}{h}\int\limits_{\frac{1}{h}}^\infty\frac{\sin s}{s^{2}}\mathrm{d}s$$

$$\lim_{h\to0^{+}}\frac{1}{h}\int\limits_{\frac{1}{h}}^\infty\frac{\sin s}{s^{2}}\mathrm{d}s=\lim_{x\to\infty}x\cdot\int\limits_x^\infty\frac{\sin s}{s^{2}}\mathrm{d}s$$

$$\int_x^{\infty} \overbrace{\underbrace{\frac{\sin s}{s^2}}_{g}}^{f'} \mathrm{d}s = -\int_x^{\infty} (-\cos s) \left(-\frac{2}{s^3}\right) \mathrm{d}s + \left.\frac{(-\cos s)}{s^2}\right|_x^{\infty}$$

$$\left|\int_x^{\infty} \frac{2\cos s}{s^3} \mathrm{d}s\right| \leq \int_x^{\infty} \frac{2}{s^3} \mathrm{d}s = \frac{c}{x^2}$$

$$\left|\frac{(-\cos s)}{s^2}\right|\Bigg|_x^{\infty} \leq \frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow \left|\int_x^{\infty} \frac{\sin s}{s^2} \mathrm{d}x\right| \leq \frac{d}{x^2}$$

כאשר $d \in \mathbb{R}$ קבוע.

$$\Rightarrow \left|x \cdot \int_x^{\infty} \frac{\sin s}{s^2}\right| \leq x \cdot \frac{d}{x^2} = \frac{d}{x} \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

מסקנה $F'(0) = 0$.

16/03/11

חלק II
טורים

7 טורים

תהי a_n סדרה נתונה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. נגדיר את סדרת הסכומים החלקיים של (a_n) ע"י:

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3,\ S_k = \sum_{i=1}^{k} a_i$$

הגדרה 7.1 התכנסות טורים: נאמר שהטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **מתכנס** אם סדרת הסכומים החלקיים $(S_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.
אם s_n לא מתכנסת נאמר שהטור **מתבדר**. אם אם $S_n = \pm\infty$ נאמר שהטור מתבדר לאינסוף.

דוגמה 7.2 $a_n = (-1)^n$. $S_{2n} = 0,\ S_{2n+1} = -1$ לכן סדרת הסכומים החלקיים היא: $-1, 0, -1, 0, -1, \ldots$ והרי זוהי סדרה שאינה מתכנסת. ולכן הטור הנ"ל מ תבדר.

דוגמה 7.3 $a_n = 2^{n-1}$ כלומר הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty} = 1, 2, 4, 8, 16, \ldots$. נשים לב כי: $S_n = 2^n - 1$. והרי זו סדרה ששואפת לאינסוף, ולכן הטור מתבדר לאינסוף.

דוגמה 7.4 הטור ההנדסי: $a_1 + a_1q + a_1q^2 + \ldots + a_1q^n$. נשים לב כי:

$$S_1 = a_1,\, S_2 = a_1 + a_1q, \ldots,\, S_n = a_1\left(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}\right)$$

$$qS_n = a_1\left(q + q^2 + \ldots + q^n\right) = a_1\left(1 + q + \ldots + q^{n-1}\right) - a_1 + a_1q^n = S_n - a_q + a_1q^n$$

$$S_n = \frac{a_1\left(1 - q^n\right)}{1 - q}$$

לכן אם $|q| < 1$ אז:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

אם $|q| \geq 1$ אז: אם $a_1 \neq 0$ הטור מתבדר. אם $a_1 = 0$ אזי הטור מתכנס.

דוגמה 7.5 $\frac{1}{1\cdot2} + \frac{1}{2\cdot3} + \frac{1}{3\cdot4} + \ldots$

$$S_1 = \frac{1}{2},\, S_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3},\, S_3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}$$

באופן כללי נשים לב כי:

$$\frac{1}{k\left(k+1\right)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

ולכן:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\left(k+1\right)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

ולכן:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\left(k+1\right)} = 1$$

דוגמה 7.6 $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots$

$$s_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

הערה 7.7 בהינתן סדרה (S_n) נוכל לבנות סדרה (a_n) כך ש (S_n) היא סדרת הסכומים החלקיים של (a_n). לצורך כך נגדיר:

$$a_1 := s_1, \ldots, a_n = S_n - S_{n-1}$$

משפט 7.8 קריטריון קושי

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אס"ם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N > 0$ $\mathbb{N} \ni$ כך שלכל $m_2 \geq m_1 > N$ מתקיים:

$$\left| \sum_{n=m_1}^{m_2} a_n \right| < \varepsilon$$

הוכחה: נשים לב כי:

$$\sum_{n=m_1}^{m_2} a_n = S_{m_2} - S_{m_1}$$

ונפעיל את קריטריון קושי עבור הסדרה S_n. ■

מסקנה 7.9 תנאי הכרחי להתכנסות של טור

הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס, אז $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$ נתון. קיים $N > 0$ כך שלכל $n > N$ מתקיים:

$$|a_k| = \left| \sum_{k=n}^{n} a_k \right| < \varepsilon$$

הוכחה נוספת למסקנה:

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

הטור מתכנס, לכן כאשר $S_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} S$ נקבל לפי אריתמטיקה של גבולות כי:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

■

הערה 7.10 התנאי אינו תנאי מספיק להתכנסות הטור. לדוגמה ראינו כי הטור:

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots$$

מתבדר.

7.1 הזנב של טור

תהי (a_n) סדרה נתונה. נביט בסדרה החל מהאיבר ה$m+1$. כלומר:

$$a_{m+1}, a_{m+2}, a_{m+3}, \ldots$$

ה m־זנב של (a_n) הוא הטור שמתאים לסדרה $(a_{m+k})_{k=1}^{\infty}$. נסמנו:

$$r_m = a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots$$

משפט 7.11

אם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס אז כל זנב שלו גם כן מתכנס.

הוכחה: נסמן: $b_n := a_{m+n}$. נסמן ב T_n את סדרת הסכומים החלקיים של b_n. כלומר:

$$\begin{aligned} T_1 &= a_{m+1} \\ T_2 &= a_{m+1} + a_{m+2} \\ &\vdots \\ T_n &= a_{m+1} + \ldots + a_{m+n} = S_{m+n} - S_m \end{aligned}$$

נשים לב שכאשר $n \to \infty$ נקבל כי:

$$T_n = S_{m+n} - S_m \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} S - S_m$$

(S הוא סכום הטור המקורי). ולכן קיבלנו כי:

$$T_n \to S - S_n$$

$$r_m = \lim_{n\to\infty} T_n = S - S_n$$

■

משפט 7.12

אם קיים זנב מתכנס לטור אז הטור כולו מתכנס

הוכחה: יהי r_m m־זנב מתכנס. ראינו כי: $T_n = S_{m+n} - S_m$ ולכן:

$$S_{m+n} = T_n + S_m \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} r_m + S_m$$

לכן הסדרה S_n מתכנסת. ■

מסקנה 7.13

שינוי/הוספה/הורדה של מספר סופי של איברים בטור לא משנה את ההתכנסות שלו.

הוכחה: במידה וביצענו שינוי סופי, אזי קיים m־זנב שאותו לא שינינו. ולכן הוא עדיין מתכנס, ומכאן שכל הטור עדיין מתכנס. ■

משפט 7.14

אם הטור מתכנס, נביט בסדרת הזנבות $(r_m)_{m=1}^{\infty}$, אזי $0 \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} r_m$. במילים אחרות:

$$\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{k=m+1}^{\infty} a_k\right) = 0$$

הוכחה: ראינו כי $r_m = S - S_m$ ולכן:

$$\lim_{n\to\infty}(S - S_m) = S - S = 0$$

■

דוגמה 7.15 ראינו כבר כי:

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots = 1$$

$r_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ ה־m־זנב. נסמן ב T את סדרת הסכומים החלקיים של r_m.

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{(m+1)(m+2)} \\
T_2 &= \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \frac{1}{(m+2)(m+3)} = \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+3} \\
&\vdots \\
T_n &= \frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{m+1}
\end{aligned}$$

$$r_m = \frac{1}{m+1} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

7.2 אריתמטיקה של טורים

משפט 7.16

אם $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ו־$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ מתכנסים אזי גם: $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ מתכנס ומתקיים:

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

הוכחה: נסמן $c_k = a_k + b_k$ את סדרות הסכומים החלקיים נסמן ב $\underbrace{R_n}_{c_n}, \underbrace{T_n}_{b_n}, \underbrace{S_n}_{a_n}$. נשים לב כי:

$$R_n = S_n + T_n$$

כיוון ש T_n וS_n הן סדרות מתכנסות, אזי לפי אריתמטיקה של גבולות בסדרות גם R_n היא סדרה מתכנסת ומתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} S_n + \lim_{n\to\infty} T_n = S + T$$

■

משפט 7.17

יהי $c \in \mathbb{R}$ ויהי $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ טור מתכנס. אז: $\sum_{k=1}^{\infty} (c \cdot a_k)$ מתכנס ומתקיים:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

הוכחה: נגדיר את הסדרה $b_n = c$.... ■

7.3 טורים חיוביים

הגדרה 7.18 טור חיובי: נאמר שהטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ חיובי אם $\forall k\ a_k \geq 0$.

7.3.1 תנאי התכנסות

משפט השוואה

משפט 7.19 משפט ההשוואה

יהיו $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ו־$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ טורים חיוביים ונניח כי $a_k \leq b_k$ לכל $k > N$. אם $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ מתכנס אזי גם $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס. ואם $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתבדר אזי גם $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ מתבדר.

הוכחה: נניח כי $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ מתכנס ולכן גם $\sum_{k=N+1}^{\infty} b_k$ מתכנס (לפי משפט קודם). מספיק להראות כי $\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k$ מתכנס.

סדרת הסכומים החלקיים של הטור $\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k$ היא מונוטונית לא־יורדת. נראה שהיא חסומה.

אנו יודעים כי קיים $B \in \mathbb{R}$ כך שחוסם מלמעלה את סדרת הסכומים החלקיים של $\sum_{k=N+1}^{\infty} b_k$ (כי סדרת הסכומים החלקיים מתכנסת, ולכן חסומה). נשים לב כי:

$$a_{N+1} + a_{N+2} + \ldots + a_{N+n} \leq b_{N+1} + \ldots + b_{N+n} \leq B$$

ולכן קיבלנו שסדרת הסכומים החלקיים של $\sum_{k=N+1}^{\infty} a_k$ מונוטונית וחסומה ולכן מתכנסת.

לסיום אם הזנב ה־N־י מתכנס את הטור כולו מתכנס. ■

תרגיל: החלק השני של ההוכחה.

הערה 7.20 טור חיובי מתכנס או מתבדר לאינסוף כי סדרת הסכומים החלקיים היא מונוטונית.

דוגמה 7.21 $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 8}+\frac{1}{4\cdot 16}+\ldots$ למעשה זהו הטור: $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot 2^k}$ נשים לב כי: $\frac{1}{k\cdot 2^k}\leq\frac{1}{2^k}$ וכי $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}$ מתכנס (טור הנדסי עם מנה $\frac{1}{2}$) ולכן $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot 2^k}$ מתכנס.

משפט ההשוואה השני

משפט 7.22 משפט השוואה II

תהיינה (a_n) ו־(b_n) סדרות חיוביות אשר מקיימות $L \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{a_n}{b_n}$. אז $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ מתכנס אס"ם $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$ מתכנס.

הוכחה: קיים $N>0$ כך שלכל $n>N$:

$$\begin{aligned}-\frac{L}{2} &< \frac{a_n}{b_n}-L < \frac{L}{2}\\ \frac{L}{2}b_n &< a_n < \frac{3L}{2}b_n\end{aligned}$$

כעת פי משפט ההשוואה הראשון ואריתמטיקה של טורים נקבל כי a_n מתכנס. ■

דוגמה 7.23 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ כבר ראינו כי $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\left(k+1\right)}$ מתכנס. נבחין כי:

$$\frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n(n+1)}}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}1>0$$

הערה 7.24 הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$. אבל אין לנו את הכלים על מנת לחשב את זה כרגע.

מבחן השורש

משפט 7.25 מבחן השורש

תהי (a_n) סדרה חיובית. אם $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}<1$ אז הטור $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ מתכנס. ואם $\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}>1$ אז הטור $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ מתבדר.

הוכחה: נסמן $L = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$. נניח כי $L < 1$. נגדיר $q = \frac{1+L}{2}$ נקבל כי $L < q < 1$.
קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים: $\sqrt[n]{a_n} < q$ (מתוך ההגדרה של $\limsup$ כגבול חלקי מקסימלי). ולכן $a_n < q^n$. כיוון ש $q < 1$ אנו יודעים כי הטור של q^n מתכנס, ולכן לפי משפט ההשוואה גם $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס.

<u>הוכחת בידור:</u>
$\limsup \sqrt[n]{a_n} = q$ קיימת תת סידרה של $\sqrt[n]{a_n}$ עם גבול חלקי של לפחות q.
יהי $\varepsilon > 0$ כך ש $q - \varepsilon > 1$:

$$\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} q$$

קיים K כך שלכל $k > K$ מתקיים: $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} > q - \varepsilon$.

$$\forall k > K \ a_{n_k} > (q-\varepsilon)^{n_k} > 1$$

מצאנו תת סדרה של a_n שגדולה מ1. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר כי התנאי ההכרחי להתכנסות הוא $a_n \to 0$. ■

דוגמה 7.26 הטור $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ נשים לב כי:

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{n^{\frac{2}{n}}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

הטור מתכנס (הוכחנו אתמול) והמבחן לא אומר כלום.

דוגמה 7.27 הטור: $1 + 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$
הטור מתבדר ומבחן השורש מראה:

$$\sqrt[n]{a_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

כלומר, גם כאן מבחן השורש לא מוסיף לנו כלל מידע.

דוגמה 7.28 הטור: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{2}{\sqrt[n]{n!}}$$

נשים לב כי:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot \frac{n}{2} \cdot \ldots \cdot n \geq \underbrace{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \cdot \ldots \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}_{\frac{n}{2} \text{ times}} = \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right)^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor}$$

ולכן

$$\sqrt[n]{n!} = \frac{n^{\frac{1}{2}}}{2} \to \infty$$

ולכן:

$$\sqrt[n]{a_n} == \frac{2}{\sqrt[n]{n!}} \to 0 < 1$$

ולפי מבחן השורש $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n!}$ מתכנס.

מבחן המנה

משפט 7.29 מבחן המנה

תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חיובית. אם $1 > \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$ אז $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס. אם $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ אז $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

בפרט אם $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$ אז הטור הנ"ל מתכנס ואם $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ אז הטור מתבדר.

הוכחה: נוכיח בעזרת טענת עזר:

טענה 7.30

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \liminf \sqrt[n]{a_n} \le \limsup \sqrt[n]{a_n} \le \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

בפרט, אם $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to L$ אז $\sqrt[n]{a_n} \to L$ כי אז: $\limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = \liminf \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

הוכחה: נראה כי: $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} \le \liminf \sqrt[n]{a_n}$.

יהי $\varepsilon > 0$ נראה כי:

$$\liminf \sqrt[n]{a_n} \ge \liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} - \varepsilon$$

כלומר, צריך להוכיח כי כל גבול חלקי של $\sqrt[n]{a_n}$ הוא לפחות $\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} - \varepsilon$. קיים $0 < N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$

$$\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} - \varepsilon \le \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

$$a_n\left(\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} - \varepsilon\right) \le a_{n+1}$$

כלומר:

$$\begin{aligned}
a_N\left(\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} - \varepsilon\right) &\le a_{N+1} \\
a_{N+1}\left(\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} - \varepsilon\right) &\le a_{N+2} \\
&\vdots \\
a_{N+K-1}\left(\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} - \varepsilon\right) &\le a_{N+K}
\end{aligned}$$

או בכלליות: לכל $k > 0$ נקבל כי:

$$a_N\left(\liminf \frac{a_{n+1}}{a_n} - \varepsilon\right)^k \le a_{N+k}$$

ולכן:

$$\underbrace{a_N^{\frac{1}{N+k}}}_{\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}1}\cdot\underbrace{\left(\liminf\frac{a_{n+1}}{a_n}-\varepsilon\right)^{\frac{k}{N+k}}}_{\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}\liminf\frac{a_{n+1}}{a_n}-\varepsilon}\le\underbrace{\sqrt[N+k]{a_{N+k}}}_{\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}1}$$

מכאן שכל גבול חלקי של $\sqrt[N+k]{a_{N+k}}$ הוא לפחות $\liminf\frac{a_{n+1}}{a_n}-\varepsilon$. מכאן שכל גבול חלקי של $\sqrt[n]{a_n}$ הוא לפחות $\liminf\frac{a_{n+1}}{a_n}-\varepsilon$. הראינו שלכל $\varepsilon>0$ מתקיים $\liminf\frac{a_{n+1}}{a_n}-\varepsilon\le\liminf\sqrt[n]{a_n}$ ולכן:

$$\liminf\frac{a_{n+1}}{a_n}\le\liminf\sqrt[n]{a_n}$$

באופן סימטרי מוכיחים .

$$\limsup\sqrt[n]{a_n}\le\limsup\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

■

מסקנה ישירה מהטענה הנ"ל היא ההוכחה הנדרשת. ■

23/03/11

דוגמה 7.31 דוגמה לבמחן המנה ומבחן השורש:

$$\frac{1}{2}+1+\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{16}+\frac{1}{128}+\frac{1}{64}+\dots$$

נשים לב כי מדובר בסכום של 2 סדרות a_{2n},a_{2n+1} עם מנה $\frac{1}{4}$.

$$\liminf\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{8}$$
$$\liminf\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{2}$$

כיוון שעבור סדרה הנדסית ($a_n=a_0q^n$) נקבל: $\sqrt[n]{a_n}\to q$. במקרה שלנו: $a_{2n}=a_0\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ ולכן: $\sqrt[2n]{a_{2n}}\to\frac{1}{2}$.

$$\limsup\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{2}$$
$$\limsup\frac{a_{n+1}}{a_n}=2$$

<u>לפי מבחן המנה:</u> אם $\liminf\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ הטור מתבדר. אם $\limsup\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ הטור מתכנס. במקרה שלנו המבחן לא עוזר.
<u>לפי מבחן השורש:</u> אם $\limsup\sqrt[n]{a_n}<1$ אז הטור מתכנס. ואם $\limsup\sqrt[n]{a_n}>1$ הטור מתבדר. במקרה שלנו ניתן לראות כי הטור מתכנס לפי מבחן השורש.

דוגמה 7.32

$$1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\dots$$

כלומר: $a_n=\frac{1}{n!}$. נשים לב כי $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{n+1}\to0$ ולכן הטור מתכנס לפי מבחן המנה.

הגדרה 7.33 $e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$

משפט 7.34

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

הוכחה: הראנו כבר באינפי 1, אבל הנה הוכחה נוספת:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0}1^n\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^0 + \binom{n}{1}1^{n-1}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^1 + \ldots$$
$$+\binom{n}{k}1^{n-k}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^k + \ldots + \binom{n}{n}1^0\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n =$$
$$1+1+\frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2}+\ldots+\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))}{k!\cdot n^k}+\ldots+\frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1}{n!\cdot n^n} =$$
$$1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)+\ldots$$
$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

נסמן את הביטוי הנ"ל ב-T_n. כמו כן נסמן: $S_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}$. נשים לב כי $T_n \le S_n$ ומכאן נובע כי:

$$\limsup T_n \le \lim_{n\to\infty} S_n = e \tag{2}$$

בדוגמה הראנו כי S_n מתכנס לפי מבחן המנה.

נשאר להראות כי: $e \le \liminf T_n$. נוריד $\varepsilon > 0$ מאגף שמאל ונראה כי: $e - \varepsilon \le \liminf T_n$.

$S_n \to e$, לכן קיים $\mathbb{N} \ni m > 0$ כך ש: $0 \le (e - S_m) < \varepsilon$. נשים לב כי:

$$S_m = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{m!} > e - \varepsilon$$

כמו כן לכל $n \ge m$ נקבל כי:

$$T_n \ge 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{m-1}{n}\right)$$

(למעשה חתכנו את הזנב של הטור, וזהו טור חיובי לכן האי שיוויון הנ"ל נכון). הביטוי הנ"ל כאשר $n \to \infty$ שואף ל:

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{m!} = S_m$$

ומכאן:

$$\liminf_{n\to\infty} T_n \ge S_m > e - \varepsilon$$

הראינו כי לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים: $\liminf T_n \ge e - \varepsilon$ ולכן:

$$\liminf_{n\to\infty} T_n \ge e \tag{3}$$

ולכן לפי המשוואות (2) ו-(3) נקבל כי:

$$\lim_{n\to\infty} T_n = e$$

■

משפט 7.35

e איננו רציונלי

הוכחה: נביט בשגיאה:

$$e - S_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \ldots =$$
$$\frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots\right) \leq$$
$$\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \ldots\right) = \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} = \frac{1}{n \cdot n!}$$

נניח בשלילה $e = \frac{p}{q}$ כאשר $p, q \in \mathbb{N}$

$$0 < q!\,(e - S_q) < q! \cdot \frac{1}{q \cdot q!} = \frac{1}{q}$$

נצד שני: $q! \cdot e = q! \cdot \frac{p}{q}$ מספר טבעי. $q! \cdot S_q$ מספר טבעי. לכן: $q!\,(e - S_q)$ טבעי בין 0 ל $\frac{1}{q}$ וזו סתירה. ■

דוגמה 7.36 הטור ההרמוני:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

נשים לב כי לפי מבחן המנה: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to 1$ (בלי חישוב ניתן להגיד שלכן גם: $\sqrt[n]{a_n} \to 1$ לפי טענה 7.30)

נשים לב כי:

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \geq \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \ldots + \frac{1}{16} \geq \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

תנאי קושי לא מתקיים כי לכל N

$$\frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + \ldots + \frac{1}{2N} \geq \frac{N}{2N} = \frac{1}{2}$$

מבחן העיבוי של קושי

משפט 7.37 מבחן העיבוי של קושי

$a_n \geq 0$ מונוטונית יורדת.

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots$$

הטור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס אם"ם הטור $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ מתכנס.

הוכחה: נסמן: $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

$$T_n = 2 \cdot a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^n a_{2^n}$$

נשים לב כי:

$$2a_2 = a_2 + a_2 \leq a_1 + a_2$$

מכיוון ש a_n מונוטונית יורדת ולכן גם:

$$\begin{aligned}
a_2 &\leq a_2 \\
2a_4 &\leq a_3 + a_4 \\
4a_8 &\leq a_5 + a_6 + a_7 + a_8 \\
&\vdots \\
2^{k-1}a_2^k &\leq a_{2^{k-1}+1} + a_{2^{k-1}+2} + \ldots + a_{2^k}
\end{aligned}$$

נסכם ונקבל:

$$a_2 + 2a_n + 4a_8 + \ldots + 2^{k-1}a_{2^k} \leq a_2 + a_3 + a_4 + \ldots + a_{2^k}$$

נכפול הכל ב2 ונקבל:

$$\begin{aligned}
T_k = 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots + 2^k a_{2^k} \leq 2a_2 + 2a_3 + \ldots + 2a_{2^k} \leq \\
2a_1 + 2a_2 + \ldots + 2a_{2^k} = 2S_{2^k}
\end{aligned}$$

אם S_n מסדרה מתכנסת אזי S_n חסומה ולכן הסדרה T_k חסומה. T_k מונוטונית עולה ולכן T_k מתכנסת.
כיוון שני:

$$\begin{aligned}
2a_2 &\geq a_2 + a_3 \\
4a_4 &\geq a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \\
&\vdots \\
2^k a_{2^k} &\geq \underbrace{a_{2^k} + a_{2^k+1} + \ldots + a_{2^{k+1}-1}}_{2^k \text{ items}}
\end{aligned}$$

ולכן נקבל כי:

$$T_k \geq a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \ldots + a_{2^{k+1}-1} = S_{2^{k+1}-1} - a_1$$

אם T_k מתכנס, אז T_k סדרה חסומה מלמעה ולכן גם $S_{2^{k+1}-1}$ חסום מלמעלה ולכן S_n חסומה מלמעלה. וכיוון שהיא מונוטונית עולה אזי היא מתכנסת. ■

דוגמה 7.38 הטור ההרמוני: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

$$2^k a_{2^k} = 2^k \cdot \frac{1}{2^k} = 1$$

והסכום $\sum_{k=1}^{\infty} 1$ מתבדר, לכן גם הטור ההרמוני מתבדר.

פונקציית זטא של רימן

דוגמה 7.39 פונקציית זטא של רימן: $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ לכל $0 < s \in \mathbb{R}$.

$$2^k a_{2^k} = 2^k \cdot \frac{1}{2^{ks}} = 2^{k(1-s)}$$

הטור: $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{k(1-s)}$ הוא טור הנדסי עם מנה 2^{1-s}. טור הנדסי מתכנס אם"ם $q < 1$ כלומר: $1 - s < 0$ ולכן מתכנס אם $s > 1$.

תרגיל: $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^s}$ מתכנס אם"ם $s > 1$.

מבחן האינטגרל

משפט 7.40 מבחן האינטגרל

תהי $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ פונקצייה חיובית מונוטונית יורדת. הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ מתכנס אם"ם $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ מתכנס.

הוכחה:

נשים לב כי:

$$\int\limits_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \le \int\limits_n^{n+1} f(n)\,\mathrm{d}x = f(n)$$

כמו כן:

$$f(n) = \int\limits_{n-1}^{n} f(n)\,\mathrm{d}x \le \int\limits_{n-1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x$$

קיבלנו כי

$$\int\limits_{n-1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x \ge f(n) \ge \int\limits_{n}^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

כלומר:

$$\int\limits_1^{N+1} f(x)\,\mathrm{d}x \le f(1) + f(2) + \ldots + f(N) \le f(1) + \int\limits_1^{N} f(x)\,\mathrm{d}x$$

ולכן קיבלנו כי:

$$\int_1^{N+1} f(x)\,\mathrm{d}x \le S_N \le f(1) + \int_1^N f(x)\,\mathrm{d}x$$

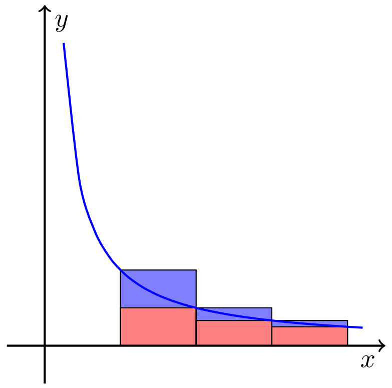
S_N סדרה מונוטונית עולה. אם $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ מתכנס אז S_N חסומה ע"י $f(1)+\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ ולכן מתכנסת.

להפך, אם S_N מתכנסת אז S_Nחסומה ולכן: $\int_1^{N+1} f(x)\,\mathrm{d}x$ חסום לכל N והוא פונקצייה מונוטונית עולה של N ולכן קיים הגבול $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty}\int_1^{N+1} f(x)\,\mathrm{d}x$ ■

24/03/11

דוגמה 7.41 $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

נגדיר: $f(x) = \frac{1}{x}$



$$1 + \ln N = 1 + \int_1^N \frac{1}{x}\mathrm{d}x \ge 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{N} \ge \int_1^{N+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln(N+1)$$

$$0 < \ln\frac{N+1}{N} \le 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{N} - \ln N \le 1$$

נביט בסדרה:

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$$

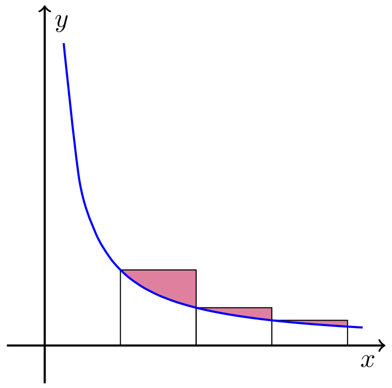
$0 < a_n \le 1$. נראה ש a_n מונוטונית יורדת:

$$a_n - a_{n+1} = -\frac{1}{n+1} + \ln(n+1) - \ln n = -\frac{1}{n+1} + \ln\frac{n+1}{n} =$$

$$-\frac{1}{n=1} + \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x \ge -\frac{1}{n+1} + \int_n^{n+1} \frac{1}{n+1}\mathrm{d}x = -\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} = 0$$

ולכן a_n סדרה מונוטונית יורדת. a_nסדרה מונוטונית יורדת $a_n > 0$ לכן a_n מתכנסת לגבול.
נסמן $\gamma \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a_n$ נרצה להראות ש γ חיובי ממש.

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$$



מהציור אנו רואים כי:

$$a_n \geq 1 - \ln 2 > 0$$

$(1 - \ln 2)$ הוא השטח של המלבן הראשון פחות השטח מתחת לגרף בין 1 ל־2). כלומר בציור שלנו a_3 זה השטח הסגול.
הציור רומז על כך ש: $a_n \geq 1 - \ln 2$ ננסה להוכיח זאת פורמלית.

$$a + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{N} - \ln N =$$
$$(1 - \ln 2)\left(\frac{1}{2} - (\ln 3 - \ln 2)\right) + \ldots + \left(\frac{1}{N-1}\right) - (\ln N - \ln (N-1)) + \frac{1}{N} =$$
$$(1 - \ln 2) + \left(\frac{1}{2} - \ln \frac{3}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \ln \frac{4}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{N-1} - \ln \frac{N}{N-1}\right) + \frac{1}{N} > 1 - \ln 2$$

$$\frac{1}{k-1} - \ln \frac{k}{k-1} = \frac{1}{k-1} - \int\limits_{k-1}^{k} \frac{1}{x} \mathrm{d}x \geq \frac{1}{k-1} - \int\limits_{k-1}^{k} \frac{1}{k-1} \mathrm{d}x = 0$$

לסיכום a_n סדרה מונוטונית יורדת החסומה מלמטה ע"י $1 - \ln 2$ לכן הגבול $0 < \gamma$.

הערה 7.42 γ הוא הקבוע של אוילר. כיום לא ידוע האם γ רציונלי או לא.

7.4 טורים עם סימנים מתחלפים

נביט בטור:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$$

טענה 7.43

הטור הנ"ל מתכנס (ל $\ln 2$)

הוכחה: נגדיר $a_n = \frac{1}{n}$. ראשית נוכיח את הלמה הבאה:

למה 7.44

נראה שסדרת הסכומים החלקיים S_{2n} מונוטונית עולה ואילו S_{2n+1} מונוטונית יורדת.

הוכחה:

$$S_{2n+2} = S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq S_{2n}$$

(כיוון ש a_n מונוטונית יורדת. אזי: $a_{2n+1} \geq a_{2n+2}$)
במקביל:

$$S_{2n+3} = S_{2n+1} - a_{2n+2} + a_{2n+3} = S_{2n+1} - (a_{2n+2} - a_{2n+3}) \leq S_{2n+1}$$

■

כעת נוכיח את:

למה 7.45

נראה ש S_{2n} חסומה מלמעלה וכי S_{2n+1} חסומה מלמטה.

הוכחה:

$$S_{2n} = S_{2n-1} - a_{2n} \leq S_{2n-1} \leq S_1 = a_1$$

הוכחנו כי סדרת הסכומים האי זוגיים היא מונוטונית יורדת. במקביל:

$$S_{2n+1} = S_{2n} + a_{2n+1} \geq S_{2n} \geq S_2$$

מכיוון ש S_{2n} מונוטונית עולה. ■

מסקנה 7.46

קיימים הגבולות $L_1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} S_{2n}$, $L_2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} S_{2n}$.

נתבונן ב:

$$a_{2n+1} = S_{2n+1} - S_{2n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L_2 - L_1$$

אבל אנו יודעים כי $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ מכאן: $L_2 - L_1 = 0$ ולכן $L_2 = L_1$. לסיכום הוכחנו ש S_n סדרה מתכנסת. ■

הערה 7.47 למעשה הוכחנו משפט "חזק" יותר:

משפט 7.48 לייבניץ

תהי $a_n > 0$ סדרה מונוטונית יורדת חיובית. $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ אזי הטור $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - \ldots$ מתכנס.

27/03/11

דוגמה 7.49 $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$ מתכנס.

דוגמה 7.50 $1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots$ מתכנס.

7.4.1 משפט Abel Dirichlet

תזכורת 7.51 ראינו שהאינטגרל הלא אמיתי $\int\limits_1^\infty \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$ מתכנס (הוכחה ע"י אינטגרציה בחלקים). נראה זאת עבור טורים.

למה 7.52 סכימה בחלקים

$$\sum_{n=p}^{q} a_n \cdot b_n = \sum_{n=p}^{q} \left(A_n - A_{n-1}\right) b_n = -\sum_{n=p}^{q-1} A_n \left(b_{n+1} - b_n\right) + A_q b_q - A_{p-1} b_p$$

הוכחה: נשים לב כי:

$$\sum_{n=p}^{q} a_n \cdot b_n = \sum_{n=p}^{q} \overbrace{\left(A_n - A_{n-1}\right)}^{\text{derivative}} b_n = \sum_{n=p}^{q} A_n b_n - \sum_{n=p}^{q} A_{n-1} b_n =$$

$$\sum_{n=p}^{q} A_n b_n - \sum_{n=p-1}^{q-1} A_n b_{n+1} =$$

$$A_q b_q - A_{p-1} b_p + \sum_{n=p}^{q-1} A_n b_n - \sum_{n=p}^{q-1} A_n b_{n+1} =$$

$$-\sum_{n=p}^{q-1} A_n \left(b_{n+1} - b_n\right) + A_q b_q - A_{p-1} b_p$$

כנדרש ■

משפט 7.53 *Abel Dirichlet*

נתון הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ נסמן ב A_nאת סידרת הסכומים החלקיים של הסידרה (a_n).

אם A_n סדרה חסומה וb_n מונוטונית יורדת לאפס אז הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ מתכנס.

הוכחה: נעזר באינטגרציה בחלקים (סכימה בחלקים) (כאשר $A_0 := 0$)
מסכימה בחלקים נקבל

$$\left|\sum_{n=p}^{q} a_n \cdot b_n\right| = \left|-\sum_{n=p}^{q-1} A_n \left(b_{n+1} - b_n\right) + A_q b_q - A_{p-q} b_p\right| \le$$

$$\sum_{n=p}^{p-1} \left|A_n\right| \left|b_{n+1} - b_n\right| + \left|A_q\right| \left|b_q\right| + \left|A_{p-1}\right| \left|b_p\right|$$

כיוון שA_n חסומה אזי: $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \left|A_n\right| \le M$ ולכן:

$$\le M \sum_{n=p}^{q-1} \left|b_{n+1} - b_n\right| + M \left|b_q\right| + M \left|b_p\right|$$

כמו כן b_n מונוטונית יורדת לכן:

$$= M\cdot\sum_{n=p}^{q-1}(b_n-b_{n+1})+M|b_q|+M|b_p| =$$

$$M(b_p-b_q)+M|b_q|+M|b_p|\le 2M|b_p|+2M|b_q|$$

לכן, בהינתן $\varepsilon>0$ נבחר $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N$ מתקיים $|b_k|<\frac{\varepsilon}{4M}$ ואז לכל $p,q>N$ מתקיים:

$$\left|\sum_{n=p}^{q}a_n\cdot b_n\right|\le 2M\frac{\varepsilon}{4M}+2M\frac{\varepsilon}{4M}=\varepsilon$$

לפי תנאי קושי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot b_n$ מתכנס. ■

מסקנה 7.54 משפט לייבניץ

$a_n=(-1)^{n+1}$. $b_n\ge 0$ מונוטונית יורדת לאפס.

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot b_n=b_1-b_2+b_3-b_4+\dots$$

$$A_1=a_1=1,\ A_2=1+(-1)=0\dots$$

A_n סדרה חסומה. לפי משפט אבל הטור $b_1-b_2+b_3-b_4$ מתכנס.

דוגמה 7.55 נראה ש $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$ מתכנס. נסמן $a_n=\sin n$ ו- $b_n=\frac{1}{n}$.
לפי משפט Abel Dirichlet מספיק להראות שהסדרה

$$A_n+\sin 1+\sin 2+\dots+\sin n$$

חסומה.
לפי משפט דה מואבר:

$$(\cos x+i\cdot\sin x)^n=\cos(nx)+i\cdot\sin(nx)$$

ולכן:

$$\begin{aligned}&\sin 1+\sin 2+\dots+\sin n=\\&\mathrm{Im}\left((\cos 1+i\cdot\sin 1)+(\cos 2+i\cdot\sin 2)+\dots+(\cos n+i\cdot\sin n)\right)=\\&\mathrm{Im}\left[(\cos 1+i\sin 1)+(\cos 1+i\sin 1)^2+\dots+(\cos 1+i\sin 1)^n\right]=\\&\mathrm{Im}\left[(\cos 1+i\sin 1)\cdot\frac{1-(\cos 1+i\sin 1)^n}{1-(\cos 1+i\sin 1)}\right]\end{aligned}$$

נשים לב י:

$$|\operatorname{Im} z| \leq |z|$$

כמו כן:

$$|\cos 1 + i \sin 1| = 1 \Rightarrow |1 - (\cos 1 + i \cdot \sin 1)^n| \leq 1 + |\cos 1 + i \cdot \sin 1|^n = 2 \Rightarrow$$

$$\left|(\cos 1 + i \cdot \sin 1) \cdot \frac{1 - (\cos 1 + i \cdot \sin 1)^n}{1 - (\cos 1 + i \cdot \sin 1)}\right| \leq \frac{2}{|1 - (\cos 1 + i \cdot \sin 1)|}$$

ולכן הגענו לביטוי שלא תלוי בn. ולכן סדרת הסכומים החלקיים חסומה. ולכן לפי משפט Abel Dirichlet טור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ מתכנס.

7.4.2 חוק הקיבוץ

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right)$$

$$\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} = \frac{1}{2k\,(2k-1)} \leq \frac{1}{(2k-1)^2} \leq \frac{1}{2k^2}$$

(עבור k מספיק גדול).

נזכור כי: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ מתכנס. האם מכאן נובע שהטור בלי הסוגריים מתכנס?

התשובה היא לא תמיד. לדוגמה הטור:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$$

מתבדר. נשתמש בקיבוץ ונראה כי:

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \ldots$$

מתכנס לאפס. והרי לנו דוגמה נגדית.

משפט 7.56 חוק הקיבוץ

אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז הכנסת סוגריים שומרת על התכנסות הטור ולא משנה את סכומו. כלומר

הוכחה:

$$(a_1 + a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + \ldots + a_9) + (a_{10} + \ldots) + \ldots$$

בכל סוגריים יש מספר סופי של איברים. נסמן ב n_1 את האינדקס של אוסף הסוגריים הראשונים. (במקרה הנ"ל $n_1 = 3$). n_2 את האינדקס של סוף הסוגריים השניים כלומר $n_2 = 9$. ובאופן כללי בn_k את האינדקס של סוף הסוגריים ה־k־י.

נגדיר טור חדש $\sum_{l=1}^{\infty} b_l$ שיסכום את האיברים בתוך הסוגריים ונקבל כי:

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1 + a_2 + \ldots + a_{n_1} \\ b_2 &= a_{n_1+1} + a_{n_2+2} + \ldots + a_{n_2} \\ &\vdots \\ b_l &= a_{n_{l-1}+1} + a_{n_{l-1}+2} + \ldots + a_{n_l} \end{aligned}$$

נרצה להראות שאם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אזי $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס לאותו סכום. נסמן S_n את הסכומים החלקיים של הסדרה a_nונסמן ב T_l את הסכומים החלקיים של הסדרה b_l.

$$\begin{aligned} T_1 &= b_1 = a_1 + \ldots + a_{n_1} = S_{n_1} \\ T_2 &= b_1 + b_2 = S_{n_1} + a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_2} = S_{n_2} \\ &\vdots \\ T_k &= S_{n_k} \end{aligned}$$

אם $S_n \to S$ אז גם $T_k = S_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} S$ כנדרש. ■

7.4.3 חוק החילוף

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \ldots$$

נחלק את כלל איברי הטור ב2 ונוסיף אפסים לפני כל איבר ונקבל:

$$\frac{1}{2}S = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \ldots$$

נסכום את שני הטורים ונקבל:

$$\frac{3}{2}S = 1 + 0 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + 0 + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \ldots$$

נמחק אפסים ונקבל:

$$\frac{3}{2}S = \underbrace{1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}}+\ldots$$

קיבלנו סידור מחדש של הטור המקורי (תרגיל).

מכאן ערבוב של טור לא שומר בהכרח על הגבול שלו.

נרצה להראות שעבור טורים חיוביים ערבוב שומר על התכנסות וגם על גבול.

תהי $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ פונקצייה חח"ע ועל. (σ נקראת תמורה). בהינתן סדרה a_n נגדיר: $b_n = a_{\sigma(n)}$.

משפט 7.57 חוק החילוף לטורים חיוביים

תהי σ תמורה של הטבעיים. ותהי $a_n \geq 0$ סדרה אי שלילית. נגדיר $b_n = a_{\sigma(n)}$. אם

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס לL אזי $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ מתכנס לL. (ואם $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתבדר אזי גם $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ מתבדר).

הוכחה: נסמן בS_n את סדרת הסכומים החלקיים של a_n. S_n מונוטונית עולה לL. $S_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L$. נסמן ב$T_n$ את סדרת הסכומים החלקיים של b_n. נשים לב כי T_n מונוטונית עולה גם היא (סכומים חלקיים של סדרה חיובית).

יהי $\varepsilon > 0$, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך ש: $S_N > L - \varepsilon$. נבחין כי קיימים $k_l \in \mathbb{N}$ כך ש: $\sigma(k_l) = l$ (כלומר $\sigma(k_1) = 1$ ו$\sigma(k_2) = 2$ וכו') נגדיר:

$$N_2 = \max\{k_1, k_2, \ldots, k_N\}$$

נשים לב כי:

$$T_{N_2} = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{N_2} \geq a_1 + a_2 + \ldots + a_N$$

כיוון ש $\left(a_{\sigma(k_l)} = a_l\right) = b_{k_l} = a_l$ אבל $N_2 \geq k_l$ כאשר $1 \leq l \leq N$. במילים אחרות, כל איבר באגף ימין של אי השיוויון מופיע גם באגף השמאלי פשוט עם אינדקס שונה. ולכן:

$$T_{N_2} = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{N_2} \geq a_1 + a_2 + \ldots + a_N = S_N \geq L - \varepsilon$$

כמו כן נשים לב כי T_n חסומה:

$$T_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n = a_{\sigma(1)} + a_{\sigma(2)} + \ldots + a_{\sigma(n)} \leq S_{\max\{\sigma(1),\ldots,\sigma(n)\}} \leq S$$

מכיוון שT_n מונוטונית עולה ולכל $\varepsilon > 0$ מצאנו איבר בסדרה T_n הגדול מ$S - \varepsilon$ אזי $T_n \to S$. ■

30/03/11

7.4.4 התכנסות בהחלט

הגדרה 7.58 התכנסות בהחלט: הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ נקרא **מתכנס בהחלט** אם הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתכנס.

משפט 7.59

אם $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס בהחלט אז $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס

הוכחה: לפי קריטריות קושי:

יהי נתון $\varepsilon > 0$. כיוון ש $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ מתכנס אזי קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $p, q > N$ מתקיים $\sum\limits_{n=p}^{q}|a_n| < \varepsilon$. לפי אי שיוויון המשולש:

$$\left|\sum_{n=p}^{q}a_n\right| \leq \sum_{n=p}^{q}|a_n| < \varepsilon$$

ולכן לפי קריטריון קושי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס. ■

הגדרה 7.60 התכנסות בתנאי: אם $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתבדר ו $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ נקרא **מתכנס בתנאי**

הגדרה 7.61 פרוק של טור לחלק חיובי וחלק שלילי: תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה. נגדיר:

$$\begin{aligned} a_n^+ &:= \max\{a_n, 0\} \\ a_n^- &:= \max\{-a_n, 0\} \end{aligned}$$

נשים לב כי $a_n^+ \geq 0,\ a_n^- \geq 0$. כמו כן כי: $a_n^+ + a_n^- = |a_n|$ ואילו $a_n^+ - a_n^- = a_n$.

דוגמה 7.62

$$\begin{aligned} a_n &= 3, -7, 2, 5, -1, 3, 0, 2, \ldots \\ a_n^+ &= 3, 0, 2, 5, 0, 3, 0, 2, \ldots \\ a_n^- &= 0, 7, 0, 0, 1, 0, 0, 0, \ldots \end{aligned}$$

משפט 7.63

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט אס"ם הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ מתכנסים

הוכחה: כיוון ראשון:

נניח ש $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט, כלומר $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס

$$\begin{aligned} 0 &\leq a_n^+ \leq |a_n| \\ 0 &\leq a_n^- \leq |a_n| \end{aligned}$$

ממשפט ההשוואה נקבל כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-, \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ מתכנסים.

כיוון שני:

אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ מתכנס וגם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ מתכנס אז:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^+ + a_n^-\right) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

מתכנס לפי אריתמטיקה של טורים. ■

משפט 7.64

אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-, \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ מתבדרים שניהם

הוכחה: נניח בשלילה כי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ נזכור כי $a_n^+ - a_n^- = a_n$ כלומר: $a_n^- = a_n^+ - a_n$. לכן אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ מתכנס וגם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז גם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ מתכנס לפי אריתמטיקה של טורים. ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ + a_n^-)$ מתכנס גם הוא לפי אריתמטיקה של טורים. כלומר: $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס, ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} a_N$ מתכנס בהחלט. וזוהי סתירה. ■

הערה 7.65 בפרט אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאים יש בו ∞ איברים חיוביים ו∞ איברים שליליים.

7.4.5 ערבוב של טורים מתכנסים בהחלט\בתנאי

משפט 7.66

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור מתכנס בהחלט ותהי $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ תמורה. אז: $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)}$ מתכנס ולאותו גבול.

הוכחה:

$$\begin{aligned} a_n &= a_n^+ - a_n^- \\ a_{\sigma(n)} &= a_{\sigma(n)}^+ - a_{\sigma(n)}^- \end{aligned}$$

לפי משפט 7.63 אנו יודעים כי: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-, \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ מתכנסים. נסמן:

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ \\ S_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- \end{aligned}$$

לפי אריתמטיקה של טורים נקבל כי:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^+ + a_n^-\right) = S_1 + S_2$$

$a_{\sigma(n)}^+$ הוא ערבוב של הטור a_n^+ (שהוא טור חיובי), ואילו $a_{\sigma(n)}^-$ הוא ערבוב של הטור

a_n^- (גם כן טור חיובי). לכן לפי משפט 7.57 אנו יודעים כי:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^+_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = S_1$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} a^-_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = S_2$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} a^+_{\sigma(n)} - \sum_{n=1}^{\infty} a^-_{\sigma(n)} = S_1 - S_2 = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^+ - a_n^-\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

■

משפט 7.67 משפט רימן

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_N$ טור מתכנס בתנאי. לכל $L \in \mathbb{R}$ או $L = \pm\infty$ קיים ערבוב σ כך ש:
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma(n)} = L$$

הוכחה: נסמן: $P_1, P_2, P_3, \ldots$ את האיברים האי־שליליים בטור. כמו כן נסמן: $-Q_1, -Q_2, -Q_3, \ldots$ את האיברים השליליים בטור. אנו יודעים כי: $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$ ו־ $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n$ מתבדרים. כיוון ש $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי ולכן $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ ו: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$ מתבדרים, והרי P_n הוא a_n^+ ללא האפסים הנוספים בגלל המספרים השליליים, ואילו Q_n הוא a_n^- ללא האפסים. ולכן אם $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ מתבדר בהכרח גם $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$ מתבדר. וכנ"ל לגבי $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n$ ביחס ל $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$.

נתאר את האלגוריתם הבא:

נניח כי $L > 0$. נחבר איברים חיוביים: $P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_{m_1} > L$ (P_{m_1} הוא האיבר הראשון שבעזרתו אנו עוברים את L, כלומר: $P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_{m_1 - 1} \le L$). נסמן $A_1 = P_1 + \ldots + P_{m_1}$.

כעת נחבר איברים שליליים עד הפעם הראשונה שנרד מתחת לL כלומר: $A_1 - Q_1 - Q_2 - Q_3 - \ldots - Q_{n_1} < L$ שוב גם כאן, Q_{n_1} הוא האיבר הראשון אשר גורר ירידה מתחת ל L. כלומר: $A_1 - Q_1 - Q_2 - Q_3 - \ldots - Q_{n_1 - 1} \ge L$. נסמן: $B_1 = A_1 - Q_1 - \ldots - Q_{n_1}$.

נחזור על התהליך ושוב נחבר איברים חיוביים עד שנעבור את L: $A_2 = B_1 + P_{m_1+1} + P_{m_1+2} + \ldots + P_{m_2} > L$ ושוב: $B_1 + P_{m_1+1} + P_{m_1+2} + \ldots + P_{m_2 - 1} \le L$.

שוב נחבר איברים שליליים ל A_2 עד שנרד מתחת ל L $B_2 = A_2 - Q_{n_1+1} - Q_{n_2+2} - \ldots - Q_{n_2} < L$ ושוב מתקיים: $A_2 - Q_{n_1+1} - Q_{n_2+2} - \ldots - Q_{n_2 - 1} \ge L$.

וכך חוזרים שוב ושוב עד אינסוף.

בסופו של דבר נקבל:

$$(P_1 + \ldots + P_{m_1}) - (Q_1 + \ldots + Q_{n_1}) + (P_{m_1+1} + \ldots + P_{m_2}) - (Q_{n_1+1} + \ldots + Q_{n_2}) + \ldots$$

הערה 7.68 נשים לב ש $m_1, m_2, \ldots$ וגם $n_1, n_2, \ldots$ מוגדרים היטב. כיוון ש $\sum_{n=1}^{\infty} P_n$ מתבדר ולכן קיים m_1כך ש $P_1 + \ldots + P_{m_1} > L$. ובאופן זהה $\sum_{n=1}^{\infty} Q_n$ מתבדר ולכן קיים n_1 כך ש $A_1 - Q_1 - \ldots - Q_{n_1} < L$.

הערה 7.69 נשים לב כי לא באמת השתמשנו בכך ש $L > 0$ לכן למעשה ההוכחה נכונה לכל $L \in \mathbb{R}$.

הערה 7.70 נשים לב כי: (כאן כן יש הנחה של $L > 0$ אבל קל להפוך אותה)

$$\begin{aligned}
0 &< A_1 - L \leq & P_{m_1} \\
0 &< L - B_1 \leq & Q_{n_1} \\
0 &< A_2 - L \leq & P_{m_2} \\
0 &< L - B_2 \leq & Q_{n_2} \\
&\vdots \\
0 &< A_k - L \leq & P_{m_k} \\
0 &< L - B_k \leq & Q_{n_k}
\end{aligned}$$

נשים לב כי $0 \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} P_{m_k}$ כיוון שהיא תת סדרה של a_n והרי $0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a_n$ מכיוון ש $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס. באופן דומה $Q_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

ולכן ממשפט הסנדוויץ': $A_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} L,\ B_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} L$. נתבונן בטור:

$$(P_1 + \ldots + P_{m_1}) - (Q_1 + \ldots + Q_{n_1}) + (P_{m_1+1} + P_{m_2}) - (Q_{n_1+1} + \ldots + Q_{n_2}) + \ldots$$

נסמן בT_n את הסכומים החלקיים של הטור שהתקבל. נשים לב כי:

$$A_1 = T_{m_1},\ B_1 = T_{m_1+n_1},\ A_2 = T_{m_2+n_1},\ B_2 = T_{m_2+n_2}, \ldots$$

כלומר קיבלנו תת סדרה של T_n המתכנסת ל L:

$$T_{m_1}, T_{m_1+n_1}, T_{m_2+n_1}, T_{m_2+n_2}, \ldots$$

יהי $l \in \mathbb{N}$, נעריך את T_l. נשים לב כי T_l יכול להיות "באמצע עלייה" או "באמצע ירידה". כלומר, קיים k כך ש: $B_{k-1} \leq T_l \leq A_k$ כלומר $B_{k-1} - L \leq T_l - L \leq A_k - L$.
יהי k_0 כך ש $A_k - L < \varepsilon$, $L - B_k < \varepsilon$ לכל $k > k_0$. נגדיר $N = m_{k_0} + n_{k_0}$ ואז לכל $l > N$ <u>בעלייה</u> קיים $k > k$כך ש:

$$-\varepsilon < B_{k-1} - L < T_l - L \leq A_k - L < \varepsilon$$

אפשר להעריך באופן דומה את T_l "באמצע ירידה" ואז מקבלים שקיים N כך שלכל $l > N$ מתקיים $|T_1 - L| < \varepsilon$

■

המשפט הבא גם נכון (מקרה כללי של המשפט 7.67):

משפט 7.71 משפט רימן

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בתנאי לכל L_1, L_2 כך ש $L_1 \le L_2$ (מותר שL_1, L_2 יהיו $\pm\infty$).

קיים ערבוב σ כך ש $\liminf_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_{\sigma(n)} = L_1$ ו: $\limsup_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_{\sigma(n)} = L_2$.

הערה 7.72 המשפט 7.67 הוא מקרה פרטי של משפט 7.71 כאשר $L = L_1 = L_2$

31/03/11

7.5 מכפלה של טורים

7.5.1 מכפלת קושי של טורים

הגדרה 7.73 טור המכפלה: יהיו $\sum_{n=0}^{\infty} b_n, \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ טורים. נגדיר: $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots + a_n b_0$. הטור $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ נקרא **טור המכפלה**.

הערה 7.74 המוטיבצייה להגדרה הנ"ל היא מכפל פולינומים:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)\left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l x^l\right) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m$$

משפט 7.75

נניח שהטור $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט והטור $B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n$ מתכנס. נגדיר $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. אזי הטור $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ מתכנס ל$A \cdot B$.

הערה 7.76 המשפט לא פשוט בגלל שהסכומים החלקיים שמתאימים לטור $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ אינם מכפלה של הסכומים החלקיים של $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ו־$\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

הסבר:

נסמן את הסכומים החלקיים של $\sum c_n$ ב S_n, $\sum a_n$ ב A_n ו־ $\sum b_n$ ב B_n. אז:

$$\begin{aligned} S_1 &= c_0 + c_1 = a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_1 b_0 \\ A_1 \cdot B_1 &= (a_0 + a_1)(b_0 + b_1) \end{aligned}$$

נשים לב כי $A_1 B_1 \neq S_1$.

הוכחה: נשתמש בסימנים מהערה. נשים לב כי:

$$\begin{aligned}S_n &= c_0 + \ldots + c_n = \\ &a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0) + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0) + \ldots + (a_0b_n + \ldots + a_nb_0) = \\ &a_0(b_0 + b_1 + \ldots + b_n) + a_1(b_0 + \ldots + b_{n-1}) + \ldots + a_{n-1}(b_0 + b_1) + a_nb_0 = \\ &a_0B_n + a_1B_{n-1} + \ldots + a_nB_0\end{aligned}$$

נגדיר $\beta_n = B_n - B$ (אנו יודעים כי $\beta_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$)

$$\begin{aligned}&= a_0(B + \beta_n) + a_1(B + \beta_{n-1}) + \ldots + a_n(B + \beta_0) = \\ &A_n \cdot B + a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \ldots + a_n\beta_0\end{aligned}$$

נגדיר: $\gamma_n = a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \ldots + a_n\beta_0$. מספיק להראות כי $\gamma_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

יהי נתון $\varepsilon_1 > 0$, קיים $N_1 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \ge N_1$ מתקיים $|\beta_n| < \varepsilon_1$. נשים לב כי:

$$\begin{aligned}|\gamma_n| &= \left|\underbrace{(a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \ldots + a_{n-N_1}\beta_{N_1})}_{n+1-N_1 \text{ items}} + \underbrace{(a_{n-N_1+1}\beta_{N_1-1} + \ldots + a_n\beta_0)}_{N_1 \text{ items}}\right| \\ &\le \left|\underbrace{a_0\beta_n + a_1\beta_{n-1} + \ldots + a_{n-N_1}\beta_{N_1}}_{\text{א}}\right| + \left|\underbrace{a_{n-N_1+1}\beta_{N_1-1} + \ldots + a_n\beta_0}_{\text{ב}}\right|\end{aligned}$$

נשים לב כי:

$$|\text{א}| \le \sum_{k=0}^{n-N_1} |a_k|\,|\beta_{n-k}| \le \varepsilon_1 \cdot \sum_{k=0}^{n-N_1} |a_k|$$

נסמן $\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} |a_k|$ ונקבל:

$$< \varepsilon_1 \cdot \alpha$$

יהי נתון $\varepsilon_2 > 0$. יהי $N_2 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $k \ge N_2$ מתקיים: $|a_k| < \varepsilon_2$. יהי $n > N_1 + N_2$ ולכן $n - N_1 + 1 > N_2$. אם כך:

$$\begin{aligned}|\text{ב}| \le \sum_{k=n-N_1+1}^{n} |a_k|\,|\beta_{n-k}| \le \varepsilon_2 \sum_{k=n-N_1+1}^{n} |\beta_{n-k}| \le \\ \varepsilon_2 \cdot N_1 \cdot \max\{|\beta_0|, \ldots, |\beta_{N-1}|\}\end{aligned}$$

לבסוף נקבל כי:

$$|\gamma_n| \le \varepsilon_1 \cdot \alpha + \varepsilon_2 \cdot N_1 \cdot \max\{|\beta_0|, \ldots, |\beta_{N-1}|\}$$

בהינתן $\varepsilon > 0$ נגדיר: $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2\alpha}$. בעזרת ε_1 נגדיר את N_1. נסמן $M = \max\{|\beta_0|, \ldots, |\beta_{N-1}|\}$ ואז נגדיר: $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{2N_1M}$ ולכן עבור $n > N_1 + N_2$ נקבל $|\gamma_n| < \varepsilon$. ■

דוגמה 7.77 הטור $1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots$. נסמן $a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$. נגדיר:

$$c_n=\sum_{k=0}^{n}a_ka_{n-k}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k+1}}\cdot\frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k+1}}=$$

$$(-1)^n\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}$$

נשים לב כי:

$$(k+1)(n-k+1)=\left(\frac{n}{2}+1\right)^2-\left(\frac{n}{2}-k\right)^2\le\left(\frac{n}{2}+1\right)^2$$

ולכן:

$$\frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}\ge\frac{1}{\frac{n}{2}+1}=\frac{2}{n+2}$$

כלומר:

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{\sqrt{(k+1)(n-k+1)}}\ge(n+1)\frac{2}{n+2}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}2$$

כלומר c_n לא שואף לאפס. ולכן הטור $\sum c_n$ מתבדר.

משפט 7.78 המשפט של אבל

(בלי הוכחה) אם $\sum_{n=0}^{\infty}a_n=A$, $\sum_{n=0}^{\infty}b_n=B$, $\sum_{n=0}^{\infty}c_n=C$ כאשר $\sum_{n=0}^{\infty}c_n$ הוא טור המכפלה. אז $C=A\cdot B$.

03/04/11

חלק III
חזרה לאינטגרלים

8 תנאים נוספים לאינטגרביליות

8.1 "כמעט רציפה"

משפט 8.1

אם f אינטגרבילית ב $[a,b]$אז f כמעט רציפה ב $[a,b]$.

הגדרה 8.2 כמעט רציפה: הפונקציה f <u>**"כמעט רציפה"**</u> אם קבוצה נקודות אי הרציפות של f היא "קטנה".

השאלה המתבקשת היא מה זה קבוצה קטנה?

דוגמה 8.3

1. f רציפה ב $[a,b]$

2. $f(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ -1 & x<0\end{cases}$ קבוצת נקודות אי הרציפות היא סופית.

3. פונקציית רימן: $f(x)=\begin{cases}0 & x\neq\mathbb{Q}\\ \frac{1}{q} & x=\frac{p}{q}\end{cases}$ כאשר $0\le x\le 1$ ו $\frac{p}{q}$ שבר מצומצם. קבוצת נקודות אי הרציפות היא $\mathbb{Q}\cap[0,1]$.
מצד אחד קבוצת הרציונלים גדולה כי אפשר לקרב כל מספר ע"י רציונליים. מצד שני, קבוצת הרציונליים היא "קטנה" לפי הגדרה בהמשך.

כלומר, קבוצה קטנה יכולה להיות עם אינסוף איברים. לכן נדרשות כמה הגדרות נוספות על מנת להבין מה זה קבוצה קטנה.

8.1.1 בת מנייה

הגדרה 8.4 קבוצה סופית: תהי A קבוצה. נאמר ש A **קבוצה סופית** אם קיים $n\in\mathbb{N}$ וקיימת העתקה $f:\{1,2,\ldots,n\}\to A$ חח"ע ועל.

הגדרה 8.5 קבוצה אינסופית: $A\neq\emptyset$ תקרא **קבוצה אינסופית** אם A לא סופית.

הגדרה 8.6 עוצמה: תהיינה A,B קבוצות. אם קיימת העתקה חח"ע ועל $f:A\to B$ נאמר שלקבוצות A,B יש את אותה **עוצמה**.

הגדרה 8.7 קבוצה בת מנייה: A תקרא קבוצה **בת מנייה** אם קיימת העתקה חח"ע ועל $f:\mathbb{N}\to A$.

דוגמה 8.8

1. $\mathbb{N}$ המספרים הטבעיים באופן טריויאלי.
2. $A=\{2,3,4,\ldots\}\subset\mathbb{N}$ נשים לב כי: $f:\mathbb{N}\to A$ חח"ע ועל: $n\mapsto n+1$.
3. המספרים $2\mathbb{N}\subset\mathbb{N}$ הטבעיים הזוגיים. $f:\mathbb{N}\to 2\mathbb{N}$ חח"ע ועל. $n\mapsto 2n$
4. $\mathbb{Z}$ השלמים. נגדיר באופן הבא:

$$\underbrace{0}_{f(1)},\underbrace{1}_{f(2)},\underbrace{-1}_{f(3)},\underbrace{2}_{f(4)},\underbrace{-2}_{f(5)},\underbrace{3}_{f(6)},\underbrace{-3}_{f(7)}\ldots$$

רשמנו סידרה שמכילה את כל המספרים השלמים, לכן $\mathbb{Z}$ היא בת מנייה.

טענה 8.9

תהי A קבוצה בת־מנייה. ו $B\subseteq A$. B תת קבוצה אינסופית. אז B בת מנייה גם היא.

הוכחה: קיימת העתקה חח"ע ועל $f:\mathbb{N}\to A$. נתבונן בסדרה:

$$f(1),f(2),f(3),f(4),\ldots$$

נרצה להגדיר העתקה חח"ע ועל $f:\mathbb{N}\to B$ נגדיר:

$$g(1)=f(\text{המקום של האיבר הראשון בסידרה הנ"ל ששייך ל}B)$$

ובאופן פורמלי:

$$n_1=\min\{k\in\mathbb{N}|\,f(k)\in B\}$$

הקבוצה הנ"ל לא ריקה כיוון ש B אינה ריקה. נסמן: $g\left(1\right)=f\left(n_{1}\right)$.
באופן דומה:

$$n_{2}=\min\left\{ k\in\mathbb{N}|\,k>n_{1},\;f\left(k\right)\in B\right\}$$

ונסמן $g\left(2\right)=f\left(n_{2}\right)$.
ובאופן כללי:

$$n_{l}=\min\left\{ k\in\mathbb{N}|\,k>n_{l-1},\;f\left(k\right)\in B\right\}$$

ונסמן $g(l)=f\left(n_{l}\right)$.
ומכאן שהגדרנו $g:\mathbb{N}\to B$ חח"ע ועל. ■

הערה 8.10 למעשה לקחנו את הסדרה $f\left(1\right),f\left(2\right),f\left(3\right),\ldots$ ומחקנו את האיברים שלא שייכים לB.

ניסוח מחדש של הטענה 8.9: להיות "בן־מנייה" הוא האינסוף **הכי "קטן"** שיש.

משפט 8.11

תהיינה A,B קבוצות בנות מנייה. אזי $A\cup B$ בת מנייה.

הוכחה: נתבונן בסדרה:

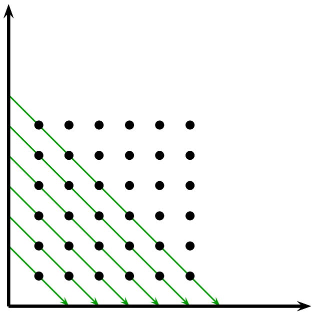
$$\underbrace{a_{1}}_{g(1)},\underbrace{b_{1}}_{g(2)},\underbrace{a_{2}}_{g(3)},\underbrace{b_{2}}_{g(4)},\underbrace{a_{3}}_{g(5)},\underbrace{b_{3}}_{g(6)},\ldots$$

נשים לב כי $g:\mathbb{N}\to A\cup B$ היא העתקה על B לא בהכרח חח"ע כיוון שייתכן שחוזרים על איברים יותר מפעם אחת. נמחק את האיברים הכפולים מהסדרה.
באופן יותר רשמי:
למעשה הסדרה הנ"ל מגדירה העתקה חח"ע:

$$f:A\cup B\to\mathbb{N},\;f\left(x\right)=\text{x המקום הראשון שבו מופיע}$$

נתבונן בתמונה של f, כלומר $f\left(A\cup B\right)$. נשים לב כי $f\left(A\cup B\right)\subseteq\mathbb{N}$ והיא אינסופית.
לכן $f\left(A\cup B\right)$ בת מנייה. $f:A\cup B\to f\left(A\cup B\right)$ חח"ע ועל ולכן גם $A\cup B$ בת מנייה.■

דוגמה 8.12 נתבונן בקבוצה $\mathbb{N}\times\mathbb{N}=\left\{ \left(m,n\right)|\,m,n\in\mathbb{N}\right\}$.
נוכל לסדר את $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ לפי אלכסונים.



נקבל את הסדרה:

$$\left(1,1\right),\left(1,2\right),\left(2,1\right),\left(1,3\right),\left(2,2\right),\left(3,1\right),\ldots$$

דוגמה 8.13 $\mathbb{Q}^+$ רציונליים חיוביים $x \in \mathbb{Q}^+$. נסמן $x = \frac{p}{q}$ כך שזהו שבר מצומצם.
נשים לב כי קיימת העתקה $\mathbb{Q}^+ \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ העתקה חח"ע לא על. $\frac{p}{q} \mapsto (p,q)$. (לדוגמה $(2,4)$ לא מתקיים)
נתבונן ב $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. g על ולא חח"ע. $\frac{1}{2} \mapsto (2,4)$, $\frac{1}{2} \mapsto (1,2)$. נשים לב כי $g^{-1}(\mathbb{Q}^+) \subset \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ תת קבוצה אינסופית. $g^{-1}(\mathbb{Q}^+) \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ חח"ע ועל. ולכן:$g^{-1}(\mathbb{Q}^+)$ קבוצה בת מנייה ולכן גם $\mathbb{Q}^+$ בת מנייה.

מסקנה 8.14

$\mathbb{Q}$ בת מנייה כיוון ש $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}^+ \cup \mathbb{Q}^- \cup \{0\}$. על סמך טענה שלא הראנו אבל טריוויאלית כי: A בת מנייה אז $A \cup \{x\}$ היא בת מנייה.

דוגמה 8.15 דוגמה לקבוצה שאינה בת מנייה: $A = \{(a_1, a_2, \ldots) \,|\, \forall n\, a_n = 0 \vee a_n = 1\}$,
כלומר A קבוצת הסדרות האינסופיות של אפסים ואחדים.
לדוגמה:

$$0,1,0,0,1,0,1,0,0,1,1,1,0,\ldots$$

הוא איברי ב A.
נניח בשלילה ש A בת מנייה:

$$\begin{aligned} x_1 &= \underline{0},1,0,0,1,0,\ldots \\ x_2 &= 1,\underline{0},0,1,0,1,\ldots \\ x_3 &= 1,1,\underline{1},0,0,0,\ldots \end{aligned}$$

תהי x_n סדרה מתאימה שעוברת על כל האיברים ב A.
נגדיר את הסדרה הבאה של אפסים ואחדים:

$$y_1 = \begin{cases} 1 & x_{1,1} = 0 \\ 0 & x_{1,1} = 1 \end{cases}$$

$$y_2 = \begin{cases} 1 & x_{2,2} = 0 \\ 0 & x_{2,2} = 1 \end{cases}$$

$y_1, y_2 = 1,1$ בדוגמה.

טענה 8.16

לא קיים x_k כך ש:

$$x_k = (y_1, y_2, y_3, \ldots)$$

הוכחה: כי $x_{k,k} \neq y_k$

$$\forall k\, x_k \neq (y_1, y_2, \ldots)$$

■

מצאנו איבר שלא מופיע בסידרה $x_1, x_2, x_3, \ldots$. סתירה.

מסקנה 8.17

$\mathbb{R}$ איננו בן מנייה כי כל מספר ממשי ניתן לייצוג בינארי.

8.1.2 מידה אפס

הגדרה 8.18 מידה אפס: $A \subset \mathbb{R}$ תקרא קבוצה **<u>ממידה אפס</u>** אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימת סדרה של קטעים I_k כך ש $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ ו: $\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < \varepsilon$. ($|I_k|$ - האורך של I_k).

הסבר $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ (לכל $x \in A$ קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש $x \in I_k$)

דוגמה 8.19 $A = \{x_0\}$. יהי $\varepsilon > 0$

$$I_1 = \left(x_0 - \frac{\varepsilon}{2}, x_0 + \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

דוגמה 8.20 $A = \{x_1, \ldots, x_N\}$ קבוצה סופית:

$$I_k = \left(x_k - \frac{\varepsilon}{2N}, x_k + \frac{\varepsilon}{2N}\right)$$

$$|I_k| = \frac{\varepsilon}{N}$$

טענה 8.21

אם $A \subseteq \mathbb{R}$ בת מנייה אז A ממידה אפס.

הוכחה: יהי נתון סידור של A:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

$$I_k = \left(a_k - \frac{\varepsilon}{2 \cdot 2^k}, a_k + \frac{\varepsilon}{2 \cdot 2^k}\right)$$

$$|I_k| = \frac{\varepsilon}{2^k}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |I_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \varepsilon \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \varepsilon$$

■

דוגמה 8.22 קבוצת הרציונליים היא ממידה אפס.

8.1.3 קבוצת קנטור

קבוצת קנטור היא דוגמה נוספת לקבוצה ממידה אפס.

דוגמה 8.23 קבוצת קנטור:

$$\begin{aligned} C_0 &= [0,1] \\ C_1 &= \left[0,\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},1\right] \\ C_2 &= \left[0,\frac{1}{9}\right]\cup\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3},\frac{7}{4}\right]\cup\left[\frac{8}{9},1\right] \end{aligned}$$

למעשה C_k מוגדרת ע"י, מחיקת השליש האמצעי מכל קטע ב C_{k-1}.

נגדיר $C=\bigcap_{k=1}^{\infty}C_k$. קבוצה זו היא קבוצת קנטור. נשים לב כי הקבוצה אינה ריקה. כי למשל $C\ni 0,\frac{1}{3},1,\frac{1}{9},\frac{7}{9}$

C_0 מקטע אחד באורך אחד.

C_1מורכבת מ 2 קטים באורך $\frac{1}{3}$

$\vdots$

C_k מורכבת מ 2^k קטעים באורך $\frac{1}{3^k}$.

ולכן:

$$|C_k|=\frac{2^k}{3^k}=\left(\frac{2}{3}\right)^k\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0$$

.

נשים לב כי C ממידה אפס. כיוון שבהינתן $\varepsilon>0$ נמצא k כך ש:

$$\frac{2^k}{3^k}<\varepsilon$$

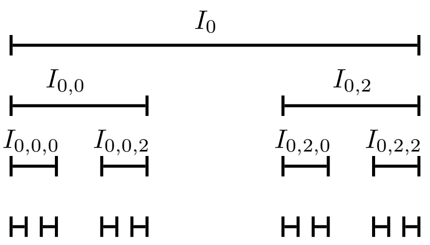
וכמו כן נשים לב ש $\forall k\ C\subset C_k$. וכמו כן, אוסף הקטעים שמרכיבים את C_k מכסים את C ואורכם הכולל קטן מε ולכן C היא ממידה אפס כנדרש.

06/04/11

משפט 8.24

C איננה בת מנייה.

הוכחה: ניתן שמות לקטעים. לקטע המקורי של C_0 נקרא I_0. לקטע הראשון של C_1 נקרא: $I_{0,0}$ ולקטע השני בC_1 נקרא: $I_{0,2}$. לקטעים בC_3 נקרא: $I_{0,2,2}$, $I_{0,2,0}$, $I_{0,0,2}$, $I_{0,0,0}$
עבור הקטעים ב C_k ניתן שמות: $I_{a_1,a_2,a_3,\ldots,k}$ לכל l מתקיים a_l 0 או 2.
כלומר כמתואר בתרשים הנ"ל:



■

למה 8.25

קיימת התאמה חח"ע ועל בין סדרות איסופיות של 0 ו־2 לנקודות של קבוצת קנטור

הוכחה: תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ נתונה סדרה אינסופית $a_1, a_2, a_3, \dots$ כך ש a_i הוא או 0 או 2. נתבונן בסדרה:

$$b_1, b_2, b_3, \dots = 0, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$$

לסדרה $(b_n)_{n=1}^{\infty}$ נתאים סדרה יורדת של קטעים באופן הבא:

$$I_{b_1} \supset I_{b_1,b_2} \supset I_{b_1,b_2,b_3} \supset \dots$$

הערה 8.26 סדרה יורדת של קטעים: הכוונה היא לסדרה של קטעים שאורכם הולך וקטן.

הוכחה: לפי הלמה של קנטור קיים x יחיד כך ש $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_{b_1,b_2,\dots,b_k} \subset \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k = C$ (מכיוון שזו סדרה יורדת של קטעים שאורכם שואף לאפס), כמו כן ראינו גם כי $x \in C$.

נראה שההתאמה הנ"ל היא חח"ע. נניח כי $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ מגדירה את x_1 ואילו $a'_1, a'_2, \dots, a'_n, \dots$ מגדירה את x_2 ונניח כי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ שונה מהסדרה $(a'_n)_{n=1}^{\infty}$.

מכיוון שהסדרות שונות, קיים $k \in \mathbb{N}$ כך שלכל $1 \le i < k$ מתקיים $a_i = a'_i$ ואילו $a_k \neq a'_k$.

כמו כן נשים לב כי:

$$b_1 = b'_1,\ b_2 = b'_2,\ \dots,\ b_k = b'_k,\ b_{k+1} \neq b'_{k+1}$$

וכמו כן:

$$x_1 \in I_{b_1,b_2,\dots,b_{k+1}},\ x_2 \in I_{b'_1,b'_2,\dots,b'_{k+1}}$$

אבל

$$I_{b_1,b_2,\dots,b_{k+1}} \cap I_{b'_1,b'_2,\dots,b'_{k+1}} = \emptyset$$

ולכן $x_1 \neq x_2$

תרגיל: להראות שההתאמה הנ"ל היא **<u>על</u>** קבוצת קנטור.

■

קיבלנו העתקה חח"ע מקבוצת כל הסדרות אינסופיות של $0, 2$ לתוך C. ראינו שקבוצת הסדרות הזו איננה בת מנייה. ולכן C איננה בת מנייה. ■

תרגיל: בהינתן סדרה $a_1, a_2, a_3, \dots$ של 0 ו־2 ה־x שהוגדר בהתאמה ניתן ע"י הנוסחה:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k}$$

כלומר אם נחשוב על המספר: $0.a_1a_2a_3\dots$ בבסיס 3 אזי $x = 0.a_1a_2a_3\dots$ בבסיס 3.
לכן קבוצת קנטור היא אוסף כל הנקודות ב $[0, 1]$ שניתן לרשום בבסיס 3 בלי הספרה 1.

טענה 8.27

נגדיר את הפונקצייה $\chi_C(x)=\begin{cases}1 & x\in C\\ 0 & x\neq C\end{cases}$ כך ש $0\leq x\leq 1$. קבוצת נקודות אי הרציפות של χ_Cהיא **קבוצת קנטור**.

הוכחה: יהי $x\neq C$, קיים k טבעי כך ש $x\neq C_k$. קיים $\delta>0$ כך ש $C_k\cap\emptyset=$ $(x-\delta,x+\delta)$ (כי C_k אוסף של קטעים סגורים). לכל y באותו קטע $|\chi_C(y)-\chi_C(x)|=0$ ולכן χ_C רציפה בx.

הערה 8.28 הטיעון הנ"ל מראה שקבוצת נקודות אי הרציפות של χ_C מוכלת ב C ולכן ממידה אפס.

תרגיל: אם $A\subset\mathbb{R}$ ממידה אפס ו: $B\subset A$. אז B ממידה אפס.

יהי $x\in C$. יהי $\delta>0$ נתון, נביט בקטע $(x-\delta,x+\delta)$. קיים $k\in\mathbb{N}$ כך ש: $\frac{1}{3^k}<2\delta$ מכאן נובע שבקטע $(x-\delta,x+\delta)$ יש נקודות שלא שייכות ל C_k ולכן באותו קטע יש נקודות שלא שייכות לC. תהי $y\notin c$ ו- $y\in(x-\delta,x+\delta)$ ולכן מתקיים:

$$|\chi_C(y)-\chi_C(x)|=1$$

לכן עבור $\varepsilon=\frac{1}{2}$ לא קיים $\delta>0$ כך שאם $|y-x|<\delta$ אזי:

$$|\chi_C(y)-\chi_C(x)|<\varepsilon$$

ולכן χ_C לא רציפה בx. ■

8.2 קשר לאינטגרציה

משפט 8.29 לבג

(משפט מתחילת המאה ה־20)
אם f אינטגרבילית דרבו אז קבוצת נקודות אי הרציפות של f היא ממידה אפס.

הוכחה: יהי $\alpha>0$ נגדיר:

$$G_\alpha=\{x\in[a,b]\,|\,\exists\delta>0,\ |y_1-x|<\delta\ \wedge\ |y_2-x|<\delta\Rightarrow|f(y_1)-f(y_2)|<\alpha\}$$

נסמן את קבוצת נקודות הרציפות של f ב $\mathrm{Cont}(f)$.

טענה 8.30

$$\mathrm{Cont}(f)=\bigcap_{\alpha>0}G_\alpha=\{x|\,\forall\alpha>0,\,x\in G_\alpha\}$$

הוכחה: נניח ש f רציפה ב x. יהי $\alpha>0$ כלשהו. קיים $\delta>0$ כך שאם $|y-x|<\delta$ אז $|f(y)-f(x)|<\frac{\alpha}{2}$. יהיו y_1,y_2 כך ש $|y_1-x|<\delta$ וגם $|y_2-x|<\delta$ אזי:

$$|f(y_1)-f(y_2)|\leq|f(y_1)-f(x)|+|f(x)-f(y_2)|<\alpha$$

לכן קיבלנו $x\in G_\alpha$.

להפך, יהי $\varepsilon>0$. נניח כי $x\in\bigcap_{\alpha>0}G_\alpha$ ולכן בפרט $x\in G_\varepsilon$. לכן קיים $\delta>0$ כך שאם $|y_1-x|<\delta$ וגם $|y_2-x|<\delta$ אזי $|f(y_1)-f(y_2)|<\varepsilon$. נבחר $y_2=x$. אם $|y_1-x|<\delta$ אז $|f(y_1)-f(x)|<\varepsilon$ ולכן f רציפה בx. ■

נשים לב שאם $\alpha>\beta$ אז $G_\beta \supset G_\alpha$. ולכן: $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_{\frac{1}{n}} = \bigcap_{\alpha>0} G_\alpha$ ($x \in \bigcap_{\alpha>0} G_\alpha$. יהי $n\in\mathbb{N}$, קיים $\alpha_0 < \frac{1}{n}$, $x\in G_{\alpha_0}\subset G_{\frac{1}{n}}$ כמו כן גם להפך נכון: אם $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} G_{\frac{1}{n}}$ אז $x\in\bigcap_{\alpha>0} G_\alpha$)

תהי B קבוצת נקודות אי הרציפות של f.

$$B=[a,b]\setminus \operatorname{Cont}(f) = [a,b]\setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} G_{\frac{1}{n}} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left([a,b]\setminus G_{\frac{1}{n}}\right)$$

נסמן $B_{\frac{1}{n}}=[a,b]\setminus G_{\frac{1}{n}}$הקבוצות ה"רעות".
נראה שלכל n מתקיים $B_{\frac{1}{n}}$ ממידה אפס.

$$B_\alpha = \{x\in[a,b] \mid \forall\delta>0\ \exists y_1,y_2,\ |y_1-x|<\delta \ \wedge\ |y_2-x|<\delta \Rightarrow |f(y_1)-f(y_2)|\geq\alpha\}$$

נראה שלכל $\alpha>0$ מתקיים B_α ממידה אפס.
יהי $\varepsilon_1>0$ נתון. קיימת חלוקה P של $[a,b]$ כך ש $U(f,P)-L(f,P)<\varepsilon_1$. נשים לב כי:

$$U(f,P)-L(f,P)=\sum_{I\ \text{קטע חלוקה}}\left(\sup_I f-\inf_I f\right)\cdot|I|$$

יהי I קטע חלוקה, נאמר ש I **קטע רע** אם $I\cap B_\alpha\neq\emptyset$ כאשר אנחנו מתיחסים לקטע הפתוח של I, ואילו **קטע טוב** אם $I\cap B_\alpha=\emptyset$, שוב, קטע פתוח. נשים לב כי:

$$\sum_{I\ \text{קטע חלוקה}}\left(\sup_I f-\inf_I f\right)\cdot|I| =$$

$$\sum_{I\ \text{קטע רע}}\left(\sup_I f-\inf_I f\right)\cdot|I| + \sum_{I\ \text{קטע טוב}}\left(\sup_I f-\inf_I f\right)\cdot|I| \geq$$

$$\sum_{I\ \text{קטע רע}}\left(\sup_I f-\inf_I f\right)\cdot|I| \geq \alpha\sum_{I\ \text{קטע רע}}|I|$$

ולכן קיבלנו: $\sum_{I\ \text{קטע רע}} < \frac{\varepsilon_1}{\alpha}$. אבל נשים לב: $\underbrace{P}_{\text{נקודות החלוקה}} \cup \bigcap_{I\ \text{קטע רע}} I \supset B_\alpha$. יהי N מספר הנקודות בחלוקה P:

$$I_t=\left(t-\frac{\varepsilon_1}{2\alpha N},t+\frac{\varepsilon_1}{2\alpha N}\right)$$

$$B_\alpha\subset\bigcup_{\text{קטע רע}} I \bigcup_{t\in P} I_t$$

$$\sum_{I\ \text{קטע רע}}|I|+\sum_{t\in P}|I_t|<\frac{2\varepsilon_1}{\alpha}$$

יהי $\varepsilon>0$, נגדיר $\varepsilon_1=\frac{\alpha\varepsilon}{2}$. קיימת חלוקה P שמתאימה ל ε_1 ואז B_αמכוסה ע"י אוסף (סופי) של קטעים שאורכם הכולל קטן מε. ומכאן נובע כי B_α ממידה אפס.

$$B=\bigcup_{n=1}^{\infty} B_{\frac{1}{n}}$$

תרגיל: B איחוד בן מנייה של קבוצות ממידה אפס, ולכן B ממידה אפס.

■

משפט 8.31

אם f אינטגרבילית אז f "כמעט רציפה".
המשפט הזה עדיי ונכון עבור אינטגרביליות לבג.

משפט 8.32

ההפך הוא גם נכון. כלומר אם קבוצת נקודות אי הרציפות של f היא ממידה אפס ו f חסומה ב$[a,b]$ אז f אינטגרבילית רימן.

07/04/11

חלק IV
סדרות של פונקציות

9 סדרות של פונקציות

יהי $\mathbb{R} \supset I$ קטע סופי/אינסופי/סגור/פתוח/חצי פתוח... (במילים אחרות כל סוג קטע אפשרי). נרצה לבחון את:

$$f_n : I \to \mathbb{R}\ (n \in \mathbb{N})$$

סדרה של פונקציות מוגדרות ב I.
מהו גבול של סדרה של פונקציות?

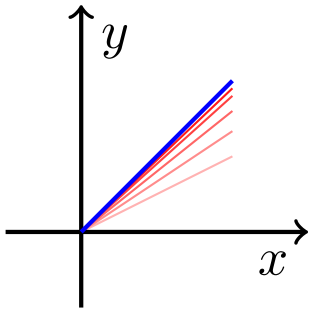
הגדרה 9.1 תהי $f_n : I \to \mathbb{R}$ ותהי $f : I \to \mathbb{R}$. נאמר שהסדרה f_n מתכנסת ל f נקודתית אם לכל $x \in I$ מתקיים:

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$$

(סדרה של מספרים).
נרשום: $f_n \overset{\text{נקודתית}}{\longrightarrow} f$

דוגמה 9.2 $f_n(x) = x - \frac{x}{n}$ בקטע $[0,1]$. נשים לב כי:

$$f_1(x) = 0,\ f_2(x) = \frac{x}{2},\ f_3(x) = \frac{2}{3}x,\ f_n(1) = 1 - \frac{1}{n}$$



ופונקציית הגבול היא:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x$$

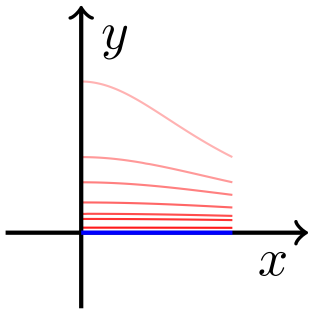
דוגמה 9.3 $f_n(x) = \frac{1}{x^2+n}$ כאשר $0 \le x \le 1$.

$$f_1(x) = \frac{1}{x^2+1}$$

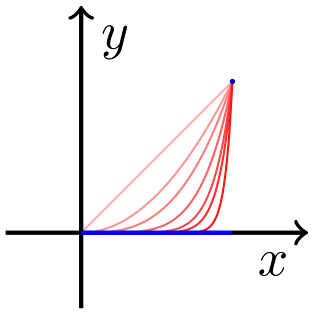
נשים לב כי:

$$\forall x \; f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

ולכן פונקציית הגבול היא: $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.



דוגמה 9.4 $f_n(x) = x^n$ כאשר $0 \le x \le 1$.
נשים לב כי לכל $0 \le x < q$ מתקיים $x^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. ואילו עבור $x = 1$ מתקיים $x^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.



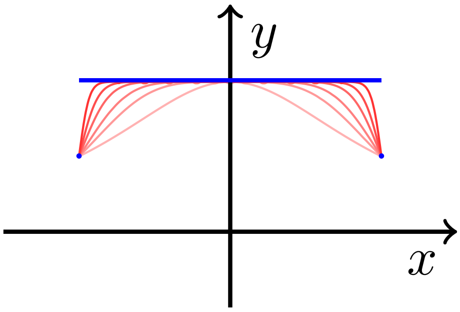
אם כן, פונקציית הגבול f היא:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

נשים לב שלמרות ש f_n היא סדרה של פונקציות רציפות, פונקציית הגבול f לא רציפה.

דוגמה 9.5 $f_n\left(x\right)=\frac{1}{1+x^{2n}}$ נשים לב כי $f_n\left(0\right)=1$ ואילו $f_n\left(\pm1\right)=\frac{1}{2}$. כמו כן:

$$\frac{1}{1+x^{2n}}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}1$$



עבור כל ערך אחר של $|x|<1$. אם כן פונקציית הגבול היא:

$$f\left(x\right)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ \frac{1}{2} & |x|=1\end{cases}$$

ושוב איבדנו את הרציפות.

דוגמה 9.6 $f_n(x)=|x|^{1+\frac{1}{n}}$ בקטע $[-1,1]$.

$$\begin{aligned}f_1\left(x\right) &= |x|^2=x^2=x^{\frac{3}{2}}\left|x\right|^{\frac{1}{2}}\\ f_2\left(x\right) &= |x|^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

$$|x|^{1+\frac{1}{n}}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}|x|$$

ולכן פונקציית הגבול היא: $|x|$. נשים לב שבמקרה זה פונקציית הגבול רציפה ולא גזירה ואילו:

$$f_n'\left(0\right)=\lim_{h\to0}\frac{f_n\left(h\right)-f_n\left(0\right)}{h}=\lim\frac{|h|^{1+\frac{1}{h}}}{h}=\lim_{h\to0}|h|^{\frac{1}{h}}\cdot\frac{|h|}{h}=0$$

כלומר מצאנו סדרה של פונקציות גזירות ששואפת לפונקציה רציפה ולא גזירה.

שאלות טבעיות על גבול של פונקציות:

- נניח $f\overset{\text{נקודתית}}{\longrightarrow}f_n$. האם: $f'\overset{\text{נקודתית}}{\longrightarrow}f_n'$?
- נניח $f\overset{\text{נקודתית}}{\longrightarrow}f_n$. האם: $\int_I f\left(x\right)\mathrm{d}x\overset{\text{נקודתית}}{\longrightarrow}\int_I f_n\left(x\right)\mathrm{d}x$?
- נניח $f\overset{\text{נקודתית}}{\longrightarrow}f_n$. האם: $\sup_I f\longrightarrow\sup_I f_n$?
- נניח $f\overset{\text{נקודתית}}{\longrightarrow}f_n$ ו f_n רציפות/גזירות/אינטגרביליות. האם f רציפה? גזירה? אינטגרבילית? (רציפה וגזירה כבר שללנו)

ננסה לענות על השאלה האם $\sup_I f_n \longrightarrow \sup_I f$?

נעבור על הדוגמאות שראינו.

1. במקרה של דוגמה 9.2 ($f_n(x) = x - \frac{x}{n}$) נשים לב כי: $\sup_I f_n = 1 - \frac{1}{n},\ \sup_I f = 1$ ובאמת מתקיים $1 - \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$.
2. במקרה של דוגמה 9.3 ($f_n(x) = \frac{1}{x^2+n}$) נשים לב כי: $\sup_I f_n = \frac{1}{n},\ \sup_I f = 0$ ובאמת מתקיים $\frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.
3. במקרה של דוגמה 9.4 ($f_n(x) = x^n$) נשים לב כי: $\sup_I f_n = 1,\ \sup_I f = 1$ ובאמת מתקיים $1 \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$. ואילו אותה דוגמה בקטע הפתוח $(0,1)$ נקבל:

$$\sup_{(0,1)} f_n = 1,\ \sup_{(0,1)} f = 0$$

בשונה להתכנסות.

האם קיימת דוגמה בקטע סגור שבה $\sup f_n \not\longrightarrow \sup f$?
כן, פונקצייה עם משולשים מאפס לאחד וחוזרים לאפס אשר נראה בשיעור הבא.

10/04/11

טענה 9.7

החומר קשה!

הוכחה: עד אמצע המאה ה19 המתמטיקאים חשבו שכל סדרה מתכנסת נקודתית של פונקציות מתכנסת לפונקצייה רציפה.

קושי הוכיח משפט ב 1821 שהתגלה כלא נכון רק ב 1853. ורק ב1853 גילו שיש צורך במושג התכנסות נוסף. ■

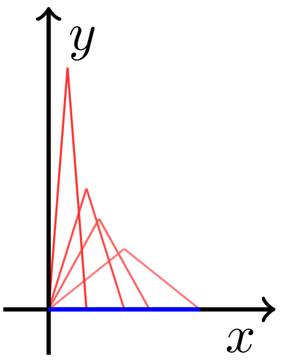
מסקנה 9.8

לעבור על ההרצאה אחרי!

ועכשיו בחזרה לרצינות.

דוגמה 9.9 הפונקציה $f_n [0,1] \to \mathbb{R}$ המוגדרת באופן הבא:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ n^2\left(\frac{2}{n} - x\right) & \frac{1}{n} \le x \le \frac{2}{n} \\ 0 & \frac{2}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$



נשים לב כי:

$$\forall x\ f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

יהי $x\in(0,1]$ קיים N כך שלכל $n>N$: $x<\frac{2}{n}$. עבור $n>N$ $f_n(x)=0$. עבור $x=0$ $f_n(0)=0$ לכל n.
נשים לב כי:

$$\sup_{[0,1]} f_n = n \Rightarrow \sup_{[0,1]} f_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$$

ואילו $\sup\limits_{[0,1]} f=0$ (כיוון ש $f(x)=0$).

מסקנה 9.10

מושג הגבול הנקודתי לא שומר על רציפות/גזירות/sup.

דוגמה 9.11 האם גבול האינטגרל נשמר? כלומר האם:

$$\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

נשתמש באותה פונקציה כמו בדוגמה 9.9 ונקבל:

$$\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n}\cdot n = 1$$

ואילו:

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$$

מסקנה 9.12

גבול האינטגרלים איננו האינטגרל של פונקציית הגבול.

9.1 אינטגרביליות

דוגמה 9.13 נתבונן בפונקציה:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & n!\cdot x\in\mathbb{Z} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

עבור $0\le x\le 1$. אם x אי רציונלי, $\forall n\ f_n(x)=0$ ואז $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. אם $x=\frac{p}{q}$ רציונלי. עבור $n>q$ $n!\frac{p}{q}$ מספר שלם. כלומר:

$$\forall n>q\ f_n(x)=1 \Rightarrow f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

אם כן $\chi_{\mathbb{Q}}(x) \overset{\text{נקודתית}}{\longrightarrow} f_n$ כאשר $\chi_{\mathbb{Q}}$ היא פונקציית דיריכלה. כלומר:

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

ואנו יודעים כי $\chi_{\mathbb{Q}}$ לא אינטגרבילית רימן.
ואילו f_n אינטגרבילית כי יש לה מספר סופי של נקודות אי רציפות:

$$\frac{1}{n!}, \frac{2}{n!}, \frac{3}{n!}, \dots, \frac{n!}{n!}$$

אם כן מצאנו סדרה של פונקציות אינטגרביליות עם גבול לא אינטגרבילי רימן.

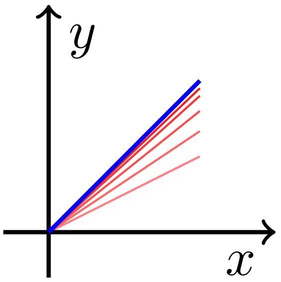
דוגמה 9.14 סדרת פונקציות לא אינטגרביליות עם גבול אינטגרבילי:

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\chi_{\mathbb{Q}}$$

9.2 התכנסות במידה שווה

הגדרה 9.15 יהיו $f_n : I \to \mathbb{R}$ ו $f : I \to \mathbb{R}$. נאמר שהסדרה $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנס ל f **במידה שווה** בI אם $\sup_I |f_n - f| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. נרשום: $f_n \overset{\text{במ"ש}}{\longrightarrow} f$.

דוגמה 9.16 $f_n(x) = x - \frac{x}{n} = x\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ בקטע $[0,1]$



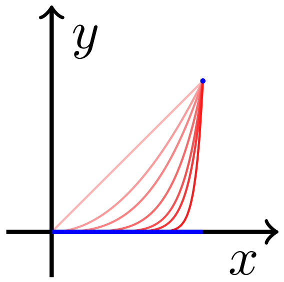
$$\forall x \; f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$$

כאשר $f(x) = x$.

$$\sup_{[0,1]} |f_n - f| = \sup_{x\in[0,1]} \left| x - \frac{x}{n} - x \right| = \sup_{x\in[0,1]} \frac{|x|}{n} = \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

לכן $f_n \overset{\text{במ"ש}}{\longrightarrow} f$ בקטע $[0,1]$.

דוגמה 9.17 $f_n(x) = x^n$ בקטע $[0,1]$.



הראנו כבר בדוגמה 9.4 כי הסדרה מתכנסת ל:

$$f(x)=\begin{cases}0 & 0\le x<1\\ 1 & x=1\end{cases}$$

נשים לב כי:

$$\forall 0\le x<1\ \left|f_n(x)-f(x)\right|=\left|x^n-0\right|=x^n$$

$$\left|f_n(1)-f(1)\right|=0$$

$$\sup_{x\in[0,1]}\begin{cases}x^n & 0\le x<1\\ 0 & x=1\end{cases}=1$$

$\sup\limits_{x\in[0,1]}\left|f_n(x)-f(x)\right|=1$ לכן f_n לא מתכנסת ל f במידה שווה.

9.2.1 משמעות השם "במידה שווה"

נרצה להבחין מתי $\sup\limits_I |g-f|<\varepsilon$?

$f\overset{\text{במ"ש}}{\longrightarrow}f_n$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $N>0$ כך שלכל $n>N$ הגרף של f_n נמצא ברדיוס ε מסביב לגרף של f.

טענה 9.18

אם $f\overset{\text{במ"ש}}{\longrightarrow}f_n$ בI אז: $f\overset{\text{נקודתית}}{\longrightarrow}f_n$.

הוכחה: יהי $x\in I$. צ"ל $f(x)\overset{\text{נקודתית}}{\longrightarrow}f_n(x)$.

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|\le\sup_I\left|f_n-f\right|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0\Rightarrow f_n(x)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}f(x)$$

■

9.2.2 משמעות השם 2

הגדרה 9.19 התכנסות נקודתית: $f(x)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}f_n(x)\ \forall x$ כלומר:

$$\forall x\in I\ \forall\varepsilon>0\ \exists N(x,\varepsilon)\ \forall n>N\quad \left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon$$

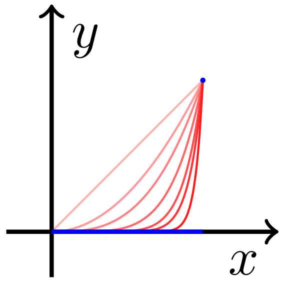
הגדרה 9.20 התכנסות במ"ש: $f(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sup_I |f_n - f|$ כלומר:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists N\ \forall n>N \quad \sup|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \Rightarrow$$
$$\forall\varepsilon>0\ \exists \underline{N(\varepsilon)}\ \forall n>N\ \forall x\in I \quad \sup|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$$

(ההבדל הוא בכך ש N תלוי רק בε ולא תלוי גם בx).

הערה 9.21 <u>אין קשר בין התכנסות במ"ש לרציפות במ"ש!</u>

דוגמה 9.22 שוב נתבונן בפונקציה $f_n(x)=x^n$ בקטע $[0,1]$.

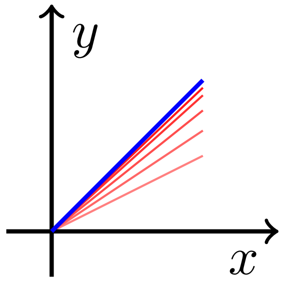


לכל $\varepsilon>0$ ולכל x נחפש N כך שלכל $n>N$ מתקיים: $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.
נבחר $0<x<1$:

$$|x^n-0|<\varepsilon \Rightarrow n\cdot\ln(x)<\ln(\varepsilon)\Rightarrow n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln(x)}$$

נבחר $N=\frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(x)}$. עבור $n>N$ מתקיים $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. כאשר $x\to 1$ נקבל כי $N\to\infty$ לכן לא קיים N שמתאים לכל הx־ים בו־זמנית.

דוגמה 9.23 כעת נבחן שוב את הפונקציה $f_n(x)=x\left(1-\frac{1}{n}\right)$ בקטע $[0,1]$



לכל $\varepsilon>0$ ולכל $x>0$ נחפש N כך שלכל $n>N$ מתקיים

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\Rightarrow\frac{x}{n}<\varepsilon\Rightarrow n>\frac{x}{\varepsilon}$$

כלומר, אפשר לקחת $N=\frac{x}{\varepsilon}$, וכיוון ש x חסום ב1 מלמעלה נוכל לבחור $N=\frac{1}{\varepsilon}$ כך שהוא יתאים לכל הx־ים בו־זמנית.

9.2.3 קריטריון קושי להתכנסות במידה שווה

משפט 9.24 קריטריון קושי להתכנסות במידה שווה

תהי $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות, תהי f פונקציה. $f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} f$ אס"ם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $m,n > N$ מתקיים: $\sup\limits_I |f_n - f_m| < \varepsilon$.

הוכחה: כיוון ראשון:

נניח $f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} f$ בקטע I. לכן: $\sup\limits_I |f_n - f| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

יהי $\varepsilon > 0$, קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים: $\sup\limits_I |f_n - f| < \frac{\varepsilon}{2}$ ולכן:

$$f_n - f_m = f_n - f + f - f_m \Rightarrow$$
$$|f_n - f_m| \le |f_n + f| + |f + -f_m|$$

ולכן:

$$\sup_I |f_n - f_m| \le \sup_I |f_n - f| + \sup_I |f - f_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

הערה 9.25 לפי $\sup (f+g) \le \sup f + \sup g$.

כיוון שני:

נניח כי תנאי קושי מתקיים. נראה שזה גורר כי לכל x הסדרה $(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי.

יהי $\varepsilon > 0$, קיים N כך שלכל $m,n > N$ מתקיים:

$$|f_m(x) - f_n(x)| \le \sup_I |f_m - f_n| < \varepsilon$$

ולכן $f_n(x)$ סדרת קושי.

לכן, לכל x, $f_n(x)$ מתכנסת. נגדיר $f(x) := \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. לכן מצאנו f כך ש $f_n \xrightarrow{\text{נקודתית}} f$. נראה שההתכנסות היא במידה שווה:

$$|f_n(x) - f(x)| \le |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| \le$$
$$\sup_I |f_n - f_m| + |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon + |f_m(x) - f(x)|$$

קיבלנו שלכל $m,n > N$ מתקיים:

$$\forall x \quad \underbrace{|f_n(x) - f(x)|}_{\underset{m\to\infty}{\longrightarrow} |f_n(x)-f(x)|} < \varepsilon + \underbrace{|f_m(x) - f(x)|}_{\underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \varepsilon}$$

ולכן קיבלנו כי:

$$\forall x \quad \forall n > N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Rightarrow \forall n > N \quad \sup_I |f_n - f| < \varepsilon$$

כלומר $\sup |f_n - f| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ כנדרש ∎

9.2.4 דרך נוספת לראות את המושג של התכנסות במידה שווה

מתי נאמר ש $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ (כאשר x_n היא סדרה של ממשיים)?
רק כאשר $|x_n - x| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. כלומר המרחק בין x_n ל x שואף לאפס.
עבור שתי פונקציות $f, g : I \to \mathbb{R}$ נגדיר את המרחק בין f לg:

$$\operatorname{dist}(f,g) := \sup_I |f-g|$$

ונגיד ש $f \overset{\text{במ"ש}}{\longrightarrow} f_n$ אם"ם $\operatorname{dist}(f_n, f) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

דוגמה 9.26 הפונקציה $f_n(x) = x^n$ בקטע $[0,1]$
נקבל כי: $\operatorname{dist}(f_n, 0) = 1$.
לעומת זאת בקטע $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, מה המרחק של $\operatorname{dist}(f_n, 0)$ בקטע הזה?

$$\operatorname{dist}(f_n, 0) = \frac{1}{2^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

ולכן $0 \overset{\text{במ"ש}}{\longrightarrow} f_n$ בקטע $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

משפט 9.27

1. $\operatorname{dist}(f,g) = 0 \iff f = g$
2. $\operatorname{dist}(f,g) = \operatorname{dist}(g,f)$
3. $\operatorname{dist}(f,g) + \operatorname{dist}(g,h) \geq \operatorname{dist}(f,h)$ (אי שיוויון המשולש).

13/04/11

משפט 9.28

בהינתן $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של פונקציות בקטע I. תהי $f : I \to \mathbb{R}$ כך ש $f \overset{\text{במ"ש}}{\longrightarrow} f_n$ ב I.
יהי $x_0 \in I$. אם לכל n f_n רציפה ב x_0 אז f רציפה בx_0.
(בפרט: אם f_n רציפות ב I אז f רציפה ב I)

הוכחה:

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \leq$$
$$|f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|$$

יהי $\varepsilon > 0$ נתון. לפי התכנסות במ"ש קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N$ מתקיים:

$$\sup_I |f - f_n| < \frac{\varepsilon}{3}$$

יהי $\delta > 0$ כך שאם $|x - x_0| < \delta$ אז: $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$(כיוון ש f_n רציפה בx_0).
ולכן נקבל:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}\ \text{לפי קריטריון קושי}} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(x_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}\ \text{מרציפות } f_n \text{ ב } x_0} + \underbrace{|f_n(x_0) - f(x_0)|}_{<\frac{\varepsilon}{3}\ \text{לפי קריטריון קושי}} <$$
$$\frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

■

דוגמה 9.29 הסדרה x^n בקטע $[0,1]$ לא מתכנסת במ"ש כי פונקציית הגבול הנקודתית איננה רציפה ואילו f_n רציפות.

תזכורת 9.30 ראינו בדוגמה (9.11) סדרה של פונקציות f_n ופונקציה f כך ש: $f_n \xrightarrow{\text{נקודתית}} f$ ואילו $\int\limits_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$ לא מתכנס ל $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

כמו כן, ראינו בדוגמה 9.13 בה $f_n \xrightarrow{\text{נקודתית}} f$, f_n אינטגרבילית וf לא אינטגרבילית רימן.

משפט 9.31

יהי I קטע סופי. תהי $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של פונקציות אינטגרביליות רימן בקטע I. תהי $f: I \to \mathbb{R}$. נניח כי $f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} f$ בקטע I.

אז f אינטגרבילית רימן בI אם $a,b \in I$ אז:

$$\int\limits_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{4}$$

יתר על כן, אם נגדיר:

$$F_n(x) := \int\limits_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t, \quad F(x) := \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

אז $F_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} F$ בקטע $[a,b]$.

הערה 9.32 אפשר לרשום את (4) באופן הבא:

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$$

הוכחה: נניח כי הפונקציה f. צריך להוכיח כי:

$$\int\limits_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\left|\int\limits_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t - \int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int\limits_a^b [f_n(t) - f(t)]\,\mathrm{d}t\right| \le \int\limits_a^b |f_n(t) - f(t)|\,\mathrm{d}t$$

ראינו במסקנה 2.28.

יהי $\varepsilon > 0$, לפי התכנסות במ"ש קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$:

$$\sup_{[a,b]} |f_n - f| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

ולכן נקבל:

$$\left|\int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right|\le\int_a^b |f_n(t)-f(t)|\,\mathrm{d}t\le\int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\mathrm{d}t=\varepsilon$$

נשאר להראות כי f אינטגרבילית.

למה 9.33

אם $f \overset{\text{במ"ש}}{\longrightarrow} f_n$ ב־I אז: $\sup_I f \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sup_I f_n$

הוכחה: נשים לב כי:

$$\sup_I f_n-\sup_I f\le\sup_I (f_n-f)\le\sup_I |f_n-f|$$

כיוון ש $f_n=(f_n-f)+f$ ולכן $\sup f_n\le\sup(f_n-f)+\sup(f)$.

כמו כן:

$$-\sup|f-f_n|\le-\sup(f-f_n)\le\sup_I f_n-\sup_I f$$

(כיוון ש $f=(f-f_n)+f_n$)

ולכן משני אי השיוויונות נקבל:

$$\left|\sup_I f_n-\sup_I f\right|\le\sup_I|f_n-f|$$

יהי $\varepsilon>0$. קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N$ מתקיים: $\sup_I|f_n-f|<\varepsilon$ ולכן:

$$\left|\sup_I f_n-\sup_I f\right|<\varepsilon$$

ולכן $\sup_I f \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sup_I f_n$ כנדרש. ■

למה 9.34

אם $f \overset{\text{במ"ש}}{\longrightarrow} f_n$ בקטע I אז $\inf_I f \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \inf_I f_n$.

הוכחה: $f \overset{\text{במ"ש}}{\longrightarrow} f_n$ בקטע I ולכן $-f \overset{\text{במ"ש}}{\longrightarrow} -f_n$ בקטע I.

$$-\inf_I f_n=\sup_I(-f_n)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\sup_I(-f)=-\inf_I$$

כלומר קיבלנו כי:

$$\inf_I f_n\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\inf_I f$$

כנדרש ■

תרגיל: מצאו דוגמה לסדרה f_n כך ש $f \overset{\text{נקודתית}}{\longrightarrow} f_n$ וגם $\sup_I f \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sup_I f_n$ אבל f_n לא מתכנס ל f במ"ש ב I.

בחזרה להוכחת האינטגרביליות של f.

תהי P חלוקה של הקטע $[a,b]$

$$U(f,P)-L(f,P)= \\ U(f,P)-U(f_n,P)+U(f_n,P)-L(f_n,P)+L(f_n,P)-L(f,P)$$

נשים לב כי:

$$|U(f,P)-U(f_n,P)|=\left|\sum_{k=1}^{M}\left(\sup_{I_k} f-\sup_{I_k} f_n\right)|I_k|\right|\leq \\ \sum_{k=1}^{M}\left|\sup_{I_k} f-\sup_{I_k} f_n\right|\cdot|I_k|$$

בהוכחת למה 9.33 ראינו כי:

$$\leq\sum_{k=1}^{M}\sup_{I_k}|f-f_n|\cdot|I_k|\leq\sum_{k=1}^{M}\sup_{I}|f-f_n|\cdot|I_k|$$

(sup על כל הקטע I בהכרח גדול יותר מ-sup על ה"תת קטע" I_k)

$$=\sup_I|f-f_n|\cdot\sum_{k=1}^{M}|I_k|=\sup_I|f-f_n|(b-a)$$

אם כן, בהינתן $\varepsilon>0$, קיים N_1 כך שלכל $n>N_1$ מתקיים:

$$\sup_I|f-f_n|<\frac{\varepsilon}{3(b-a)}$$

ולכן $U(f,P)-U(f_n,P)<\frac{\varepsilon}{3}$ לכל חלוקה P של הקטע $[a,b]$.
באופן דומה:

$$|L(f_n,P)-L(f,P)|=\left|\sum_{k=1}^{M}\left(\inf_{I_k} f_n-\inf_{I_k} f\right)|I_k|\right|\leq \\ \sum_{k=1}^{M}\sup_{I_k}|f_n-f|\cdot|I_k|$$

(מכיוון ש $\inf g=-\sup g$)

$$\leq\sup_I|f_n-f|\cdot(b-a)<\frac{\varepsilon}{3}$$

כיוון ש f_n אינטגרבילית אזי לפי קריטריון רימן קיימת חלוקה P כך ש:

$$U(f_n,P)-L(f_n,P)<\frac{\varepsilon}{3}$$

ואז מתקיים:

$$|U(f,P)-L(f,P)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon$$

נשאר להוכיח התכנסות במ"ש של F_n.

$$F_n(x) := \int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t, \quad F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$|F_n(x) - F(x)| = \left|\int_a^x f_n(t) - f(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_a^x |f_n(t) - f(t)|\,\mathrm{d}t \le$$

$$\int_a^b |f_n(t) - f(t)|\,\mathrm{d}t$$

לכן אם נבחר N כך שלכל $n > N$ מתקיים: $\sup\limits_{[a,b]} |f_n - f| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ נקבל:

$$\forall n > N \quad \forall x \in [a,b] \quad |F_n(x) - F(x)| < \varepsilon$$

ולכן:

$$\forall n > N \quad \sup_{[a,b]} |F_n - F| < \varepsilon$$

כנדרש. ■

דוגמה 9.35 $f_n(t) = \frac{1}{n}$ בקטע $[0,\infty)$. נשים לב כי $f_n \overset{\text{במ"ש}}{\longrightarrow} 0$ בקטע $[0,\infty)$.

$$F(x) = \int_a^x 0\mathrm{d}t = 0, \quad F_n(x) = \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{x}{n}$$

נשים לב כי $F_n \overset{\text{נקודתית}}{\longrightarrow} F$ אבל לא במידה שווה בקטע $[0,\infty)$. כיוון ש $\sup\limits_{[0,\infty)} |F_n - F| = \infty$.

נשים לב כי $F_n \overset{\text{במ"ש}}{\longrightarrow} F$ בכל קטע **<u>סופי</u>** $[a,b]$.

9.2.5 נגזרות והתכנסות במ"ש

דוגמה 9.36 $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}$ בקטע $[0,\infty)$. $f(x) \equiv 0$ גבול נקודתי.

$$\sup_{[0,\infty)} \left|\frac{\sin(nx)}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

לכן $f_n \overset{\text{במ"ש}}{\longrightarrow} 0$ בקטע $[0,\infty)$.

$$f_n'(x) = \sqrt{n}\cos(nx), \quad f'(x) = 0$$

f_n' לא מתכנסת אפילו נקודתית ב $[0,\infty)$ (כיוון ש $f_n'(0) = \sqrt{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$)

דוגמה 9.37 בדוגמה 9.6 ראינו כי הפונקציה $f_n(x) = |x|^{1+\frac{1}{n}}$ בקטע $[-1,1]$ גזירה לכל f_n ואילו f לא גזירה.

נראה ש f_n מתכנסת לf במ"ש ב $[-1,1]$.

תחילה נראה ש f_n מתכנסת ל f במ"ש בקטע $[0,1]$ (ואז מסימטריה הטענה תהיה נכונה גם ל $[-1,0]$):

$$\left|x^{1+\frac{1}{n}} - x\right| = \left(x - x^{1+\frac{1}{n}}\right) = x\left(1 - x^{\frac{1}{n}}\right)$$

נשים לב כי $x \geq x\left(1 - x^{\frac{1}{n}}\right)$ וגם $\left(1 - x^{\frac{1}{n}}\right) \geq x\left(1 - x^{\frac{1}{n}}\right)$. יהי $\varepsilon > 0$ נתון. לכל n מתיים:

$$\forall x < \varepsilon \quad \left|x^{1+\frac{1}{n}} - x\right| \leq x < \varepsilon$$

לאילו n־ים מתקיים: $\left(1 - x^{\frac{1}{n}}\right) < \varepsilon \quad \forall x > \varepsilon$?

$$x^{\frac{1}{n}} > 1 - \varepsilon$$

$$\frac{1}{n}\ln x > \ln(1-\varepsilon) \Rightarrow -\frac{1}{n}\ln\frac{1}{x} > -\ln\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right) \Rightarrow \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{x}\right) < \ln\frac{1}{1-\varepsilon}$$

$$n > \frac{\ln\frac{1}{x}}{\ln\frac{1}{1-\varepsilon}}$$

נבחר $N = \frac{\ln\frac{1}{\varepsilon}}{\ln\frac{1}{1-\varepsilon}}$ אם $x > \varepsilon$ אז $\ln\frac{1}{\varepsilon} > \ln\frac{1}{x}$ ולכן $\left(1 - x^{\frac{1}{n}}\right) < \varepsilon$ לכל $n > N$ ולכל $x > \varepsilon$.

$$\forall n > N \quad \forall x > \varepsilon \quad \left|x^{1+\frac{1}{n}} - x\right| < \varepsilon, \quad \forall x < \varepsilon \quad \left|x^{1+\frac{1}{n}} - x\right| < \varepsilon$$

ולכן:

$$\forall x \in [0,1] \quad \left|x^{1+\frac{1}{n}} - x\right| < \varepsilon$$

נשים לב ש $f'_n(x) = x^{\frac{1}{n}}$ בקטע $[0,1]$ לא מתכנסת במידה שווה בקטע $[0,1]$.

$$f'_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 0 & x = 0 \\ 1 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

התכנסות הנגזרות איננה במידה שווה.

01/05/2011

תזכורת 9.38 $\mathbb{R}$ $(f_n): I \to \mathbb{R}$ סדרה של פונקציות בקטע I. $f: I \to \mathbb{R}$. נאמר ש $f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} f$ בI אם: $\sup_I |f_n - f| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

1. אם f_n רציפות ו־ $f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} f$ ב I אז f רציפה.

2. אם f_n אינטגרביליות ו $f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} f$ בI אז f אינטגרבילית. יהי $x_0 \in I$ אם נגדיר: $F_n(x) := \int_{x_0}^{x} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ ו: $F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ אז $F_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} F$ בקטע I. ובפרט:

$$\forall x\in I \quad \int_{x_0}^{x} f_n(t)\,\mathrm{d}t \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$$

כמו כן ראינו דוגמה שבה $f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} f$ בקטע I כך ש f_n גזירות אבל f כלל לא גזירה.

תרגיל: נגדיר $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$ $\forall x\in\mathbb{R}$. הוכיחו שהסדרה (f_n) מתכנסת במידה שווה ב$\mathbb{R}$ אבל השיוויון $f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ נכון עבור $x \neq 0$ אבל לא נכון עבור $x=0$.

משפט 9.39

תהי $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של פונקציות גזירות בקטע I. יהי $x_0 \in I$. נניח כי:

1. קיימת g כך ש $f_n' \xrightarrow{\text{במ"ש}} g$ בקטע I.
2. הסדרה $f_n(x_0)$ מתכנסת.

אז (f_n) מתכנסת במידה שווה בקטע I. ואם נסמן את הגבול ב f אז $f' = g$.

הערה 9.40 השיוויון $f' = g$ ניתן לרישום כ:

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} f_n'$$

הוכחה: לשם הפשטות נניח ש f_n' פונקציות רציפות.

מתקיים: $\int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,\mathrm{d}t = f_n(x) - f_n(x_0)$. נסמן $G(x) := \int_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t$.

מהמשפט על אינטגרציה של סדרות מתכנסת במ"ש נקבל (f_n' אינטגרביליות כיוון שזוהי פונקציית נגזרת של פונקציה):

$$f_n - f_n(x_0) \xrightarrow{\text{במ"ש}} G$$

בקטע I (אנחנו מתייחסים ל $f_n(x_0)$ כפונקציה קבועה).

קיים $L \in \mathbb{R}$ כך ש $f_n(x_0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L$ (נתון 2).

ע"י חיבור נקבל:

$$f_n \xrightarrow{\text{במ"ש}} G + L$$

בקטע I (כיוון שנוכל לחשוב על התכנסות סדרת המספרים $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L$ בהתכנסות במ"ש של פונקציות קבועות).

הערה 9.41 של המחבר: בדומה לאריתמטיקה של גבולות.

ולכן קיבלנו שהסדרה $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש בקטע I כך ש $f = G + L$. נשים לב כי $f' = G'$. אבל מאחר ש g רציפה אז $g = G'$ מהמשפט היסודי. ■

מסקנה 9.42

תהי $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של פונקציות גזירות. נניח ש $f_n \overset{\text{נקודתית}}{\longrightarrow} f$ ואילו $f_n' \overset{\text{במ"ש}}{\longrightarrow} g$ בI. ולכן: $f_n \overset{\text{במ"ש}}{\longrightarrow} f$ בקטע I ו: $f' = g$.

הערה 9.43 במסגרת הקורס לא נוכיח את המשפט עבור נגזרות לא רציפות כיוון שההוכחה הרבה יותר מסורבלת.

הגדרה 9.44 תהי $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ אם $\forall x \quad f_1(x) \le f_2(x) \le f_3(x) \le \ldots$ נאמר ש $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה של פונקציות.

משפט דיני

משפט 9.45 משפט דיני

תהי $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית עולה של פונקציות רציפות בקטע סגור וחסום I. נניח ש f_n מתכנסת נקודתית לפונקציה רציפה f. אזי $f_n \overset{\text{במ"ש}}{\longrightarrow} f$ בI .

הוכחה: אנו רוצים להוכיח התכנסות במ"ש לכן נרצה להתבונן בסדרת המספרים: $\sup_I |f_n - f| = \sup_I (f - f_n)$ (כיוון ש f_n מונוטונית עולה). נסמן:

$$a_n = \sup_I (f - f_n)$$

הסדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית יורדת וכמו כן לכל $a_n \ge 0$. לכן קיים $L \in \mathbb{R}$ כך ש $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L$. נרצה להראות כי $L = 0$ (נשים לב כי אנו כבר יודעים כי $L \ge 0$). לפי משפט ויירשטראס $a_n = \max_I (f - f_n)$. תהי $x_n \in I$ כך ש:

$$f(x_n) - f_n(x_n) = \max_I (f - f_n)$$

אנו יודעים כי: $f(x_n) - f_n(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L$. לפי משפט בולצ'אנו־ויירשטראס קיימת תת סדרה $x_{n_k} \in I$ כך ש $x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_0$. אנו יודעים כי:

$$f(x_{n_k}) - f_{n_k}(x_{n_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{5}$$

$$x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} x_0 \tag{6}$$

$$f(x_{n_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0) \qquad f \text{ רציפה} \tag{7}$$

נרצה להראות ש $f_{n_k}(x_{n_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0)$.

נשים לב כי ע"י חיסור של (5) מ: (7) נקבל:

$$f_{n_k}(x_{n_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0) - L$$

כמו כן נשים לב כי ממונוטוניות $(f_n)_{n=1}^{\infty}$

$$\forall n \quad \forall x \quad f_n(x) \le f(x) \Rightarrow f_{n_k}(x_{n_k}) \le f(x_{n_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(x_0)$$

ולכן:

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}\left(x_{n_k}\right) \leq f\left(x_0\right)$$

נקבע k_0 טבעי כך שלכל $k > k_0$ מתקיים (ממונוטוניות הסדרה):

$$f_{n_{k_0}}\left(x_{n_k}\right) \leq f_{n_k}\left(x_{n_k}\right)$$

כמו כן נשים לב כי: $f_{n_{k_0}}\left(x_0\right) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} f_{n_{k_0}}\left(x_{n_k}\right)$. ולכן:

$$f_{n_{k_0}}\left(x_0\right) \leq \lim_{k\to 0} f_{n_k}\left(x_{n_k}\right)$$

עכשיו נקח גבול כאשר $k_0 \to \infty$ ונקבל:

$$f\left(x_0\right) \leq \lim_{k\to 0} f_{n_k}\left(x_{n_k}\right)$$

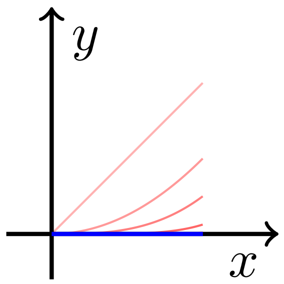
מצד שני:

$$f\left(x_0\right) - L = \lim_{k\to 0} f_{n_k}\left(x_{n_k}\right) \geq f\left(x_0\right)$$

ולכן $L \leq 0$.

לסיכום $L \leq 0$ וגם $L \geq 0$ ולכן $L = 0$. כלומר $f \overset{\text{במ"ש}}{\longrightarrow} f_n$ בקטע I כנדרש. ■

דוגמה 9.46 הסדרה: $f_n\left(x\right) = x^n$ בקטע $\left[0, \frac{1}{2}\right]$



הסדרה הנ"ל מונוטונית יורדת לאפס, הקטע $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ סגור וחסום. וכמו כן 0 פונקצייה רציפה, f_n רציפות.

ולכן לפי משפט דיני: $0 \overset{\text{במ"ש}}{\longrightarrow} f_n$ בקטע $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

תרגיל: תהי $f \overset{\text{במ"ש}}{\longrightarrow} f_n$ במ"ש בקטע I. תהי $\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ סדרה כך ש $\forall n\ x_n \in I$. יהי $x_0 \in I$ ומתקיים $x_n \to x_0$. אזי: $f\left(x_0\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f_n\left(x_n\right)$

כמו כן, מצאו דוגמה שמראה שהתכנסות נקודתית אינה מספיקה למסקנה.

תרגיל: f_n סדרה מונוטונית עולה של פונקציות רציפות ב I. $f \overset{\text{נקודתית}}{\longrightarrow} f_n$. $I \ni x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0 \in I$. הסיקו:

$$f_n\left(x_n\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f\left(x_0\right)$$

(באופן ישיר ללא שימוש במשפט דיני)

10 טורים של פונקציות

הגדרה 10.1 התכנסות במידה שווה: תהי $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה של פונקציות בקטע I. נביט בטור: $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$. נאמר שהטור מתכנס במ"ש בקטע I לפונקצייה g אם סדרת הפונקציות של הסכומים החלקיים מתכנסת במ"ש ב I ל g.

דוגמה 10.2 טור פונקציות $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ ב $\mathbb{R}$.

10.1 מבחן הM של ויירשטראס

משפט 10.3 מבחן הM של ויירשטראס

נניח שקיימת סדרה של מספרים M_k כך ש $|f_k(x)| \leq M_k$ $\forall x \in I$ ונניח ש $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ מתכנס אז $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ מתכנס במ"ש בI.

הוכחה: נסמן את סדרת הסכומים החלקיים: $S_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$. נעזר בקריטריון קושי:

$$\sup_I |S_n - S_m| = \sup_I \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k \right| \leq \sup_I \sum_{k=m+1}^{n} |f_k| \leq$$

$$\sum_{k=m+1}^{n} \sup |f_k| \leq \sum_{k=m+1}^{n} M_k$$

יהי $\varepsilon > 0$. מכיוון ש $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ מתכנס אזי לפי קריטריון קושי קיים $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $m, n > N$ $\sum_{k=m+1}^{n} M_k < \varepsilon$.

ולכן נקבל שלכל $m, n > N$ מתקיים:

$$\sup_I |S_n - S_m| < \varepsilon$$

לכן לפי קריטריון קושי, סדרת הפונקציות f_n מתכנסת במ"ש בI. ■

דוגמה 10.4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$. ע"י השוואה אפשר לראות שהטור מתכנס בהחלט ב $\mathbb{R}$. אפשר לחסום את $|\sin(nx)| \leq 1$ ולכן:

$$\frac{|\sin(n)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$$

והרי $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ מתכנס. לכן לפי משפט ההשוואה $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^2}$ מתכנס בהחלט, ולכן מתכנס.

ממבחן ויירשטראס נקבל ש $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n^2}$ מתכנס במ"ש ב $\mathbb{R}$. ($M_k=\frac{1}{k^2}$ אזי $\sum\limits_{k=1}^{\infty}M_k=$ והרי זהו טור מתכנס) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$

דוגמה 10.5 תהא φ פונקציה רציפה כלשהי כך ש $|\varphi|\le 1$. נשים לב שטור הפונקציות:

$$f(x):=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n\varphi(4^nx)$$

מתכנס נקודתית בהחלט.
ממבחן הM של ויירשטראס נקבל שהטור מתכנס במ"ש ב$\mathbb{R}$. כיוון ש:

$$\forall x\quad\left|\left(\frac{3}{4}\right)^n\varphi(4^nx)\right|\le\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

נסמן $M_k=\left(\frac{3}{4}\right)^k$ והרי $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n$ מתכנס.
ולכן נוכל להסיק ש f רציפה. (כל סכום חלקי הוא פונקציה רציפה).

04/05/2011

דוגמה 10.6 a_n סדרה של מספרים ממשיים.
נגדיר $f_n(x)=a_n\sin(nx)$ נביט בטור:

$$\sum_{k=0}^{\infty}f_k(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\sin(kx)$$

נרצה לדעת עבור אילו x־ים הטור הנ"ל מתכנס?
נניח ש $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|a_k|$ מתכנס. לפי מבחן הM של ויירשטראס הטור $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k\sin(kx)$ מתכנס במ"ש ב$\mathbb{R}$. לכן הפונקציה $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k\sin(kx)$ היא רציפה.
למשל אם $|a_k|\le\frac{1}{k^2}$ אז הטור מגדיר פונקציה רציפה.
באופן דומה אם $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|a_k|$ מתס וגם $\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_k$ מתכנס אז הטור:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(a_k\sin(kx)+b_k\cos(kx)\right)$$

מגדיר פונקציה רציפה ב $\mathbb{R}$. טור כזה נקרא טור Fourier (המאה ה19)

משפט 10.7 משפט *Fourier*

"הרבה מאד" פונקציות f קיימות סדרות a_n,b_n כך ש:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\sin(nx)+b_n\cos(n_x)$$

הערה 10.8 לא נוכיח את המשפט הזה. למעשה פורייה לא הוכיח אותו, הוא רק הניח אותו.

הערה 10.9 מה זה הרבה פונקציות?
למשל כל פונקציה $f \in C^2$ (גזירה פעמיים ברציפות) ניתנת לרישום כנ"ל.
פונקציות לא רציפות לא ניתנות לרישום כזה (באופן טריוויאלי). כמו כן, קיימות פונקציות רציפות אשר גם הן לא ניתנות לרישום כזה, אך לא הצגנו אותן בכיתה.

10.2 טורי חזקות

הגדרה 10.10 טור חזקות: הטור $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ נקרא טור חזקות סביב 0.

שאלה עבור אילו x־ים הטור מתכנס?

תשובה עבור $x=0$ הטור מתכנס. $f(0)=a_0$. האם ייתכן שקבוצת נק' ההתכנסות של טור תהיה המספרים השלמים? המספרים הרציונליים?

10.2.1 רדיוס התכנסות

משפט 10.11

נגדיר R ע"י הנוסחה:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

אם $|x|<R$ אז הטור מתכנס בהחלט. אם $|x|>R$ אז הטור מתבדר. אם $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$ נגדיר $R\to\infty$. ואם הוא ∞ נגדיר $R=0$.

תזכורת 10.12 מבחן השורש: נביט בטור החיובי $\sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \geq 0$. אם $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{A_n} < 1$ הטור מתכנס. אם $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{A_n} > 1$ הטור מתבדר.
למעשה אם $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{A_n} > 1$ אז A_n בכלל לא שואף לאפס ולכן גם לא מתכנס בתנאי.
יהי נתון טור מספרים $\sum\limits_{n=0}^{\infty} B_n$, B_n לא בהכרח אי שליליים. אם $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|B_n|} < 1$ אז הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty} B_n$ מתכנס בהחלט, ולכן וגם מתכנס.
לעומת זאת אם $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|B_n|} > 1$ אז $|B_n|$לא שואף לאפס ולכן B_n לא שואף לאפס.
ולכן הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |B_n|$ מתבדר וגם $\sum\limits_{n=0}^{\infty} B_n$מתבדר.
מכאן נסיק שאם $\sum\limits_{n=0}^{\infty} B_n$ מתכנס בתנאי אז $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|B_n|} = 1$ בהכרח.

הוכחה: יהי $x \in \mathbb{R}$. נתייחס לטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ כטור מספרים. לפי מבחן השורש אם $\alpha = \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} < 1$ הטור מתכנס. ואם $\alpha > 1$ הטור מתבדר.

תזכורת 10.13 מבחן השורש: נביט בטור החיובי $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$, $A_n \geq 0$. אם $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{A_n} < 1$ הטור מתכנס. אם $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{A_n} > 1$ הטור מתבדר.
למעשה אם $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{A_n} > 1$ אז A_n בכלל לא שואף לאפס ולכן גם לא מתכנס בתנאי.
יהי נתון טור מספרים $\sum_{n=0}^{\infty} B_n$, B_n לא בהכרח אי שליליים. אם $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|B_n|} < 1$ אז הטור $\sum_{n=0}^{\infty} B_n$ מתכנס בהחלט, ולכן וגם מתכנס.
לעומת זאת אם $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|B_n|} > 1$ אז $|B_n|$לא שואף לאפס ולכן B_n לא שואף לאפס.
ולכן הטור $\sum_{n=0}^{\infty} |B_n|$ מתבדר וגם $\sum_{n=0}^{\infty} B_n$מתבדר.
מכאן נסיק שאם $\sum_{n=0}^{\infty} B_n$ מתכנס בתנאי אז $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|B_n|} = 1$ בהכרח.

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{|A_n|} \cdot |x| \right) = |x| \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{|x|}{R}$$

כלומר אם $\frac{|x|}{R} < 1$ אזי הטור מתכנס בהחלט. אם $\frac{|x|}{R} > 1$ אז הטור מתבדר.
אם $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$, אז הטור הנ"ל מתכנס אז $R = \infty$ ואז הטור מתכנס לכל x (כי $\alpha = 0$).
אם $R = 0$ אז $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \infty$ ואז $\alpha = 0$ עבור $x = 0$ ו: $\alpha = \infty$ עבור $x \neq 0$.
ולכן הטור מתכנס רק עבור $x = 0$. ∎

מסקנה 10.14

קבוצת נקודות ההתכנסות של טור חזקות היא מאחת הצורות הבאות:

$$(-R, R)\,,\ [-R, R]\,,\ (-R, R]\,,\ [-R, R)\,,\ (-\infty, \infty)\,,\ \{0\}$$

הגדרה 10.15 רדיוס ההתכנסות: יהי נתון הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. $R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$ נקרא רדיוס ההתכנסות של הטור. הטור מתכנס בהחלט ב $(-R, R)$ומתבדר עבור $|x| > R$.

דוגמה 10.16 הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n = x + 2^2 x^2 + 3^3 x^3 + \ldots$$

נשים לב כי:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n} = \limsup_{n\to\infty} n = \infty$$

ומכאן $R = 0$, ולכן הטור מתכנס רק עבור $x = 0$.

דוגמה 10.17 הטור:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots$$

צריך לחשב:

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}$$

תזכורת 10.18 הראינו שאם $\frac{a_{n+1}}{a_n}\to L$ אז $\sqrt[n]{a_n}\to L$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\frac{1}{n+1}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

ולכן:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

כלומר $R=\infty$, ולכן הטור מתכנס לכל x.

דוגמה 10.19 הטור:

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+x^3$$

נשים לב כי:

$$\sqrt[n]{|a_n|}=\sqrt[n]{1}=1$$

ולכן $R=\frac{1}{1}=1$. כלומר הטור מתכנס ב $(-1,1)$. הטור מתבדר עבור $x=\pm1$.

דוגמה 10.20 הטור:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$$

נשים לב כי:

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}=1$$

כיוון ש:

$$\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}1\Rightarrow R=\frac{1}{1}=1$$

לכן הטור מתכנס בהחלט לכל $x\in(-1,1)$. הטור מתבדר עבור $x=1$, ואילו מתכנס עבור $x=-1$. ולכן הטור הנ"ל מתכנס עבור כל $x\in[-1,1)$.

משפט 10.21

אם הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ מתכנס עבור $x=\alpha$ אז הטור מתכנס בהחלט לכל $|x|<|\alpha|$.

הוכחה: רדיוס ההתכנסות של הטור $|\alpha|\geq R$ ולכן הטור מתכנס בהחלט בקטע $(-|\alpha|,|\alpha|)$ וכיוון ש $|x|<|a|$ אזי: $x\in(-|\alpha|,|\alpha|)$ ולכן מתכנס עבורו כנדרש. ■

משפט 10.22

יהי נתון $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ טור עם רדיוס התכנסות R. אז לכל $0<r<R$ הטור מתכנס במידה שווה בקטע $[-r,r]$.

הוכחה:

$$\forall x\in[-r,r]\quad |f_n(x)|=|a_nx^n|\leq|a_n|\cdot r^n$$

נשים לב כי: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n|\,r^n$ מתכנס כי: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ מתכנס בהחלט לכל $|x|<R$.
ולכן לפי מבחן הM של ויירשטראס ההתכנסות היא במ"ש בקטע $[-r,r]$. ■

מסקנה 10.23

יהי נתון $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ עם רדיוס התכנסות R. אז f רציפה בקטע $(-R,R)$.

הוכחה: מהמשפט הקודם נובע ש f רציפה בכל קטע סגור $[-r,r]$ לכל $r<R$, לכן הפונקציה רציפה בקטע הפתוח $(-R,R)$. ■

משפט 10.24 אינטגרצייה איבר־איבר

נניח ש $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ ב $(-R,R)$. אז:

$$\forall x\in(-R,R)\qquad \int\limits_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

הוכחה: נסמן $S_N(x)=\sum\limits_{n=0}^{N}a_nx^n$. יהי $r<R$. נזכור כי $f\overset{\text{במ"ש}}{\longrightarrow}S_n$ בקטע $[-r,r]$.

$$\forall x\in[-r,R]\qquad \int\limits_0^x S_N(t)\,\mathrm{d}t\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\int\limits_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\int\limits_0^x S_N(t)\,\mathrm{d}t=\int\limits_0^x\sum_{n=0}^{N}a_nt^n\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{N}a_n\int\limits_0^x t^n\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{N}a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

ולכן:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

■

דוגמה 10.25

$$\frac{1}{x+1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$$

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{1}} = 1$$

לכן הטור מתכנס ב $(-1,1)$. ולכן:

$$\int_0^x \frac{1}{1+t}\mathrm{d}t = \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

לכל $x \in (-1,1)$.

החשב את הרדיוס התכנסות של הטור שמתאים ל $\ln(1+x)$.

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$$

ולכן $R = \frac{1}{1} = 1$. ולכן הטור מתכנס ב $(-1,1]$ (במקרה של $x = 1$ מדובר בטור ההרמוני עם סימנים מתחלפים).

שאלה הטור: $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots$ מתכנס עבור $x = 1$. אבל האם: $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$?

דוגמה 10.26

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

בקטע $(-1,1)$, $R = 1$.

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

בקטע $(-1,1)$, $R = 1$.

אפשר לשאול האם: $\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$?

משפט 10.27

רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}$ הוא כמו של הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

הוכחה:

$$R=\frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}}=\limsup_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{|a_n|}}{\sqrt[n]{n+1}}=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$$

■

05/05/2011

10.2.2 טור חזקות וגזירה

משפט 10.28 גזירה איבר־איבר

תהי $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ טור חזקות בקטע $(-R,R)$. אז f גזירה ב $(-R,R)$
ומתקיים: $f'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\cdot a_nx^{n-1}$
יתר על כן, רדיוס ההתכנסות של טור הנגזרות הוא כמו רדיוס ההתכנסות של הטור המקורי.

הוכחה: נשים לב שהטור

$$\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

הוא טור חזקות. נחשב את רדיוס ההתכנסות שלו (נסמנו ב R_0):

$$\frac{1}{R_0}=\limsup_{n\to\infty}(n|a_n|)^{\frac{1}{n-1}}=\limsup_{n\to\infty}(n|a_n|)^{\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{n-1}\to 1}=$$

$$\limsup_{n\to\infty}n^{\frac{1}{n}\to 1}\cdot|a_n|^{\frac{1}{n}}=\limsup|a_n|^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{R_{orig}}$$

כאשר R_{orig} הוא רדיוס ההתכנסות המקורי.

יהי $x\in(-R,R)$. נבחר $r<R$ כך ש $x\in[-r,r]$. הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ מתכנס במידה שווה בקטע $[-r,r]$ לפונקציה רציפה g.
אנו יודעים:

$$S_N(x)=\sum_{n=0}^{N}a_nx^n\underset{N\to\infty}{\longrightarrow}f(x)$$

$$S'_N(x)=\sum_{n=1}^{N}na_nx^{n-1}\underset{N\to\infty}{\longrightarrow}g(x)$$

וכמו כן: $S'_N\overset{\text{במ"ש}}{\longrightarrow}g$ בקטע $[-r,r]$.
הוכחנו שבמקרה זה $g=f'$ בקטע $[-r,r]$ ולכן: $g(x)=f'(x)$ לכל $x\in(-R,R)$ שרירותי. ולכן נובע: $g'=f$ בקטע $(-R,R)$ ■

דוגמה 10.29 נגדיר

$$E\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\ldots$$

הראנו בדוגמה 10.17 כי רדיוס ההתכנסות הוא $R=\infty$.
נשים לב כי:

$$E'\left(x\right)=1+\frac{2}{2!}x+\frac{3}{3!}x^{2}+\ldots=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+\ldots=E\left(x\right)$$

כלומר קיבלנו: $E'=E$.

הערה 10.30 כל הפונקציות אשר $f'=f$ הן פונקציות מהמבנה $f\left(x\right)=C\cdot e^{x}$. הראנו באינפי 1, אבל כאן נראה הוכחה נוספת:
נסמן $g\left(x\right)=e^{-x}$

$$\begin{aligned}\left(g\cdot E\right)'\left(x\right)=g'\left(x\right)E\left(x\right)+g\left(x\right)\cdot E'\left(x\right)= \\ -e^{-x}E\left(x\right)+e^{-x}\cdot E^{'}\left(x\right)=e^{-x}\left(E'\left(x\right)-E\left(x\right)\right)=0\end{aligned}$$

מכאן נובע ש:

$$g\cdot E\left(x\right)=\text{const}$$

ולכן:

$$E\left(x\right)=\frac{C}{g\left(x\right)}=C\cdot e^{x}$$

כנדרש.
נשים לב גם כי:

$$E\left(0\right)=1=C\cdot e^{0}=c$$

ולכן במקרה שלנו:

$$E\left(x\right)=e^{x}$$

מסקנה 10.31

תהי $f\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}x^{n}$ (פונקציה המיוצגת ע"י טור חזקות) אזי $f\in C^{\infty}$ בקטע $\left(-R,R\right)$
(כלומר, f גזירה אינסוף פעמים בקטע $-R,R$)

הוכחה: נובע מידי מן המשפט, כיוון ש $f'\left(x\right)$ היא גם פונקציה המיוצגת ע"י טור חזקות באותו רדיוס התכנסות. ∎

משפט 10.32

יהי $\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}x^{n}$ טור חזקות מתכנס ב $\left(-R,R\right)$. נסמן $f\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{n}x^{n}$. אזי

$$a_{n}=\frac{f^{\left(n\right)}\left(0\right)}{n!}$$

הוכחה: לפי משפט 10.28 אנו יודעים כי:

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

ולכן:

$$f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

ובאופן כללי יותר:

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty}\frac{n!}{(n-k)!}a_nx^{n-k}$$

בקטע $(-R,R)$. מכאן נובע:

$$f^{(k)}(0)=a_k\frac{k!}{(k-k)!}=a_kk!\Rightarrow a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

■

10.2.3 השוואת מקדמים

משפט 10.33 השוואת מקדמים

נניח $\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_kx^k=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ בקטע $(-R,R)$ אזי $a_k=b_k$ לכל k.

הוכחה: נסמן $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kx^k$. הראינו במשפט 10.32 כי:

$$a_k=b_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

■

10.2.4 משפט טיילור

דוגמה 10.34 שאלה: האם ניתן לרשום את $\sin x$ כטור חזקות?
אם כן, אז הטור המתאים ניתן ע"י:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin^{(n)}(0)}{n!}x^n=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\dots$$

מה רדיוס ההתכנסות של הטור הנ"ל?

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[2n+1]{\frac{1}{(2n+1)!}}=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n!}}=0$$

ולכן $R=\infty$. כלומר הטור מתכנס לכל $x\in\mathbb{R}$. אבל האם הוא מתכנס ל$\sin\left(x\right)$?
בעזרת פיתוח פולינום טיילור נוכל לרשום:

$$\sin x=x-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}-\ldots\pm\frac{x^{2n-1}}{\left(2n-1\right)!}+\underbrace{R_{2n+1}\left(1\right)}_{\text{שארית}}$$

מהצגת השארית בצורת לגרנז, קיים c בין 0 לx כך של:

$$R_{2n+1}\left(x\right)=\frac{\sin^{\left(2n+1\right)}\left(c_{x,n}\right)}{\left(2n+1\right)!}x^{2n+1}$$

ולכן:

$$\left|R_{2n+1}\left(x\right)\right|\le\frac{1\left|x\right|^{2n+1}}{\left(2n+1\right)!}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

שואף לאפס כיוון ש: $q<1$ $\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}$ $\frac{a_{n+1}}{a_{n}}$ אז $a_{n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$.
לסיכום, הוכחנו:

$$\sin x=x-\frac{x^{3}}{3!}+\frac{x^{5}}{5!}-\ldots$$

לכל $x\in\mathbb{R}$.

דוגמה 10.35 מה לגבי $\cos\left(x\right)$? ממשפט הגזירה (10.28) נקבל:

$$\cos\left(x\right)=1-\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}-\ldots$$

11/05/2011

דוגמה 10.36 האם קיים פיתוח לטור חזקות של הפונקצייה $\sqrt{1+x}$? $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ או באופן כללי יותר: $\left(1+x\right)^{\alpha}$ כאשר $\alpha\in\mathbb{R}$.
נסמן $f\left(x\right)=\left(1+x\right)^{\alpha}$ נשים לב כי:

$$\begin{aligned}f'\left(x\right) & = \alpha\cdot\left(1+x\right)^{\alpha-1}\\ f''\left(x\right) & = \alpha\cdot\left(\alpha-1\right)\cdot\left(1-x\right)^{\alpha-2}\\ & \vdots\\ f^{\left(k\right)}\left(x\right) & = \alpha\cdot\left(\alpha-1\right)\cdot\left(\alpha-2\right)\cdot\ldots\cdot\left(\alpha-\left(k-1\right)\right)\left(1+x\right)^{\alpha-k}\end{aligned}$$

במידה ו $\alpha\in\mathbb{N}$ אז למעשה קיבלנו כי:

$$f^{\left(k\right)}\left(x\right)=\frac{\alpha!}{\left(\alpha-k\right)!k!}\cdot k!\cdot\left(1+x\right)^{\alpha-k}$$

ולכן נגדיר את הביטוי $\binom{\alpha}{\kappa}=\frac{\alpha\cdot\left(\alpha-1\right)\cdot\ldots\cdot\left(\alpha-\left(k-1\right)\right)}{k!}$ עבור $\alpha\in\mathbb{R}$ גם כן. ולכן:

$$f^{\left(k\right)}\left(x\right)=\binom{\alpha}{k}\cdot k!\cdot\left(1+x\right)^{\alpha-k}$$

$$f^{(k)}(0)=\binom{\alpha}{k}\cdot k!$$

לכן אם קיים פיתוח של $f(x)$ לטור חזקות אז הוא ניתן ע"י הטור:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$$

נסמן:

$$g(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$$

נבדוק תחילה שהטור $g(x)$ מתכנס בסביבה של 0: נבחין כי החישוב עם מבחן השורש: $\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|\binom{\alpha}{k}\right|}$ הוא מורכב יחסית. ננסה לפתור עם מבחן המנה:

$$\left|\frac{\binom{\alpha}{k+1}}{\binom{\alpha}{k}}\right|=\left|\frac{\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(k-1))\cdot(\alpha-k)\cdot k!}{(k+1)!\cdot\alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(k-1))}\right|=$$

$$\frac{|\alpha-k|}{k+1}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}1$$

ולכן $\limsup_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|\binom{\alpha}{k}\right|}=1$ ולכן רדיוס ההתכנסות $R=\frac{1}{1}=1$.

נרצה לבחון האם $g(x)=f(x)$ בסביבה של $x_0=0$?

דרך אחת לענות על שאלה זו היא להעריך את השארית במשפט טיילור ולהראות כי: $R_n(x)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$.

תרגיל: להוכיח בעזרת $R_n(x)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$.

דרך שניה היא:

נשים לב שהפונקציה $f(x)$ מקיימת את הזהות הבאה:

$$(1+x)\cdot f'(x)=\alpha+f(x)$$

נרצה לבחון האם $g(x)$ גם מקיימת את הזהות הנ"ל. כלומר האם: $(1+x)\,g'(x)=\alpha\cdot g(x)$?

$$\begin{aligned}
g(x)&=1+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\ldots\\
g'(x)&=\binom{\alpha}{1}+2\binom{\alpha}{2}x+3\binom{\alpha}{3}x^2+\ldots\\
x\cdot g'(x)&=\binom{\alpha}{1}x+2\binom{\alpha}{2}x^2+3\binom{\alpha}{3}x^3+\ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(1+x)\,g'(x)=\\
&\binom{\alpha}{1}+\left[\binom{\alpha}{1}+2\binom{\alpha}{2}\right]x+\left[2\binom{\alpha}{2}+3\binom{\alpha}{3}\right]x^2+\ldots\\
&\qquad+\left[k\binom{\alpha}{k}+(k+1)\binom{\alpha}{k+1}\right]x^k+\ldots
\end{aligned}$$

נשים לב כי:

$$k\cdot\binom{\alpha}{k}+(k+1)\binom{\alpha}{k+1}=$$
$$k\cdot\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(k-1))}{k!}+(k+1)\cdot\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(k-1))\cdot(\alpha-k)}{(k+1)!}=$$
$$\frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-(k-1))}{k!}(k+\alpha-k)=\alpha\binom{\alpha}{k}$$

ולכן קיבלנו כי:

$$(1+x)\,g'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha\binom{\alpha}{k}x^k=\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k=\alpha g(x)$$

נשאר להראות שאם h פונקצייה כלשהי שמקיימת

$$(1+x)\,h'(x)=\alpha\cdot h(x)$$

וגם $h(0)=1$ אזי: $h=f$.

נביט במנה: $\frac{h(x)}{(1+x)^\alpha}$ ונגזור אותה. נקבל:

$$\left(\frac{h(x)}{(1+x)^\alpha}\right)'=\frac{(1+x)^\alpha h'(x)-\alpha(1+x)^{\alpha-1}h(x)}{(1+x)^{2\alpha}}=$$
$$\frac{(1+x)^{\alpha-1}\overbrace{\left[(1+x)\,h'(x)-\alpha h(x)\right]}^{=0}}{(1+x)^{2\alpha}}=0$$

ולכן:

$$\frac{h(x)}{(1+x)^\alpha}=\text{const}$$

$$\begin{cases}h(x)&=c(1+x)^\alpha\\h(0)&=1\end{cases}\Rightarrow h(x)=(1+x)^\alpha$$

לסיכום הראינו שלכל $x\in(-1,1)$ מתקיים:

$$(1+x)^\alpha=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^k$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\ldots$$

איך נחשב את $\sqrt{3}$ שהרי נמצא מחוץ לרדיוס? נזכור כי:

$$\sqrt{3}=2\sqrt{\frac{3}{4}}$$

והרי האיבר הנ"ל כן ברדיוס ההתכנסות.

הערה 10.37 באופן דומה, עבור $|x|<1$ נקבל כי:

$$\begin{aligned}\left(1+x^{2}\right)^{\alpha} &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}x^{2k}\\ \left(1-x^{2}\right)^{\alpha} &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}\left(-x^{2}\right)^{k}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-1\right)^{k}\binom{\alpha}{k}x^{2k}\end{aligned}$$

לדוגמה, עבור $\alpha=-\frac{1}{2}$ נקבל:

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(-1\right)^{k}\binom{-\frac{1}{2}}{k}x^{2k}$$

נבצע אינטגרציה איבר־איבר ונקבל:

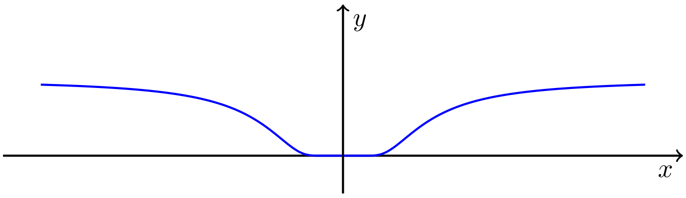
$$\arcsin x=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^{3}}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\cdot\frac{x^{5}}{5}+\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\cdot\frac{x^{7}}{7}+\ldots$$

עבור $-1<x<1$.

תרגיל: מציאת מקדמים של טור $\arcsin x$ כתרגיל.

דוגמה 10.38 האם קיים פיתוח לטור חזקות של הפונקציה

$$f\left(x\right)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^{2}}} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$$



אם קיימת הצגה של f בטור חזקות אז:

$$f\left(x\right)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}\left(0\right)}{k!}x^{k}$$

למה 10.39

אם $P\left(x\right)$ הוא פולינום ו:

$$g\left(x\right)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^{2}}}\cdot P\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

אזי קיים פולינום Q כך ש:

$$g'(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}}Q\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

תרגיל: להוכיח את הלמה הנ"ל.

למה 10.40

$$\forall k\quad f^{k}(0)=0$$

הוכחה: נוכיח באינדוקציה.
בסיס:

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}-0}{h}=\lim_{t\to\infty}\left(te^{-t^2}\right)=0$$

צעד:

$$f^{(k+1)}(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f^{(k)}(h)-\overbrace{f^{(k)}(0)}^{=0}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f^{k}(h)}{h}=$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{h^2}}\cdot p\left(\frac{1}{h}\right)}{h}=\lim_{t\to\infty}t\left[e^{-t^2}p(t)\right]=0$$

■

לכן טור טיילור שמתאים ל f הוא:

$$0+0\cdot x+0\cdot x^2+\dots$$

והרי $f(x)\neq 0$ לכל $x\neq 0$.
לכן, ל f אין הצגה כטור חזקות סביב 0.
נשים לב כי:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\dots\Rightarrow$$

$$e^{-\frac{1}{x^2}}=1-\frac{1}{x^2}+\frac{\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2}{2!}+\dots$$

הערה 10.41 פונקציות שניתנות לפיתוח כטור חזקות נקראות **פונקציות אנליטיות**.

10.2.5 כפל טורי חזקות

משפט 10.42

אם $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ ב $(-R,R)$ ו $g(x)=\sum_{l=0}^{\infty}b_lx^l$ ב $(-R,R)$ אז: $f(x)\cdot g(x)=$

$\sum\limits_{m=0}^{\infty} c_m x^m$ כאשר:

$$c_m = a_0 b_m + a_1 b_{m-1} + \ldots + a_m b_0$$

ב $(-R,R)$.

תזכורת 10.43 ראינו משפט שאומר אם $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n = A$ מתכנס בהחלט ו: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n = B$ מתכנס אז הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n = A \cdot B$ כאשר:

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n+1} + \ldots + a_n b_0$$

הוכחה: נקבע $x \in (-R,R)$. נסמן:

$$\alpha_k = a_k x^k, \quad \beta_l = b_l x^l$$

אנו יודעים כי $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|$ מתכנס וכמו כן גם כי $\sum\limits_{l=0}^{\infty} |\beta_l|$ מתכנס.
נגדיר $\gamma_n = \alpha_0 \beta_n + \alpha_1 \beta_{n-1} + \ldots + \alpha_n \beta_0$ ולכן לפי המשפט המצויין בתזכורת:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n = f(x) \cdot g(x)$$

(לפי כפל טורי מספרים)

$$\gamma_n = a_0 x^0 \cdot b_n x^n + a_1 x^1 \cdot b_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_n x^n \cdot b_0 x^0 = \\ (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0) x^n = c_n x^n$$

קיבלנו $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n = f(x) g(x)$ כנדרש. ■

הערה 10.44 נשים לב שבמקרה שלנו גם $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ וגם $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \beta_n$ מתכנסים בהחלט. לכן ניתן להוכיח את המשפט למכפלת טורים בצורה קלה יותר.

משפט 10.45

נניח ש $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ וגם $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ מתכנס בהחלט. נסמן:

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0$$

ומתקיים:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} b_n$$

הוכחה:
נסמן: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$, $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = \hat{A}$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$, $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n| = \hat{B}$ וכמו כן נסמן את סדרות הטורים החלקיים: $\sum_{n=0}^{N} a_n = S_n$, $\sum_{n=0}^{N} |a_n| = \hat{S_n}$, $\sum_{n=0}^{N} b_n = T_n$, $\sum_{n=0}^{N} |b_n| = \hat{T_n}$.
נתבונן בטור:

$$\underbrace{a_0b_0}+\underbrace{a_0b_1+a_1b_1+a_1b_0}+\underbrace{a_0b_2+a_1b_2+a_2b_2+a_2b_1+a_2b_0}\ldots$$

נראה שהטור הנ"ל מתכנס בהחלט. נראה ש:

$$|a_0b_0|+|a_0b_1|+|a_1b_1|+\ldots$$

מתכנס. סדרת הסכומים החלקיים מונוטונית עולה. נסמן את הסכומים החלקיים ב V_n.

$$V_{n^2} = (|a_0|+\ldots+|a_{n-1}|)\cdot(|b_0|+\ldots+|b_{n-1}|) = \hat{S_{n-1}}\cdot\hat{T_{n-1}} \leq \hat{A}\cdot\hat{B}$$

נשים לב כי $V_{n^2} \leq \hat{A}\cdot\hat{B}$ לכל n, ו V_nעולה. מכאן V_nחסומה ולפיכך מתכנסת.
אם כן, הטור

$$\underbrace{a_0b_0}+\underbrace{a_0b_1+a_1b_1+a_1b_0}+\underbrace{a_0b_2+a_1b_2+a_2b_2+a_2b_1+a_2b_0}\ldots$$

מתכנס בהחלט ונוכל לערבב את האיבריו מבלי לשנות את ההתכנסות ואת הגבול.
נסמן W_n סכום חלקי של הטור הנ"ל (לא בהחלט הפעם):

$$W_{n^2} = S_{n-1}\cdot T_{n-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A\cdot B$$

W_n מתכנס, מכאן: $W_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A\cdot B$. עבור סכימה באלכסונים נקבל:

$$a_0b_0+a_0b_1+a_1b_0+a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0+\ldots = A\cdot B$$

נוסיף סוגריים ונקבל:

$$\underbrace{(a_0b_0)}_{c_0}+\underbrace{(a_0b_1+a_1b_0)}_{c_1}+\underbrace{(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)}_{c_2}+\ldots = A\cdot B$$

ולכן:

$$c_0+c_1+c_2+\ldots = A\cdot B$$

כנדרש ■

דוגמה 10.46 נרצה לבטא את $\frac{\ln(1+x)}{1+x}$ כטור חזקות. נשים לב כי:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} &= 1-x+x^2-x^3+\ldots \\ \ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots \end{aligned}$$

בקטע $(-1,1)$. ולכן:

$$\frac{\ln(1+x)}{1+x} = x-\left(1+\frac{1}{2}\right)x^2+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3-\ldots$$

10.2.6 משפט בורל

שאלה למחשבה a_nסדרת מספרים. האם קיימת פונקצייה f כך ש $f^{(n)}(0)=a_n$?

12/05/2011

דיון נחפש פונקצייה f כך ש $f(0)=a_0$:

$$f(x)\equiv a_0$$

כעת נחפש פונקצייה f כך ש $f(0)=a_0,\ f'(0)=a_1$:

$$f(x)=a_0+a_1x$$

$f(0)=a_0,\quad f'(0)=a_1,\quad f''(0)=a_2$:

$$f(x)=a_0+a_1x+\frac{a_2}{2}x^2$$

ובאופן כללי עבור $f(0)=a_0,\dots,f^{(N)}(0)=a_N$:

$$f(x)=a_0+a_1x+\frac{a_2}{2}x^2+\ldots+\frac{a_N}{N!}x^N$$

במקרה של סדרה אינסופית: $a_0,\dots,a_n,\dots$ נביט בטור החזקות:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$$

אם רדיוס ההתכנסות הוא חיובי ממש אז:

$$f(0)=a_0,\quad f'(x)=a_1+\frac{a_2}{2!}\cdot 2x+\frac{a_3}{3!}\cdot 3x^2\Rightarrow f'(0)=a_1$$

ובאופן דומה:

$$f''(x)=\frac{a_2}{2!}\cdot 2+\frac{a_3}{3!}\cdot 3x+\ldots\Rightarrow f''(0)=a_2$$

ובאופן כללי:

$$\forall n\quad f^{(n)}(0)=a_n$$

אם הסדרה $\infty \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} |a_n|$ מאד מהר אז:

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n!}}=\infty$$

ואז רדיוס ההתכנסות של טור החזקות $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n$ הוא אפס.

טענה 10.47

קיימת פונצקיה $C^\infty(\mathbb{R})\ni\varphi\geq 0$ כך ש: $\varphi(0)=1$ וכמו כן:

$$\forall x,\quad |x|\geq 1,\quad \varphi(x)=0$$

הוכחה: נסמן:

$$f\left(x\right)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^{2}}} & x\neq0\\ 0 & x=0 \end{cases}$$

נגדיר:

$$\tilde{\varphi}\left(x\right)=\begin{cases} f\left(1-x^{2}\right) & \left|x\right|\leq1\\ 0 & x\geq1 \end{cases}$$

נשים לב כי:

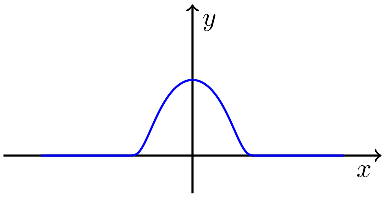
$$\tilde{\varphi}\left(0\right)=f\left(1\right)=\frac{1}{e}$$

ולכן על מנת למצוא את e נסמן:

$$\varphi\left(x\right)=e\tilde{\varphi}\left(x\right)$$

ונקבל את הפונקציה הנדרשת.

אפשר לבדוק כי $\varphi\left(0\right)=1,\ \varphi'\left(0\right)=0,\ \varphi''\left(0\right)=0,\ldots,\forall k>0\ \varphi^{(k)}\left(0\right)=0$. וכמו כן ניתן לבדוק כי $\varphi\in C^{\infty}\left(\mathbb{R}\right)$ (לשם כך צריך לבדוק $\forall k\quad\varphi^{(k)}\left(\pm1\right)=0$)



■

הערה 10.48 נשים לב כי $\varphi\left(2x\right)$ מכווצת את ה"פעמון". כך שהוא הפונקציה מתאפסת ב $\pm\frac{1}{2}$. או באופן כללי לכל b: $\varphi\left(bx\right)$ מתאפסת ב $\pm\frac{1}{b}$.

טענה 10.49

קיימת סדרת מספרים b_n כך שטור "החזקות המתוקן":

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n}}{n!}x^{n}\varphi\left(b_{n}x\right)$$

מתכנס במ"ש ב $\mathbb{R}$ וגם כל טורי הנגזרות מכל סדר מתכנסים במ"ש ב$\mathbb{R}$.

הוכחה: — טענה זו הוכחה בתאריך: 15/05/2011

למה 10.50

קיים b_1 כך ש $\underbrace{\left|g_{1}\left(x\right)\right|}_{\left|\frac{a_{1}}{1!}x\cdot\varphi\left(b_{1}x\right)\right|}<\frac{1}{2}\qquad\forall x\in\mathbb{R}$

הוכחה: נתבונן בפונקציה $g_1(x)=\frac{a_1}{1!}x\cdot\varphi(b_1x)$.
עבור $|x|>\frac{1}{b_1}$: נקבל כי $g_1(x)=0$ ואז הלמה נכונה.
עבור $|x|\le\frac{1}{b_1}$: נשים לב כי:

$$|g_1(x)|=\left|\frac{a_1}{1!}x\varphi(b_1x)\right|\underset{\varphi(x)\le1}{\le}\left|\frac{a_1}{1!}\right|\cdot|x|\le\frac{a_1}{b_1}$$

הערה 10.51 נשים לב כי אנו משתמשים ב $\varphi(x)$ כפי שהוגדרה בטענה 10.47, ולכן מתקיים $0\le\varphi(x)\le1$

לכן, קיבלנו שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $|g_1(x)|\le\left|\frac{a_1}{b_1}\right|$. נגדיר $b_1=2|a_1|$ ונקבל: $|g_1(x)|\le\frac{1}{2}$ כנדרש. ∎

למה 10.52

קיים b_2 כך ש $|g_2(x)|\le\frac{1}{4}$ וגם $|g_2'(x)|\le\frac{1}{4}$

הוכחה: נתבונן בפונקציה: $g_2(x)=\frac{a_2}{2!}x^2\varphi(b_2x)$.
עבור $|x|>\frac{1}{b_2}$: נקבל כי $g_2(x)=0<\frac{1}{4}$.
עבור $|x|\le\frac{1}{b_2}$: נקבל:

$$|g_2(x)|\le\left|\frac{a_2}{2!}\cdot\frac{1}{b_2^2}\right|$$

נתבונן בנגזרת של $g_2(x)$:

$$g_2'(x)=\frac{a_2}{2!}\cdot2x\cdot\varphi(b_2x)+\frac{a_2}{2!}\cdot x^2b_2\varphi'(b_2x)$$

עבור $|x|>\frac{1}{b_2}$: נקבל כי $g_2'(x)=0<\frac{1}{4}$
עבור $|x|\le\frac{1}{b_2}$: נקבל:

$$|g_2'(x)|\le\left|\frac{1_2}{2!}\cdot2\cdot\frac{1}{b_2}\right|+\left|\frac{1_2}{2!}\cdot2\cdot\frac{1}{b_2^2}\cdot b_2\right|\cdot M_1$$

(כאשר M_1 הוא המקסימום של $|\varphi'(x)|$, קיים כי מדובר בקטע סגור והנגזרת רציפה)

$$\le\left|\frac{a_2}{2!}\right|\cdot\frac{1}{|b_2|}(2+M_1)$$

לסיכום, קיבלנו כי לכל $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}|g_2(x)| &\le \left|\frac{a_2}{2!}\right|\cdot\frac{1}{|b_2|^2}\\ |g_2'(x)| &\le \left|\frac{a_2}{2!}\right|\cdot\frac{c_1}{|b_2|}\end{aligned}$$

כך ש $c_1=2+M_1$. לכן אם b_2 מספיק גדול ($b_2\ge\max\left(2a_2(c_1),\sqrt{2a_2}\right)$) נקבל:

$$|g_2'(x)|\le\frac{1}{4},\quad|g_2(x)|\le\frac{1}{4}$$

∎

הערה 10.53 נשים לב שאם נגדיר $\tilde{\varphi}(x)=\varphi(b_2x)$ אז:

$$\tilde{\varphi}'(x)=b_2\varphi'(b_2x)$$

ולכן אם $b_2\to\infty$ אז הנגזרת של $\tilde{\varphi}$ שואפת לאינסוף.

למה 10.54

קיים b_3 כך ש $|g_3(x)|\le\frac{1}{8}$ $\forall x\in\mathbb{R}$ וגם: $|g_3'(x)|\le\frac{1}{8}$, $|g_3''(x)|\le\frac{1}{8}$

הוכחה: אפשר להראות (כמו קודם) שקיימים קבועים c_1,c_2,c_3 שתלויים רק בפונקצייה φ כך ש:

$$\begin{aligned}|g_3(x)| &\le \left|\frac{a_3}{3!}\right|\cdot\frac{c_1}{|b_3^3|}\\ |g_3'(x)| &\le \left|\frac{a_3}{3!}\right|\cdot\frac{c_2}{|b_3^2|}\\ |g_3''(x)| &\le \left|\frac{a_3}{3!}\right|\cdot\frac{c_3}{|b_3|}\end{aligned}$$

מכאן נוכל לבחור b_3 מספיק גדול כך שלמה הנ"ל תתקיים. ■

למה 10.55

קיים b_n כך שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $|g_n(x)|\le\frac{1}{2^n},\ |g_n'(x)|\le\frac{1}{2^n},\dots,\ \left|g_n^{(n-1)}(x)\right|\le\frac{1}{2^n}$

הוכחה: קיימים קבועים $c_1,\dots,c_n$ שתלויים רק ב φ כך ש:

$$\begin{aligned}|g_n(x)| &\le \left|\frac{a_n}{n!}\cdot\frac{c_1}{b_n^n}\right|\\ |g_n'(x)| &\le \left|\frac{a_n}{n!}\cdot\frac{c_2}{b_n^{n-1}}\right|\\ &\vdots\\ \left|g_n^{(n-1)}(x)\right| &\le \left|\frac{a_n}{n!}\cdot\frac{c_n}{b_n}\right|\end{aligned}$$

ולכן קיים b_n מספיק גדול עבורו מתקיימת הטענה. ■

נתבונן בטור $\sum_{n=0}^{\infty}g_n(x)$. הטור מתכנס במ"ש ב $\mathbb{R}$ כיוון ש:

$$|g_1(x)|\le\frac{1}{2},\ \left|g_2(x)\le\frac{1}{4}\right|,\ \left|g_3(x)\le\frac{1}{8}\right|,\dots,|g_n(x)|\le\frac{1}{2^n},\dots$$

ולכן, ממבחן הM של ויירשטראס נקבל שהטור מתכנס במ"ש ב$\mathbb{R}$.

כמו כן, נתבונן בטור $\sum_{n=0}^{\infty}g_n'(x)$. נשים לב שגם כאן:

$$\left|g_2'(x)\le\frac{1}{4}\right|,\ \left|g_3'(x)\le\frac{1}{8}\right|,\dots,|g_n'(x)|\le\frac{1}{2^n},\dots$$

ושוב, לפי מבחן ה M של ויירשטראס נקבל כי $\sum_{n=0}^{\infty} g_n'(x)$ מתכנס במ"ש ב $\mathbb{R}$.

וכעת למקרה הכללי יותר:

נתבונן בטור $\sum_{n=0}^{\infty} g_n^{(k)}(x)$ נשים לב כי:

$$\begin{aligned}\left|g_{k+1}^{(k)}\right| &\leq \frac{1}{2^{k+1}}\\ \left|g_{k+2}^{(k)}\right| &\leq \frac{1}{2^{k+2}}\\ &\vdots\\ g_n^{(k)} &\leq \frac{1}{2^n}\end{aligned}$$

ולכן ממבחן הM של ויירשטראס נקבל שהטור מתכנס במ"ש ב $\mathbb{R}$. ■

הערה 10.56 איך למעשה השתמשנו במבחן הM של ויירשטראס?

נתבונן בטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ונניח כי: $|f_n(x)| \leq \frac{1}{2^n} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall n \geq k$. מכאן נובע שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ מתכנס במ"ש ב $\mathbb{R}$ כיוון שממבחן הM של ויירשטראס הזנב: $\sum_{n=k}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במ"ש ב$\mathbb{R}$.

נסמן:

$$\begin{aligned}T_1(x) &= f_{k+1}(x)\\ T_2(x) &= f_{k+1}(x) + f_{k+2}(x)\\ &\vdots\end{aligned}$$

לפי מבחן ה M של ויירשטראס $(T_n)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש בכל $\mathbb{R}$.

נסמן:

$$S_n = f_1 + \ldots + f_n = (f_1 + \ldots + f_k) + (f_{k+1} + \ldots + f_n) = S_k + T_{n-k}$$

נשים לב כי:

$$(T_{n-k}) \overset{\text{במ"ש}}{\longrightarrow} f$$

ולכן:

$$S_k + T_{n-k} \overset{\text{במ"ש}}{\longrightarrow} S_k + f$$

לפי למה טריוויאלית: $f_n \overset{\text{במ"ש}}{\longrightarrow} f$ ב $\mathbb{R}$אזי $f_n + g \overset{\text{במ"ש}}{\longrightarrow} f + g$ ב $\mathbb{R}$.

הערה 10.57 נשים לב כי אנחנו מעריכים עבור כל נגזרת n-ית את האיברים החל מ g_n מכיוון שאין לנו הערכה על האיברים לפני. אבל מכיוון שהכמות שלהם היא סופית, אין זה משפיע על התכנסות הטור.

הערה 10.58 נשים לב כי אם $b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ אזי הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n\varphi(b_nx)$ מתכנס נקודתית בכל $\mathbb{R}$.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n\varphi(b_nx)=a_0\varphi(b_0x)+\frac{a_1}{1!}x\varphi(b_1x)+\dots$$

נשים לב כי $f(0)=a_0$. עבור $x>0$ אם $b_n>\frac{1}{x}$ אז: $b_nx>1$ ולכן $\varphi(b_nx)=0$. מכאן שהסכום הוא למעשה סכום סופי ולכן ההתכנסות הנקודתית טריוויאלית.

טענה 10.59

קיימת סדרה של פונקציות $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ כך שטור הפונקציות:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n\varphi_n(x)$$

מתכנס במ"ש ב: $\mathbb{R}$ וגם טורי הנגזרות (מכל סדר) מתכנסים במ"ש ב: $\mathbb{R}$. בנוסף נוכל לדרוש: $\forall n\ \varphi_n(0)=1$ וכמו כן, $\varphi_n^{(k)}(0)=0 \quad \forall k\geq 1$

הוכחה: נסמן $\varphi_n(x)=\varphi(b_nx)$ ונשתמש בטענה קודמת. ■

משפט 10.60 משפט בורל

תהי נתונה סדרת מספרים $(a_n)_{n=1}^{\infty}$.
קיימת פונקציה f עם ∞ נגזרות רציפות בסביבה של אפס כך ש:

$$\forall n \quad f^n(0)=a_n$$

הוכחה: נסמן $g_n(x)=\frac{a_n}{n!}x^n\varphi_n(x)$.

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(x)\\ f'(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}g_n'(x)\\ f''(x)&=\sum_{n=0}^{\infty}g_n''(x)\end{aligned}$$

וכך הלאה. נשים לב כי:

$$f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(0)=\frac{a_0}{0!}\cdot\varphi_0(0)=a_0$$

$$g_n'(x)=\frac{a_n}{n!}n\cdot x^{n-1}\varphi_n(x)+\frac{a_n}{n!}x^n\varphi_n'(x)$$

$$g_n'(0)=\begin{cases}0 & n\geq 2\\ a_1 & n=1\end{cases}$$

כמו כן נבחין כי:

$$g_0(x) = a_0\varphi_0(x) \Rightarrow g_0'(x) = a_0\varphi_0'(x) \Rightarrow$$
$$g_0'(0) = a_0 \underbrace{\varphi_0'(0)}_{=0} = 0$$

ולכן נקבל:

$$f'(0) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n'(0) = a_1$$

כמו כן:

$$g_n''(x) = \frac{a_n}{n!}\cdot n(n-1)x^{n-2}\varphi_n(x) + \frac{a_n}{n!}\cdot n\cdot x^{n-1}\cdot\varphi_n'(x) + \frac{a_n}{n!}\cdot nx^{n-1}\cdot\varphi_n'(x) + \frac{a_n}{n!}\cdot x^n\cdot\varphi_n''(x)$$

ולכן נבחין כי:

$$g_n''(0) = \begin{cases} 0 & n\geq 3 \\ \frac{a_2}{2!}\cdot 2\cdot 1\cdot\varphi_n(0) = a_2 & n=2 \\ & n\leq 1\end{cases}$$

כיוון ש:

$$g_n''(x) = \frac{a_n}{n!}\cdot n(n-1)0^{n-2}\cancelto{1}{\varphi_n(0)} + \frac{a_n}{n!}\cdot n\cdot 0^{n-1}\cdot\cancelto{0}{\varphi_n'(0)} + \frac{a_n}{n!}\cdot n0^{n-1}\cdot\cancelto{0}{\varphi_n'(0)} + \frac{a_n}{n!}\cdot 0^n\cdot\cancelto{0}{\varphi_n''(x0)} = \frac{a_n}{n!}\cdot n(n-1)\cdot 0^{n-2}$$

■

15/05/2011

דוגמה 10.61 ראינו כי:

$$\forall -1<x<1 \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

נראה שהשיוויון נכון עבור $x=1$. כלומר:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots$$

נסמן $f(x) = \ln(1+x)$ נרשום:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \pm \frac{x^n}{n} + R_n(x)$$

לכל x. נוכל להציג את השארית בצורת לגרנז':

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c_{n,x})\,x^{n+1}}{(n+1)!}$$

כאשר $x \leq c_{n,x} \leq 0$. אנו רוצים להראות כי $R_n(1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

$$|R_n(1)| \leq \left|\frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}\right| \cdot 1^{n+1}$$

כאשר $1 \leq c_n \leq 0$. נשים לב כי:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} \\ f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} \\ &\vdots \\ f^{(k)}(x) &= \pm\frac{(k-1)!}{(1+x)^k} \\ f^{(k+1)}(x) &= \pm\frac{k!}{(1+k)^{k+1}} \end{aligned}$$

נתבונן על הנגזרת ה $k+1$ כאשר $1 \leq x \leq 0$ ונקבל:

$$\left|f^{(k+1)}(x)\right| = \frac{k!}{(1+k)^{k+1}} \leq k!$$

ולכן:

$$|R_n(1)| \leq \left|\frac{f^{(n+1)}(c_n)}{(n+1)!}\right| \leq \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

ולכן קיבלנו כי: $R_n(1) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

תזכורת 10.62 משפט טיילור:

$$\begin{aligned} R_n(x) &\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \\ \frac{R_n(x)}{x} &\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \\ &\vdots \\ \frac{R_n(x)}{x^n} &\underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

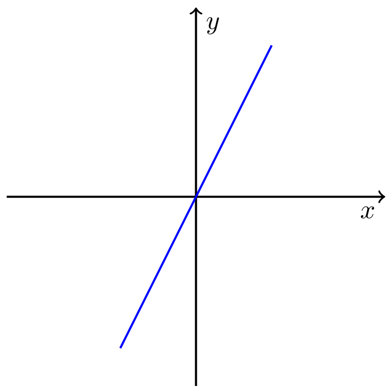
נשים לב כי משפט טיילור לא אומר איך השארית מתנהגת כאשר x קבוע וn שואף לאינסוף.

חלק V
מסילות ועקומים במישור

11 מסילות

הגדרה 11.1 מסילה במישור: מסילה היא העתקה: $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ כאשר I הוא קטע ב $\mathbb{R}$.
כלומר יהי $t \in I$, אזי: $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

דוגמה 11.2 $\gamma\left(t\right)=\left(x_{0}+at,y_{0}+bt\right)$ מתארת ישר במישור $t\in\mathbb{R}$ (על t נחשוב כמו זמן).



שיפוע הישר הוא: $\frac{b}{a}$.
כיצד נראה ש־γ הנ"ל הוא ישר?

$$x\left(t\right)=x_{0}a+t\Rightarrow t=\frac{x\left(t\right)-x_{0}}{a}$$

ולכן נקבל:

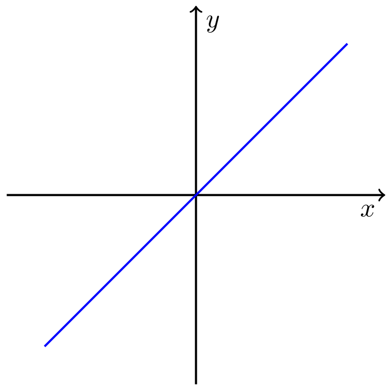
$$y\left(t\right)=y_{0}+bt=y_{0}+b\left(\frac{x\left(t\right)-x_{0}}{a}\right)=\frac{b}{a}x\left(t\right)+\left(y_{0}-\frac{bx_{0}}{a}\right)$$

כלומר תמונת המסילה γ נמצאת על ישר שמשוואתו היא:

$$y=\frac{b}{a}x+\left(y_{0}-\frac{bx_{0}}{a}\right)$$

.

דוגמה 11.3 $\gamma\left(t\right)=\left(t^{\frac{1}{3}},t^{\frac{1}{3}}\right)$ לכל $t\in\mathbb{R}$ מתארת את הישר $y=x$.



נשים לב גם כי $\gamma_{2}\left(t\right)=\left(t,t\right)$ מתארת את אותו הישר. אבל בכל זאת יש הבדל. אם מדברים על מסילה, חשובה התמונה שלה וגם הפרמטריזציה שלה.
לדוגמה, אם נשייך את המסילה לתנועת חלקיק, הפרמטריזציה תקבע את מהירות התנועה.

דוגמה 11.4 $\gamma_1(t)=(\cos t,\sin t)$ לכל $t\in\mathbb{R}$. התמונה של γ היא מעגל היחידה כיוון שמתקיים:

$$x(t)^2+y(t)^2=1$$

נשים לב כי גם כאן: $\gamma_2(t)=(\cos(2t),\sin(2t))$ מקבלת את אותה התמונה של מעגל היחידה אך כאן המהירות הזוויתית כפולה מאשר γ_1.

18/05/2011

הגדרה 11.5 מסילה רציפה: העתקה $\gamma:I\to\mathbb{R}^2$ כאשר $I\subset\mathbb{R}$ קטע. כל העתקה γ כנ"ל ניתנת ע"י שתי פונקציות:

$$\gamma(t)=(x(t),y(t))$$

אם x,y פונקציות רציפות נאמר ש: γ **מסילה רציפה**.

הגדרה 11.6 מסילה סגורה: תהי $\gamma\,[a,b]\to\mathbb{R}^2$ מסילה. אם $\gamma(a)=\gamma(b)$ אזי המסילה הנ"ל נקראת **מסילה סגורה**.

הגדרה 11.7 עקום: עקום הוא התמונה שיוצרת המסילה בלי להתחשב בכיווניות. כלומר אינה תלויה בפרמטריזציה.

דוגמה 11.8 כיצד ניתן פרמטריזצייה לאליפסה שמשוואתה:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

פרמטריזצייה אפשרית היא:

$$\gamma_1:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2,\quad \gamma_1(t)=(a\cos t,b\sin t)$$

נשים לב $\gamma(0)=\gamma(2\pi)$ ולכן היא מסילה סגורה.
עוד פרמטריזציה אפשרית היא:

$$\gamma_2(t)=(a\cos t,-b\sin t)$$

נשים לב כי האליפסה זאת היא עם כיוון השעון בניגוד לקודמת.
אפשרות נוספת לפרמטריזציה היא:

$$-\pi,t<\pi,\quad \alpha=\tan\frac{t}{2}$$

$$1+\alpha^2=1+\tan^2\frac{t}{2}=\frac{1}{\cos^2\frac{t}{2}}\Rightarrow\cos^2\frac{t}{2}=\frac{1}{1+\alpha^2}$$

$$\cos t=2\cos^2\frac{t}{2}-1=\frac{2}{1+\alpha^2}-1=\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}$$

$$\cos^2 t = \frac{\left(1-\alpha^2\right)^2}{\left(1+\alpha^2\right)^2}$$

$$\sin^2 t = 1-\frac{\left(1-\alpha^2\right)^2}{\left(1+\alpha^2\right)^2} = \frac{1+2\alpha^2+\alpha^4-\left(1-2\alpha^2+\alpha^4\right)}{\left(1+\alpha^2\right)^2} = \frac{4\alpha^2}{\left(1+\alpha^2\right)^2}$$

$$\sin t = \pm\frac{2\alpha}{1+\alpha^2}$$

אם $\alpha > 0$ אז $0 < t < \pi$ ולכן $\sin t > 0$. אם $\alpha < 0$ אז: $-\pi < t < 0$ ולכן $\sin t < 0$. מכאן:

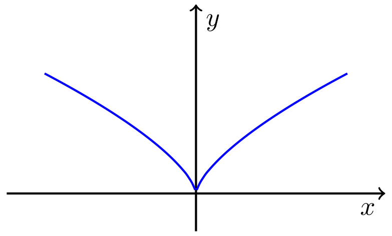
$$\sin t = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}$$

נגדיר:

$$\gamma_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_3 = \left(\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}, \frac{2\alpha b}{1+\alpha^2}\right)$$

נשים לב כי בפרמטריזצייה זו אנו לא מקבלים את הנקודה $(-a, 0)$. (נושקים אליה כאשר: $\alpha \to \pm\infty$)

דוגמה 11.9 יהי נתון עקום ע"י המשוואה: $y = \sqrt[3]{x^2}$ מצאו פרמטריצייה נוחה.



$$\gamma(t) = \left(t^3, t^2\right)$$

כאשר $t \in (-\infty, \infty)$. אכן מתקיים:$y^3 = x^2 = t^6$. התמונה של γ נמצאת על העקום $y^3 = x^2$.

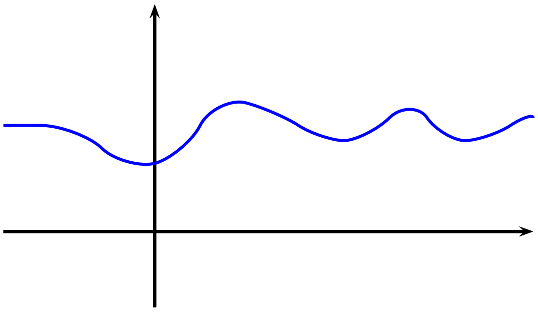
למה התמונה של γ היא כל נקודות העקום $y = \sqrt[3]{x^2}$?

תהי(x_0, y_0) נקודה על העקום. כלומר: $y_0 = x_0^{\frac{2}{3}}$ והנקודה היא: $\left(x_0, x_0^{\frac{2}{3}}\right)$. מחפשים t כך ש $t^3 = x_0$ כלומר: $t = x_0^{\frac{1}{3}}$ ולכן:

$$\gamma\left(x_0^{\frac{1}{3}}\right) = \left(x_0, x_0^{\frac{2}{3}}\right) = (x_0, y_0)$$

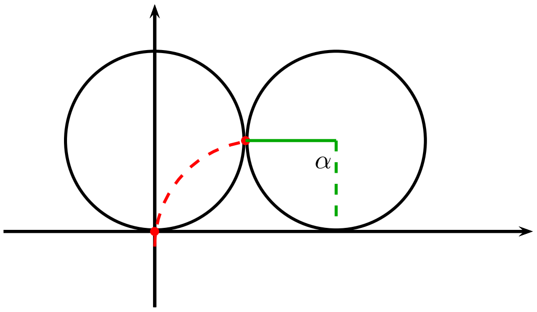
ולכן הנקודה (x_0, y_0) נמצאת בתמונה של γ כנדרש.

דוגמה 11.10 תהי נתונה פונצקייה $f(x)$ מצאו פרמטריזצייה לגרף של f.



נשים לב כי: $y = f(x)$ היא משוואת העקום ולכן $\gamma(t) = (t, f(t))$ היא פרמטריזציה מתאימה.

דוגמה 11.11 ציקלואידה: העקום של ציקלואידה נוצר ע"י סימון נקודה על גלגל וגלגולו לאורך ציר ה-x. המסלול שעוברת הנקודה המסומנת הוא העקום שלנו.



הערה 11.12 סרטון חביב המסביר את יצירת העקום ניתן למצוא ב: http://en.wikipedia.org/wiki/Cycloid

מצאו פרמטריזציה למסלול של הנקודה האדומה. נשים לב כי: $\alpha = \frac{vt}{R}$ כאשר v זוהי מהירות הגלגל.

$$\begin{aligned} y(t) &= R - R\cos\frac{vt}{R} \\ x(t) &= vt - R\sin\frac{vt}{R} \\ \gamma(t) &= \left(vt - R\sin\frac{vt}{R}, R - R\cos\frac{vt}{R}\right) \end{aligned}$$

כאשר t מייצג את הזמן.

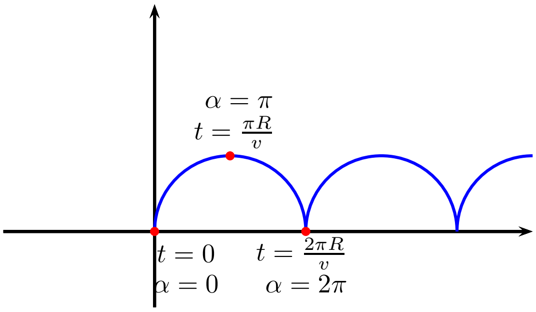
ניתן פרמטריזציה לפי הזווית α:

$$\alpha = \frac{vt}{R}, \quad t = \frac{R\alpha}{v}$$

$$\begin{aligned} \tilde{x}(\alpha) &= x(t) = R\alpha - R\sin\alpha = R(\alpha - \sin\alpha) \\ \tilde{y}(\alpha) &= y(t) = R(1 - \cos\alpha) \end{aligned}$$

ולכן:

$$\gamma_2(\alpha) = (R(\alpha - \sin\alpha), TR(1 - \cos\alpha))$$



נמצא משוואה לציקלואידה:

$$y=R-R\cos\alpha\Rightarrow\cos\alpha=\frac{R-y}{R}=1-\frac{y}{R}$$

ולכן $\alpha=\arccos\left(1-\frac{y}{R}\right)$ כאשר $0<\alpha<\pi$.

דוגמה 11.13 כמו כן נשים לב כי:

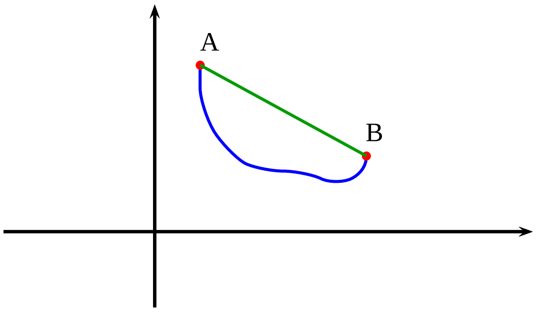
$$\sin\alpha\underset{0<\alpha<\pi}{=}\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-\left(1-\frac{y}{R}\right)^2}=\sqrt{\frac{2y}{R}-\frac{y^2}{R^2}}$$

ולכן:

$$x=R\cdot\arccos\left(1-\frac{y}{R}\right)-R\sqrt{\frac{2y}{R}-\frac{y^2}{R^2}}=R\cdot\arccos\left(1-\frac{y}{R}\right)-\sqrt{y\left(2R-y\right)}$$

הערה 11.14 המשוואה הנ"ל מייצגת רק את החצי התנועה הראשון, כלומר רק את העלה עד $t=\frac{\pi R}{v}$

דוגמה 11.15 בעיית הברכיסטוכרונה (~ 1695): מצאו מגלשה בין A ל־B כך שחלקיק המשוחרר ב־A יגיע ל־B בזמן הקצר ביותר כאשר מופעל שדה גרביטציוני בכיוון $-\hat{y}$.



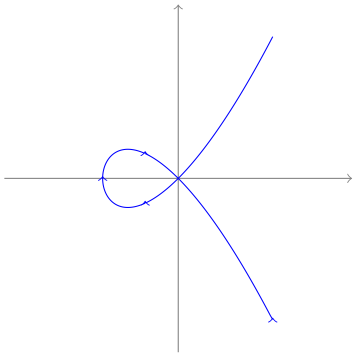
טענה 11.16

קיימת ציקלואידה הפוכה יחידה בין A ל־B כך שב־A המשיק הוא אנכי

משפט 11.17

הציקלואידה הזאת היא הברכיסטוכרונה.

דוגמה 11.18 $\gamma(t) = \left(t^2-1, \underbrace{t^3-t}_{t(t^2-1)}\right)$ כאשר $-\infty < t < \infty$. ציירו את תמונת המסילה.

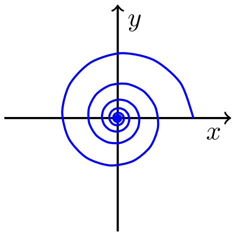


נשים לב כי קיבלנו לולאה. γ אינה חח"ע. γ"חותכת את עצמה".

דוגמה 11.19 ספירלה לוגריתמית: תארו את המסילה הבאה:

$$\gamma(t) = \left(e^{-t}\cos t, e^{-t}\sin t\right)$$

כאשר $0 \leq t < \infty$



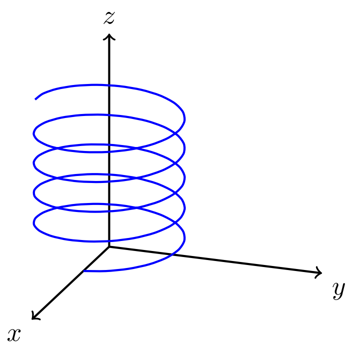
דוגמה 11.20 בורג: מסילה ב $\mathbb{R}^3$:

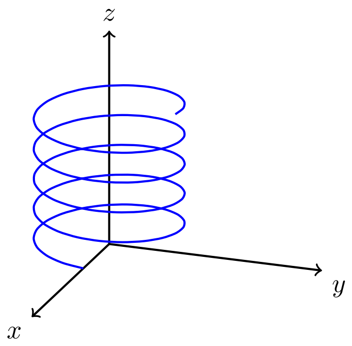
$$\begin{aligned}\gamma(t) &= (\cos(t), \sin(t), t)\\ \gamma_2(t) &= (\cos(t), -\sin(t), t)\end{aligned}$$

טענה 11.21

לא קיימת העתקה צפידה שלוקחת את γ_2 לγ_1.

γ היא בורג ימני, ואילו γ_2 היא בורג שמאלי.



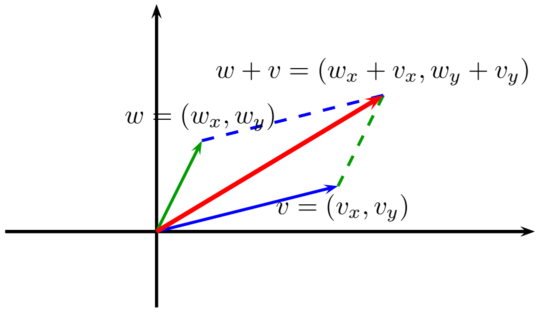


11.1 חשבון וקטורים במישור

על נקודות ב $\mathbb{R}^2$ אפשר לחשוב גם כווקטורים:

$$v = (v_x, v_y)\,, \quad w = (w_x, w_y)$$

$$v + w = (v_x + w_x, v_y + w_y)$$



לכן $v + w$ הוא למעשה האלכסון של המקבילית הנוצרת ע"י v, w.

הגדרה 11.22 אורך של ווקטור: האורך של ווקטור נתון ומסומן ע"י:

$$\|v\| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2}$$

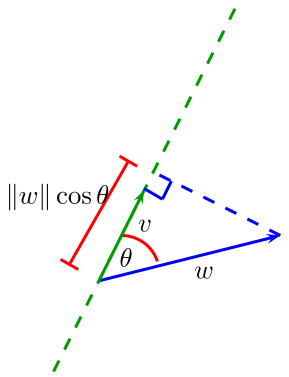
הגדרה 11.23 מכפלה פנימית: מכפלה פנימית ש ל שני וקטורים נתונה ומסומנת ע"י:

$$\langle v,w\rangle := v_x w_x + v_y w_y$$

טענה 11.24

$\langle v,w\rangle = \|v\|\,\|w\|\cos\theta$ כאשר θ היא הזווית בין v ל-w.

הוכחה: נניח כי: $\|v\| = 1$ לכן



נשים לב:

$$\langle v, w_1 + w_2\rangle = \langle v, w_1\rangle + \langle v, w_2\rangle$$

(קל לבדוק אלגברית).

טענה 11.25

ההטל של w_2 על הישר דרך v + ההיטל של w_1 על הישר דרך v = ההיטל של $w_1 + w_2$ על הישר דרך v.

■

19/05/2011

הערה 11.26 בשיעור קודם כבר התחלנו להוכיח את הטענה הבאה, אבל כעת נוכיח אותה מחדש ובדרך שונה

טענה 11.27

$\langle v,w\rangle = \|v\|\,\|w\|\cos\theta$ כאשר θ היא הזווית בין v ל-w.

הוכחה: נשים לב כי:

$$\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle = \|v\|^2 + \|w\|^2 + 2\langle v,w\rangle$$

למעשה אנו מקבלים את משפט הקוסינוסים:

$$\|v+w\|^2 = \|v\|^2 + \|w\|^2 - 2\|v\|\,\|w\|\underbrace{\cos(\pi-\theta)}_{\cos\theta}$$

דרך נוספת:

$$v=\left(\|v\|\cdot\cos\left(\theta\right),\|v\|\sin\left(\theta\right)\right)$$

נניח v יוצא זווית θ_1 עם ציר הx ואילו w יוצא זווית θ_2 עם ציר ה x.

$$\begin{aligned}\langle v,w\rangle=\left(\|v\|\cos\left(\theta_1\right)\right)\left(\|w\|\cos\left(\theta_2\right)\right)+\left(\|v\|\sin\left(\theta_1\right)\right)\left(\|w\|\sin\left(\theta_2\right)\right)=\\ \|v\|\|w\|\left(\cos\left(\theta_1\right)\cos\left(\theta_2\right)+\sin\left(\theta_1\right)\sin\left(\theta_2\right)\right)=\|v\|\|w\|\cos\left(\theta_1-\theta_2\right)\end{aligned}$$

■

דוגמה 11.28 תהי $v\left(t\right)\in\mathbb{R}^2$ כאשר $t\in\left(a,b\right)$.

$$v\left(t\right)=\left(v_x\left(t\right),v_y\left(t\right)\right)$$

נניח כי v_x,v_y פונקציות גזירות. כמו כן תהי $w\left(t\right)\in\mathbb{R}^2$. $w\left(t\right)=\left(w_x\left(t\right),w_y\left(t\right)\right)$.
לכל t נוכל להביט בסקלר $\langle v\left(t\right),w\left(t\right)\rangle$.

למה 11.29

$$\langle v\left(t\right),w\left(t\right)\rangle'=\langle v',w\rangle+\langle v,w'\rangle$$

הוכחה:

$$\begin{aligned}\langle v,w\rangle'=\left(v_xw_x+v_yw_y\right)'=\left(v_x\right)'w_x+v_x\left(w_x\right)'+\left(v_y\right)'w_y+v_y\left(w_y\right)'=\\ \left[\left(v_x\right)'w_x+\left(v_y\right)'w_y\right]+\left[v_x\left(w_x\right)'+v_y\left(w_y\right)'\right]=\langle v',w\rangle+\langle v,w'\rangle\end{aligned}$$

■

11.2 מהירות ותאוצה

הגדרה 11.30 וקטור מהירות: תהי $\gamma\left(t\right)=\left(x\left(t\right),y\left(t\right)\right)$ מסילה גזירה (כלומר x,y פונקציות גזירות). אזי $\gamma'\left(t\right)=\left(x'\left(t\right),y'\left(t\right)\right)$ הוא וקטור המהירות של γ.

$$\gamma'\left(t\right)=\lim_{h\to0}\frac{\gamma\left(t+h\right)-\gamma\left(t\right)}{h}$$

הערה 11.31 נשים לב

$$\frac{1}{h}\left(\gamma\left(t+h\right)-\gamma\left(t\right)\right)=\left(\frac{x\left(t+h\right)-x\left(t\right)}{h},\frac{y\left(t+h\right)-y\left(t\right)}{h}\right)\underset{h\to0}{\longrightarrow}\left(x'\left(t\right),y'\left(t\right)\right)$$

$\|\gamma'\left(t\right)\|$ - גודל המהירות.

הגדרה 11.32 ווקטור התאוצה: תהי $\gamma\left(t\right)$ מסילה גזירה פעמיים. אזי $\gamma''\left(t\right)=\left(x''\left(t\right),y''\left(t\right)\right)$ הוא וקטור התאוצה של המסילה.
$\|\gamma''\left(t\right)\|$ - גודל התאוצה.

דוגמה 11.33 $\gamma(t)=(\cos(t),\sin(t))$ נרצה לחשב את המהירות:

$$\gamma'(t)=(-\sin(t),\cos(t))$$

נחשב את גודלה:

$$\|\gamma'(t)\|=\sqrt{\cos^2(t)+\sin^2(t)}=1$$

נחשב את התאוצה:

$$\gamma''(t)=(-\cos(t),-\sin(t))=-(\cos(t),\sin(t))$$

וגודלה:

$$\|\gamma''(t)\|=1$$

נשים לב כי התאוצה והמהירות ניצבים, לכן התאוצה אינה משנה את גודל המהירות אלא רק את כיוונה.

דוגמה 11.34 אליפסה:

$$\begin{aligned}\gamma(t)&=(a\cos(t),b\sin(t))\\ \gamma'(t)&=(-a\sin(t),b\cos(t))\\ \gamma''(t)&=(-a\cos(t),-b\sin(t))\end{aligned}$$

במקרה זה התאוצה והמהירות אינם ניצבים.

דוגמה 11.35 יהי $v\in\mathbb{R}^2$ וקטור. ותהי $p_0\in\mathbb{R}^2$ נקודה.

$$\gamma(t)=p_0+tv$$

$$\gamma(0)=p_0$$

קל לראות כי העקום הוא קו ישר העובר דרך p_0.
מה המהירות של מסילה כנ"ל? נשים לב כי:

$$\gamma'(t)=v$$

והתאוצה: $\gamma''(t)=(0,0)$ ונקבל: $\|\gamma''(t)\|=0$ כלומר אין תאוצה.

דוגמה 11.36 $\gamma(t)=p_0t^3v$
המהירות שלנו: $\gamma'(t)=3t^2v$
התאוצה: $\gamma''(t)=6tv$ (הפעם התאוצה שונה מאפס)

נרצה לשאול: למה במעגל הפרמטריזצייה שבחרנו התאוצה ניצבת למהירות?

טענה 11.37

תהי γ מסילה כלשהי. נניח כי $\|\gamma'(t)\|^2 \equiv c \quad \forall t$ (כלומר מהירות קבועה, c לא תלוי ב-t)
אז:

$$\forall t \quad \gamma''(t) \perp \gamma'(t)$$

הוכחה: מחד גיסא:

$$\|\gamma'(t)\|^2 \equiv c^2$$

ומאידך:

$$\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle = \|\gamma'(t)\|^2$$

כלומר:

$$\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle \equiv c^2$$

נגזור לפי t ונקבל:

$$\langle \gamma''(t), \gamma'(t) \rangle + \langle \gamma'(t), \gamma''(t) \rangle \equiv 0$$

$$2\langle \gamma', \gamma'' \rangle = 0 \Rightarrow \langle \gamma', \gamma'' \rangle = 0 \Rightarrow \gamma'' \perp \gamma'$$

כנדרש. ■

הערה 11.38 למעשה הוכחנו שאם $\|v(t)\| \equiv c \quad \forall t$ אז: $v(t) \perp v'(t)$ לכל t.

דוגמה 11.39 תהי γ מסילה סגורה וגזירה שלא עוברת דרך הראשית. נרצה להראות כי:

1. קיימת נקודה על γ במרחק מינימלי מהראשית
2. אם p נקודה על γ ששם מתקבל מינימום מרחק מהראשית אז הקטע שמחבר בין הראשית ל-p ניצב למסילה γ בנקודה p.

תזכורת 11.40 תהי $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ מסילה ($I \in \mathbb{R}$). $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.
אזי וקטור המהירות מיוצג ע"י:

$$\gamma'(t) = (x'(t), y'(t)) = \lim_{h\to\infty} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} = \lim_{h\to\infty} \left(\frac{x(t+h) - x(t)}{h}, \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \right)$$

כמו כן, וקטור התאוצה מיוצג ע"י:

$$\gamma''(t) = (x''(t), y''(t))$$

דוגמה 11.41 מה ניתן לומר על מסילה עם תאוצה אפס?
$\gamma(t) = P_0 + tv$ כאשר: $P_0, v \in \mathbb{R}^2$.
$\gamma(t)$ הוא ישר שעובר דרך P_0 ומקביל לווקטור v. $\gamma(0) = P_0$.
נשים לב כי המהירות ניתנת ע"י $v = \gamma'(t)$.
לחילופין בהצגה בעזרת קואורדינטות: $P_0 = (P_{0,x}, P_{0,y})$ וכמו כן: $v = (v_x, v_y)$ ולכן:

$$\gamma(t) = (P_{0,x} + tv_x, P_{0,y} + tv_y) \Rightarrow \gamma'(t) = (v_x, v_y) = v$$

נשים לב כי גודל המהירות הוא:

$$\|\gamma'(t)\| = \|v\|$$

נרצה לבחון את התאוצה:

$$\gamma''(t) = (0,0)$$

כלומר, התאוצה היא אפס.

דוגמה 11.42 $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$
לכן המהירות היא:

$$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t)$$

והתאוצה היא:

$$\gamma''(t) = (-\cos t, -\sin t) = -(\cos t, \sin t)$$

שמנו לב ש: $\forall t \quad \gamma''(t) \perp \gamma'(t)$ כיוון ש:

$$\langle \gamma', \gamma'' \rangle = (-\sin t) \cdot (\cos t) + \cos t (-\sin t) = 0$$

לתאוצה אין רכיב משיקי לכן גודל המהירות קבוע.

$$\|\gamma'(t)\| = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

דוגמה 11.43 תהי γ מסילה עם תאוצה אפס. מה ניתן לומר על γ?
ראשית מההגדרה:

$$\forall t \quad \gamma''(t) = 0$$

נסמן:

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$

ולכן מהנתון: $\gamma''(t) = (x''(t), y''(t)) = (0,0)$ כלומר:

$$\begin{cases} x''(t) = 0 \\ y''(t) = 0 \end{cases}$$

נבצע אינטגרציה על התאוצה ונקבל:

$$\begin{cases} x'(t) = a \\ y'(t) = c \end{cases}$$

נבצע אינטגרציה פעם נוספת ונקבל:

$$\begin{cases} x(t) = at + b \\ y(t) = ct + d \end{cases}$$

ולכן:

$$\gamma(t) = (at + b, ct + d) = (b, d) + t(a, c)$$

נשים לב כי זהו ישר בכיוון הוקטור (a, c) שעובר דרך הנקודה (b, d).

הגדרה 11.44 מסילה חלקה:

דוגמה 11.45 תהי γ מסילה סגורה ו"חלקה" שלא עוברת דרך הראשית הראו כי:

1. קיימת P על התמונה של γ שנמצאת במרחק מינימלי מהראשית.
2. הקטע המחבר את הנקודה P לעיל לראשית ניצב למסילה γ.

הוכחה:

1. γ סגורה ולכן קיימת פרמטריזציה אשר מאפשרת לנו לרשום את γ כפונקצייה:

$$\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

כמו כן, בגלל שהמסילה סגורה אזי γ מחזורית כלומר קיים T כך ש: $\gamma(t+T) = \gamma(t)$. ובגלל שהיא חלקה γ' רציפה. המרחק בין הנקודה $\gamma(t)$ לראשית הוא:

$$dt = \|\gamma(t)\| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$$

נרצה להראות ש d מקבלת מינימום.

$$d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

d מקבל מינימום אם"ם d^2 מקבל מינימום.

$$d^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$d^2(t) = x(t)^2 + y(t)^2$$

נשים לב כי d^2 מחזורית (כחיבור של 2 פונקציות מחזוריות).

$$d^2(t+T) = d^2(t)$$

ולכן:

$$\min_{\mathbb{R}} d^2 = \min_{[0,T]} d^2$$

הפונקצייה הרציפה d^2 מקבלת מינימום בקטע הסגור $[0, T]$ (לפי משפט ויירשטראס) וזהו גם המינימום של d^2 ב$\mathbb{R}$.

2. בנקודת במינימום הנגזרת של d^2 מתאפסת. נשים לב כי $d^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ מחזורית וגזירה ברציפות.

$$d^2(t) = x(t)^2 + y(t)^2$$

נניח ש t_0 היא נקודת מינימום. הנגזרת ב t_0 מתאפסת.

$$\not{2}x(t_0)x'(t_0) + \not{2}2y(t_0)y'(t_0) = 0$$

$$\langle (x(t_0), y(t_0)), (x'(t_0), y'(t_0)) \rangle = 0 \Rightarrow \langle \gamma(t_0), \gamma'(t_0) \rangle = 0$$

ולכן קיבלנו כי:

$$\gamma(t_0) \perp \gamma'(t_0)$$

כנדרש.

■

תרגיל: γ כמו בדוגמה הקודמת.
יהי l ישר שלא חותך את γ.הראו ש:

1. קיימת נקודה P על התמונה של γ במרחק מינימלי מ d.

(א) אם מחברים את P לישר l בקטע הקצר ביותר אז הקטע ניצב ל l ולמסילה בנקודה P.

11.3 אורך של מסילה

11.3.1 הקדמה

נניח $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$ אזי:

$$\text{dist}(P_1, P_2) = \|P_2 - P_1\|$$

הוא המרחק בין P_1 לP_2. אם:

$$\begin{aligned} P_1 &= (x_1, y_1) \\ P_2 &= (x_2, y_2) \end{aligned}$$

אזי:

$$\text{dist}(P_1, P_2) = \|(x_2 - x_1, y_2 - y_1)\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

11.3.2 תכונות המרחק

טענה 11.46 אי שיוויון המשולש

$$\text{dist}(P_1, P_2) + \text{dist}(P_2, P_3) \geq \text{dist}(P_1, P_3)$$

הערה 11.47 בלינארית ראינו הוכחה בעזרת אי־שיוויון קושי־שוורץ ניתן למצוא בסיכומים שלי בלינארית.

הוכחה:
יוכח בעתיד (אולי). בנתיים סקיצה:

$$\|v_1+v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$$

ראינו באלגברה אי שיוויון קושי־שוורץ האומר: $|\langle v_1,v_2\rangle| \leq \|v_1\| \cdot \|v_2\|$
נשים לב כי:

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(P_1,P_3) = \|P_3-P_1\| = \|(P_3-P_2)+(P_2-P_1)\| \leq \\ \|P_3-P_2\|+\|P_2-P_1\| = \operatorname{dist}(P_3,P_2)+\operatorname{dist}(P_2,P_1)\end{aligned}$$

■

הגדרה 11.48 תהי נתונה מסילה: $\mathbb{R}^2 \to [a,b]\,\gamma$. תהי P חלוקה של הקטע $[a,b]$

$$P=\{t_0,t_1,\ldots,t_n\}$$

כך ש $t_0=a$ ו$t_n=b$ ומתקיים: $a=t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n=b$
נגדיר:

$$\ell(\gamma,P) := \sum_{k=1}^{n} \operatorname{dist}(\gamma(t_k),\gamma(t_{k-1}))$$

אורך של הקו הפוליגונלי שמחבר בין הנקודות $\gamma(t_{k-1})$ ל $\gamma(t_k)$ כסדרן.

סימון אם P חלוקה של $[a,b]$ נסמן ב $\mu(P)$ את פרמטר החלוקה (האורך המקסימלי של קטע חלוקה).

הגדרה 11.49 נרשום: $\lim\limits_{\mu(P)\to 0} \ell(\gamma,P) = L$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל חלוקה P עם פרמטר $\mu(P)<\delta$ מתקיים:

$$|\ell(\gamma,P)-L|<\varepsilon$$

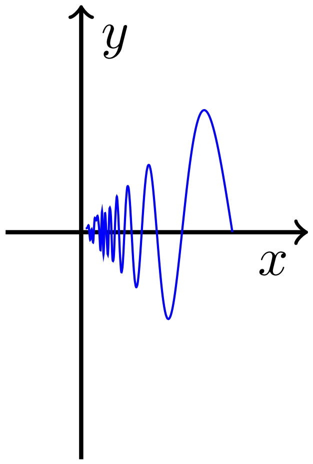
הגדרה 11.50 מסילה בעלת אורך: γ תקרא מסילה **בעלת אורך** אם היא רציפה וגם קיים הגבול:

$$\lim_{\mu(P)\to 0} \ell(\gamma,P)$$

הגדרה 11.51 אורך של מסילה: אם γ מסילה בעלת אורך נגדיר את האורך של γ להיות:

$$\ell(\gamma) = \lim_{\mu(P)\to 0} \ell(\gamma,P)$$

דוגמה 11.52 $\gamma(t) = \left(t, t\cdot\sin\frac{2\pi}{t}\right)$ כאשר $0\leq t\leq 1$



נסמן P בתור החלוקה כך ש $\gamma(t_k)$ הן נקודות מקסימום מקומי

$$\sin\frac{2\pi}{t}=1\Rightarrow\frac{2\cancel{\pi}}{t}=\frac{\cancel{\pi}}{2}+2\cancel{\pi}k\Rightarrow t=\frac{2}{\frac{1}{2}+2k}=\frac{4}{1+4k}$$

נחשב גם נקודות שבהן $\sin\frac{2\pi}{t}=0$ (לא כל הנקודות):

$$\frac{2\pi}{t}=2\pi k\Rightarrow t=\frac{1}{k}$$

נקבע N ונגדיר את P כקבוצת כל הנקודות מהצורה: $\frac{4}{1+4k}$ ו $\frac{1}{k}$ כך ש $k\leq N$ ונוסיף את $t_0=0$ ואת $t_n=1$

נקבל קו משונן העובר בין מקסימום לאפס הקרוב אחריו.

משפט 11.53

אם γ מסילה גזירה ברציפות אז:

$$\ell(\gamma)=\int_a^b\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\mathrm{d}t$$

25/05/2011

נרצה להבהיר את המשמעות של הגבול $\lim\limits_{\mu(P)\to0}\ell(\gamma,P)$.

טענה 11.54

נניח כי $\lim\limits_{\mu(P)\to0}\ell(\gamma,P)$. תהי P_n סדרה של חלוקות כך ש $\mu(P_n)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$ אזי $\lim\limits_{n\to\infty}\ell(\gamma,P_n)=L$

הוכחה: יהי $\varepsilon>0$. קיים $\delta>0$ כך שלכל חלוקה P עם פרמטר $\mu(P)<\delta$ מתקיים:

$$|\ell(\gamma,P)-L|<\varepsilon$$

מאחר ש $\mu(P_n)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$ קיים $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N$ מתקיים $\mu(P_n)<\delta$.

ולכן, לכל $n > N$ מתקיים:

$$\left|\ell\left(\gamma, P_n\right) - L\right| < \varepsilon$$

כנדרש. ■

טענה 11.55

תהיינה P_1 וP_2 חלוקות. נניח כי P_2 מעדנת את P_1 אז:

$$\ell\left(\gamma, P_2\right) \geq \ell\left(\gamma, P_1\right)$$

הוכחה: נניח ש P_2 מכילה נקודה אחת בדיוק יותר מP_1.

$$\begin{aligned} P_1: \quad & a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n \\ P_2: \quad & a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < \underbrace{c}_{\text{נקודה נוספת}} < t_k < \ldots < t_n = b \end{aligned}$$

נשים לב כי:

$$\begin{aligned} \ell\left(\gamma, P_2\right) = \sum_{l=1}^{k-1} \operatorname{dist}\left(\gamma\left(t_l\right), \gamma\left(t_{l-1}\right)\right) + \\ \operatorname{dist}\left(\gamma\left(c\right), \gamma\left(t_{k-1}\right)\right) + \operatorname{dist}\left(\gamma\left(t_k\right), \gamma\left(c\right)\right) + \\ \sum_{l=k+1}^{n} \operatorname{dist}\left(\gamma\left(t_l\right), \gamma\left(t_{l-1}\right)\right) \end{aligned}$$

לפי אי שיוויון המשולש נקבל כי:

$$\begin{aligned} \geq \sum_{l=1}^{k-1} \operatorname{dist}\left(\gamma\left(t_l\right), \gamma\left(t_{l-1}\right)\right) + \operatorname{dist}\left(\gamma\left(t_k\right), \gamma\left(t_{k-1}\right)\right) + \\ \sum_{l=k+1}^{n} \operatorname{dist}\left(\gamma\left(t_l\right), \gamma\left(t_{l-1}\right)\right) = \sum_{l=1}^{n} \operatorname{dist}\left(\gamma\left(t_l\right), \gamma\left(t_{l-1}\right)\right) = \ell\left(\gamma, P_1\right) \end{aligned}$$

לסיום, אם P_2 מכילה n נקודות יותר מ P_1 נפעל באינדוקציה.
ולכן הטענה נכונה כנדרש. ■

טענה 11.56

תהי γ מסילה בעלת אורך אז:

$$\lim_{\mu(P)\to 0} \ell\left(\gamma, P\right) = \sup_P \ell\left(\gamma, P\right)$$

הוכחה: נסמן $S\left(\gamma\right) = \sup_P \ell\left(\gamma, P\right)$. תחילה נראה ש $S\left(\gamma\right) \leq \ell\left(\gamma\right)$.
תהי P_n סדרה של חלוקות כך ש $\mu\left(P_n\right) \to 0$ לפי טענה 11.54 נקבל כי:

$$S\left(\gamma\right) \underbrace{\geq}_{\forall n} \ell\left(\gamma, P_n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell\left(\gamma\right)$$

לכן: $\ell\left(\gamma\right)\leq S\left(\gamma\right)$.
כעת נרצה לראות כי: $S\left(\gamma\right)\leq\ell\left(\gamma\right)$. יהי $\varepsilon>0$ כלשהו. נוכיח:

$$S\left(\gamma\right)-\varepsilon\leq\ell\left(\gamma\right)$$

תהי P_0 חלוקה כך ש:

$$\ell\left(\gamma,P_0\right)>S\left(\gamma\right)-\varepsilon$$

נרצה למצוא סדרה של חלוקות כך ש:

$$P_0\subset P_1\subset P_2\subset\ldots$$

וכמו כן: $\mu\left(P_n\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$. נסמן:

$$Q_n=\left\{a+\frac{k}{2^n}\left(b-a\right)|0\leq k\leq2^n\right\}$$

נשים לב כי $Q_n\subset Q_{n+1}$. נגדיר $P_n=P_0\cup Q_n$.

$$\mu\left(P_n\right)\leq\mu\left(Q_n\right)\leq\frac{b-a}{2^n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

מכיוון שסדרה החלוקות היא סדרה שהולכת ונעשת יותר ויותר מעודנת, כלומר: $P_0\subset P_1\subset\ldots$ ומטענה 11.55 נקבל כי:

$$\ell\left(\gamma,P_0\right)\leq\ell\left(\gamma,P_1\right)\leq\ell\left(\gamma,P_2\right)\leq\ldots$$

כמו כן כיוון שפרמטר החלוקה שואף לאפס נקבל לפי טענה 11.54 כי:

$$\ell\left(\gamma,P_n\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\ell\left(\gamma\right)$$

לכן:

$$S\left(\gamma\right)-\varepsilon\leq\ell\left(\gamma,P_0\right)\leq\ell\left(\gamma,P_n\right)\leq\ell\left(\gamma\right)$$

ולכן:

$$S\left(\gamma\right)-\varepsilon\leq\ell\left(\gamma\right)$$

וכיוון שהטענה נכונה לכל ε נקבל כי: $S\left(\gamma\right)\leq\ell\left(\gamma\right)$. כמו כן נזכור כי הראנו גם כי: $\ell\left(\gamma\right)\geq S\left(\gamma\right)$ ולכן:

$$\ell\left(\gamma\right)=S\left(\gamma\right)$$

כנדרש. ■

תרגיל: אם $\sup_P\ell\left(\gamma,P\right)$ סופי אז קיים הגבול: $\lim_{\mu(P)\to0}\ell\left(\gamma,P\right)$.

משפט 11.57

תהי $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ מסילה גזירה ברציפות (כלומר γ' רציפה) אז γ מסילה בעת אורך ואורכה נתון ע"י הנוסחה:

$$\ell\left(\gamma\right)=\int_a^b\left\Vert\gamma'\left(t\right)\right\Vert\mathrm{d}t$$

הוכחה: נסמן $I=\int\limits_a^b \left\|\gamma'(t)\right\|\mathrm{d}t$ (נשים לב ש: $\left\|\gamma'(t)\right\|=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}$ היא פונקציה רציפה, ולכן אינטגרבילית).
נתבונן בהערכה הבאה:

$$\ell(\gamma,P)=\sum_{k=1}^{n}\left\|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})\right\|=$$
$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\left(x(t_k)-x(t_{k-1})\right)^2+\left(y(t_k)-y(t_{k-1})\right)^2}$$

מכיוון שהפונקציות גזירות ברציפות אזי: לכל k קיים ξ_k כך ש: $t_{k-1}\le\xi_k\le t_k$ וקיים η_k כך ש: $t_{k-1}\le\eta_k\le t_k$ כך ש:

$$\begin{aligned}x(t_k)-x(t_{k-1})&=x'(\xi_k)(t_k-t_{k-1})\\ y(t_k)-y(t_{k-1})&=y'(\eta_k)(t_k-t_{k-1})\end{aligned}$$

$$\ell(\gamma,P)=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\left(x'(\xi_k)(t_k-t_{k-1})\right)^2+\left(y'(\eta_k)(t_k-t_{k-1})\right)^2}=$$
$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{x'(\xi_k)^2+y'(\eta_k)^2}\,(t_k-t_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{x'(\xi_k)^2+y'(\xi_k)^2}\,(t_k-t_{k-1})+$$
$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{x'(\xi_k)^2+y'(\eta_k)^2}-\sqrt{x'(\xi_k)^2+y'(\xi_k)^2}\right)(t_k-t_{k-1})$$

נשים לב כי: $\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{x'(\xi_k)^2+y'(\xi_k)^2}\,(t_k-t_{k-1})$ הוא למעשה סכום רימן של האינטגרל $\ell(\gamma)=\int\limits_a^b\left\|\gamma'(t)\right\|\mathrm{d}t$ נסמנו ב: $\sigma(f,P,\xi_k)$ כאשר:

$$f(t)=\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}$$

נרצה להראות כי:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{x'(\xi_k)^2+y'(\eta_k)^2}-\sqrt{x'(\xi_k)^2+y'(\xi_k)^2}\right)(t_k-t_{k-1})\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

נסמן:

$$R=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{x'(\xi_k)^2+y'(\eta_k)^2}-\sqrt{x'(\xi_k)^2+y'(\xi_k)^2}\right)(t_k-t_{k-1})$$

נעריך את R. נסמן לרגע:

$$a=x'(\xi_k)\,,\quad b=y'(\xi_k)\,,\quad c=y'(\eta_k)$$

למה 11.58

$$\left|\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{a^2+b^2}\right|\le|b-c|$$

הוכחה:

מאי שיוון המשולש:

$$\sqrt{a^2+c^2}=\|(a,c)\|=\|(a,b)+(0,c-b)\|\le \|(a,b)\|+\|(0,c-b)\|=\sqrt{a^2+b^2}+|b-c|$$

לכן:

$$\sqrt{a^2+c^2}-\sqrt{a^2+b^2}\le|b-c|$$

באופן דומה $\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\le|c-b|$ ולכן:

$$\left|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}\right|\le|b-c|$$

■

אם כן, נוכל להעריך את R כך:

$$|R|\le\sum_{k=1}^{n}|y'(\eta_k)-y'(\xi_k)|\cdot(t_k-t_{k-1})$$

עד עתה הראינו שלכל חלוקה P קיימות נקודות ξ_k,η_k כך ש : $t_{k-1}\le\xi_k,\eta_k\le t_k$ כך ש:

$$\left|\ell(\gamma,P)-\underbrace{\sigma(f,P,\xi_k)}_{\text{הסכום רימן}}\right|\le\sum_{k=1}^{n}|y'(\eta_k)-y'(\xi_k)|\cdot(t_k-t_{k-1})$$

יהי $\varepsilon>0$ נתון. יהי $\delta_1>0$ כך שאם P חלוקה כך שמתקיים $\mu(P)<\delta_1$ אז כל סכום רימן:

$$|\sigma(f,P)-I|<\varepsilon$$

יהי $\delta_2>0$ כך שאם P חלוקה כך ש $\mu(P)<\delta_2$ אז:

$$|\ell(\gamma,P)-\ell(\gamma)|<\varepsilon$$

יהי $\delta_3>0$ כך שאם $|\alpha-\beta|<\delta_3$ אז $|y'(\alpha)-y'(\beta)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$ (כיוון ש y' רציפה במ"ש בקטע $[a,b]$)

נגדיר: $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$ נשים לב ש:

$$R=|\ell(\gamma,P)-\sigma(f,P,\xi_k)|\le\sum_{k=1}^{n}|y'(\xi_k)-y'(\eta_k)|(t_k-t_{k-1})\le \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}(t_k-t_{k-1})=\frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon$$

ולכן:

$$\left|\ell\left(\gamma\right)-I\right|\leq\underbrace{\left|\ell\left(\gamma\right)-\ell\left(\gamma,P\right)\right|}_{\mu(P)<\delta_2\Rightarrow<\varepsilon}+\underbrace{\left|\ell\left(\gamma,P\right)-\sigma\left(f,p,\xi_k\right)\right|}_{\mu(P)<\delta_3\Rightarrow<\varepsilon}+\underbrace{\left|\sigma\left(f,P,\xi_k\right)-I\right|}_{\mu(P)<\delta_1\Rightarrow<\varepsilon}<$$
$$\varepsilon+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon$$

לכן הוכחנו כי לכל $\varepsilon>0$ $\left|\ell\left(\gamma\right)-I\right|\leq3\varepsilon$ ולכן: $\ell\left(\gamma\right)=I$. ■

הערה 11.59 ההוכחה גם מראה כי γ בעלת אורך. לכל P עדינה מספיק הראינו ש:

$$\left|\ell\left(\gamma,P\right)-I\right|\leq\left|\ell\left(\gamma,P\right)-\sigma\left(f,P,\xi_k\right)\right|+\left|\sigma\left(f,P,\xi_k\right)-I\right|\leq2\varepsilon$$

לכן הגבול $\lim\limits_{\mu(P)\to0}\ell\left(\gamma,P\right)$ קיים ושווה ל I. (למעשה ביטלנו את השימוש ב δ_2 מלמעלה).

26/05/2011

דוגמה 11.60 מהו אורך הגרף של הפונקצייה $f\left(x\right)$ בהקטע $[a,b]$?
נסמן $\gamma\left(t\right)=\left(t,f\left(t\right)\right)$ כאשר $a\leq t\leq b$. נחשב את המהירות ונקבל:

$$\gamma'\left(t\right)=\left(1,f'\left(t\right)\right)$$

ולכן:

$$\left\|\gamma'\left(t\right)\right\|=\sqrt{1+f'\left(t\right)^2}$$

נחשב את אורך המסילה ונקבל:

$$\ell=\int\limits_a^b\sqrt{1+f'\left(t\right)^2}\mathrm{d}t$$

דוגמה 11.61 יהי נתון עקום בקואורדינטות קוטביות $r=r\left(\theta\right)$. מצאו נוסחה לאורך העקום.
נסמן:

$$\gamma\left(\theta\right)=\left(r\left(\theta\right)\cos\theta,r\left(\theta\right)\sin\theta\right)$$

$$\gamma'\left(\theta\right)=\left(r'\cos\theta-r\sin\theta,r'\sin\theta+r\cos\theta\right)$$

נבחין כי:

$$\left\|\gamma'\left(\theta\right)\right\|^2=\left(r'\right)^2+r^2$$

ולכן נקבל כי האורך הוא:

$$\ell=\int\limits_\alpha^\beta\sqrt{r^2+r'^2}\mathrm{d}\theta$$

דוגמה 11.62 למשל במעגל ברדיוס R מתקיים $r(\theta)=R$ לכל θ.
נשים לב כי מכיוון שהרדיוס קבוע אזי: $r'=0$

$$\ell=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{R^2}\mathrm{d}\theta=R(\beta-\alpha)$$

דוגמה 11.63 מה האורך של ציקלואידה?

$$\gamma(t)=(R(t-\sin t),R(1-\cos(t)))$$

לכן:

$$\gamma'(t)=(R(1-\cos t),R\sin t)$$

$$\|\gamma'(t)\|^2=R^2(2-2\cos t)$$

נחשב את האורך בקטע $[0,2\pi]$ונקבל:

$$\ell=R\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\mathrm{d}t$$

נשים לב כי:

$$\cos t=2\cos^2\frac{t}{2}-1=1-2\sin^2\frac{t}{2}$$

ולכן:

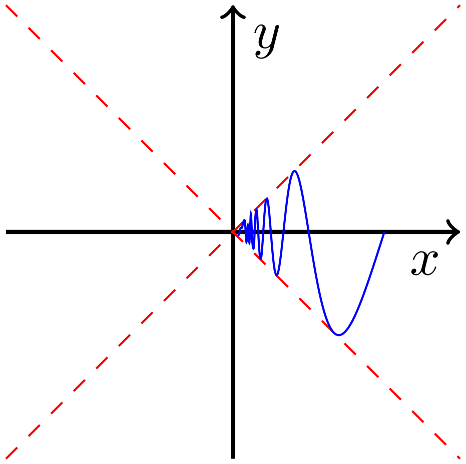
$$\ell=R\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\mathrm{d}t=R\int_0^{2\pi}\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\mathrm{d}t=R\int_0^{2\pi}2\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t=$$

$$-4\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=8R$$

דוגמה 11.64 מהו האורך הגרף של $f(x)=x\sin\frac{\pi}{x}$ בקטע $[0,1]$?

$$\gamma(t)=\left(t,t\sin\frac{\pi}{t}\right)$$

נשים לב שγ רציפה ב $[0,1]$ אבל לא גזירה ב0 .



נחשב נקודות שבהן $\sin\frac{\pi}{x}=\pm1$:

$$\frac{\pi}{x}=\frac{\pi}{2}+\pi k\Rightarrow x=\frac{1}{\frac{1}{2}+k}=\frac{2}{2k+1}$$

תהא P חלוקה שמורכבת מהנקודות $0,1$ כלומר:

$$P\supseteq\left\{\frac{2}{3},\frac{2}{5},\frac{2}{7},\ldots,\frac{2}{2N+1}\right\}$$

נשים לב כי:

$$\ell\left(\gamma,P\right)=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{dist}\left(\gamma\left(t_{k}\right),\gamma\left(t_{k-1}\right)\right)$$

נשים לב שלדוגמה:

$$\operatorname{dist}\left(\gamma\left(\frac{2}{3}\right),\gamma\left(\frac{2}{5}\right)\right)\geq\frac{4}{5}$$

ובאופן כללי יותר:

$$\operatorname{dist}\left(\gamma\left(\frac{2}{2k+1}\right),\gamma\left(\frac{2}{2k+3}\right)\right)\geq\frac{4}{2k+3}$$

מדוע? מכיוון ש:

$$\begin{aligned}\left\Vert \gamma\left(\frac{2}{2k+1}\right)-\gamma\left(\frac{2}{2k+3}\right)\right\Vert ^{2}= & \\ \left\Vert \left(\frac{2}{k+1},\pm\frac{2}{2k+1}\right)-\left(\frac{2}{2k+3},\mp\frac{2}{2k+3}\right)\right\Vert ^{2}= & \\ \left(\frac{2}{2k+1}-\frac{2}{k+3}\right)^{2}+\left(\frac{2}{2k+1}+\frac{2}{2k+3}\right)^{2}\geq\left(\frac{2}{2k+1}+\frac{2}{2k+3}\right)^{2}\geq & \\ \left(\frac{2}{2k+3}+\frac{2}{2k+3}\right)^{2}=\left(\frac{4}{2k+3}\right)^{2}\end{aligned}$$

ולכן:

$$\left\|\gamma\left(\frac{2}{2k+1}\right)-\gamma\left(\frac{2}{2k+3}\right)\right\|\geq\frac{4}{2k+3}$$

כלומר:

$$\text{dist}\left(\gamma\left(\frac{2}{2k+1}\right),\gamma\left(\frac{2}{2k+3}\right)\right)\geq\frac{4}{2k+3}$$

ולכן קיבלנו כי:

$$\ell\left(\gamma,P\right)\geq\sum_{k=1}^{N}\frac{4}{2k+3}$$

נשים לב כי כאשר $N\to\infty$ נקבל כי:

$$\ell\left(\gamma,P_N\right)\underset{N\to\infty}{\longrightarrow}\infty$$

בפרט:

$$\sup_{P}\ell\left(\gamma,P\right)=\infty$$

ולכן לפי טענה 11.56 ראינו שאם γ היא מסילה בעלת אורך אז האורך שווה לסופרימום. מכאן γ היא מסילה שאיננה בעלת אורך בקטע $[0,1]$.

למה 11.65

תהי γ סדרה רציפה בקטע $[a,b]$. הראו שלכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל t_1,t_2 כך ש $|t_1-t_2|<\delta$ מתקיים:

$$\text{dist}\left(\gamma\left(t_1\right),\gamma\left(t_2\right)\right)<\varepsilon$$

הוכחה: נשים לב כי:

$$\text{dist}\left(\gamma\left(t_1\right),\gamma\left(t_2\right)\right)=\sqrt{\left(x\left(t_1\right)-x\left(t_2\right)\right)^2+\left(y\left(t_1\right)-y\left(t_2\right)\right)^2}$$

בהינתן ε_1 קיים δ_1 כך שאם $|t_1-t_2|<\delta_1$ אז:

$$|x\left(t_1\right)-x\left(t_2\right)|<\varepsilon$$

(כי x רציפה במ"ש ב $[a,b]$).
כמו כן באופן דומה קיים δ_2 כך שאם $|t_1-t_2|<\delta_2$ אז:

$$|y\left(t_1\right)-y\left(t_2\right)|<\varepsilon$$

יהי $\delta=\min\left(\delta_1,\delta_2\right)$ נבחין כי:

$$\text{dist}\left(\gamma\left(t_1\right),\gamma\left(t_2\right)\right)\leq\sqrt{\varepsilon_1^2+\varepsilon_1^2}=\sqrt{2}\varepsilon_1$$

נבחן: $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ מ.ש.ל. ■

הערה 11.66 תוכלו להעזר בתרגיל זה כדי להוכיח שאם $S = \sup\limits_{P} \ell(\gamma, P)$ הוא סופי. אז קיים $\lim\limits_{\mu(P)\to 0} \ell(\gamma, P)$ והוא שווה ל-S.

29/05/2011

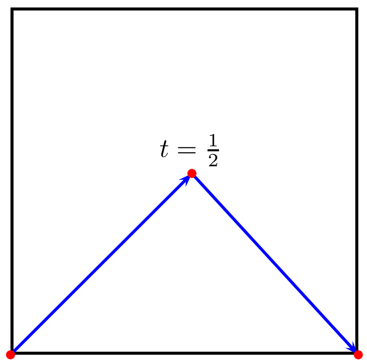
שאלה נתבונן בריבוע, האם קיימת מסילה רציפה שעוברת על כל הנקודות בריבוע המלא?

משפט 11.67 ***Peano, 1890***

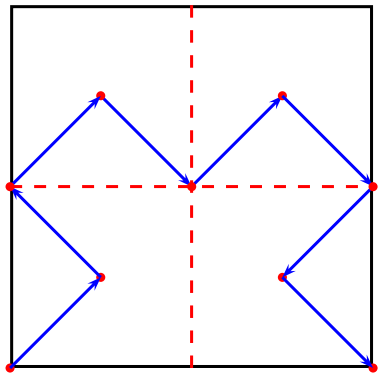
קיימת מסליה רציפה $r : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ שהיא **<u>על</u>** (לא בהכרח חח"ע) הריבוע.

הערה 11.68 בסוף המאה ה19 התחילו להתעניין בתורת הקבוצות. אפשר להראות שקיימת העתקה חח"ע ועל מ $f : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ השאלה אם אפשר לעשות את זה בצורה רציפה. ההוכחה שאנחנו נראה היא לא ההוכחה המקורית, אבל היא מגניבה כי היא משלבת הרבה ממה שלמדנו. (הערה של מירב)
ההוכחה הנ"ל היא של הילברט (הגב־גבר)

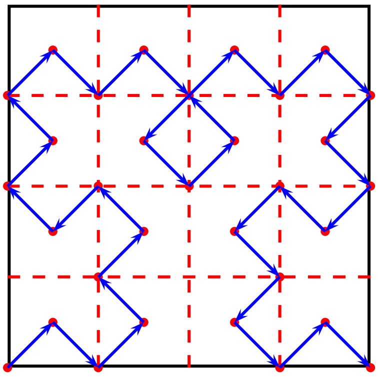
הוכחה: שלב ראשון, נתבונן במסילה הבאה:



ונסמנה בγ_0.
נגדיר פעולה על מסילה כזו: נחליף את המסילה הנ"ל במסילה:

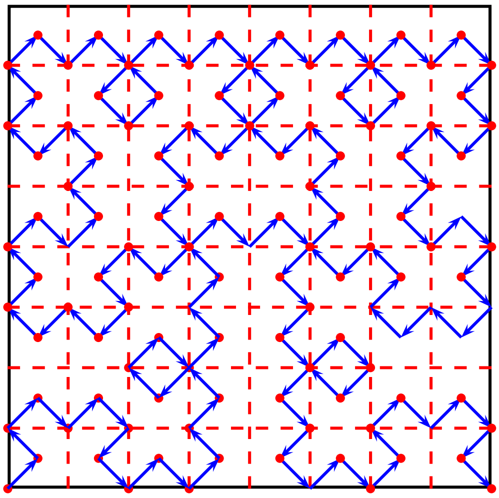


כלומר חלקנו את הריבוע ל4 והעתקנו את אותה המסילה תוך כדי שסובבנו אותה. נסמנה ב γ_1.
נשים לב שכל ריבוע קטן נראה כמו המסילה המקורית. רק מסובבת.
שלב שני נבצע את הפעולה שוב ונקבל את המסילה γ_2:



ושוב כל ריבוע קטן נראה כמו המסילה המקורית. ולמעשה כל 4 ריבועים נראים כמו השלב הקודם.

ושוב: γ_3:



נסמן $\gamma_n(t)=(x_n(t),y_n(t))$ נשים לב כי:

$$\begin{aligned} x_n:[0,1] &\to [0,1] \\ y_n:[0,1] &\to [0,1] \end{aligned}$$

פונקציות רציפות (בכל שלב שהגדרנו שמרנו על הרציפות).

טענה 11.69

הסדרת הפונקציות (x_n) ו (y_n)מתכנסות במ"ש

הוכחה: נעזר בקריטריון קושי. (x_n) מתכנס במידה שווה ב $[0,1]$ אם"ם לכל $\varepsilon>0$ קיים N כך שלכל $m,n>N$ מתקיים:

$$\sup_{t\in[0,1]}|x_n(t)-x_m(t)|<\varepsilon$$

נשים לב כאשר אנחנו עוברים בין שלב לשלב שבו אנחנו מחליפים מסילה, אנחנו עוברים למסילה מסובכת יותר שעושה את המסלול באותו זמן.

ניקח t מסויים, אז במסילה הבאה הנקודות $(x_n(t), y_n(t))$ נשארת באותו ריבוע לכן:

$$|x_n(t) - x_{n+1}(t)| \leq \frac{1}{2^n}$$

($\frac{1}{2^n}$ הוא אורך הצלע הריבוע בשלב ה־n).
באופן דומה:

$$|y_n(t) - y_{n+1}(t)| \leq \frac{1}{2^n}$$

הערה 11.70 אפשר להשתמש באותו טיעון על $|x_n(t) - x_m(t)|$, אבל מנגובי רוצה להראות דרך מסובכת יותר.

$$\begin{aligned} &|x_n(t) - x_{n+k}(y)| \leq \\ &|x_n(t) - x_{n+1}(t)| + |x_{n+1}(t) - x_{n+2}(t)| + \ldots + |x_{n+k-1}(tr) - x_{n+k}(t)| \leq \\ &\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+k-1}} \leq \sum_{l=n}^{\infty} \frac{1}{2^l} = \frac{\frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{2^n} \end{aligned}$$

קיבלנו שלכל $m > n$ מתקיים:

$$\forall t \quad |x_n(t) - x_m(t)| \leq \frac{2}{2^n}$$

לכן, לכל $N < m, n$ מתקיים:

$$\sup_{t\in[0,1]} \left| x_n(t) - x_m(t) \leq \frac{2}{2^n} \right|$$

אם כן, מקריטריון קושי: (x_n) מתכנסת במ"ש בקטע $[0,1]$ ובאופן דומה גם (y_n) מתכנסת במ"ש בקטע $[0,1]$ ■

הערה 11.71 הערכה קצת יותר זהירה מראה שלכל $m, n > N$ מתקיים:

$$\sup_{t\in[0,1]} |x_n(t) - x_m(t)| \leq \frac{1}{2^N}$$

(כי בכל שלב עתידי, הנקודה $x_n t$ לא עוזבת את הריבוע הקטן עם צלע $\frac{1}{2^n}$).

נסמן:

$$\begin{aligned} x(t) &= \lim_{n\to\infty} x_n(t) \\ y(t) &= \lim_{n\to\infty} y_n(t) \end{aligned}$$

נשים לב כי x, y הן פונקציות רציפות (מפני שהסדרות (x_n) ו(y_n) הן סדרות של פונקציות רציפות המתכנסות במש ל x ו y בהתאמה).
נגדיר:

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$

נרצה להראות שהמסילה היא על הריבוע המלא.
נשים לב כי:

$$\begin{aligned} \forall t \quad |x_n(t) - x_m(t)| &\leq \frac{2}{2^n} \\ \forall t \quad |y_n(t) - y_m(t)| &\leq \frac{2}{2^n} \end{aligned}$$

נשאיף את $m \to \infty$ ונקבל:

$$\begin{aligned} \forall t \quad |x_n(t) - x(t)| &\leq \frac{2}{2^n} \\ \forall t \quad |y_n(t) - y(t)| &\leq \frac{2}{2^n} \end{aligned}$$

תהי P נקודה $(a,b) \in [0,1] \times [0,1]$. קיימת נקודה $t_2 \in [0,1]$ כך שעבור γ_2:

$$\begin{aligned} |x_2(t_2) - a| &\leq \frac{1}{2^2} \\ |y_2(t_2) - b| &\leq \frac{1}{2^2} \end{aligned}$$

כי המסילה γ_2חותכת את כל 16 הריבועים באורך צלע $\frac{1}{2^2}$.
באופן כללי, קיימת נקודה $t_n \in [0,1]$ כך ש:

$$\begin{aligned} |x_n(t_n) - a| &\leq \frac{1}{2^n} \\ |y_n(t_n) - b| &\leq \frac{1}{2^n} \end{aligned}$$

כי γ_n חותכת את כל 2^{2n} הריבועים עם אורך צלע $\frac{1}{2^n}$.
בנוסף ראינו:

$$\begin{aligned} \forall t \quad |x_n(t) - x(t)| &\leq \frac{2}{2^n} \\ \forall t \quad |y_n(t) - y(t)| &\leq \frac{2}{2^n} \end{aligned}$$

ולכן:

$$|x(t_n) - a| \leq |x(t_n) - x_n(t_n)| + |x_n(t_n) - a| \leq \frac{2}{2^n} + \frac{1}{2^2} = \frac{3}{2^n}$$

ובאופן דומה:

$$|y(t_n) - b| \leq \frac{3}{2^n}$$

קיבלנו סדרה של נקודות $t_n \in [0,1]$ כך ש:

$$\begin{aligned} |x(t_n) - a| &\leq \frac{3}{2^n} \\ |y(t_n) - b| &\leq \frac{3}{2^n} \end{aligned}$$

ולכן:

$$\operatorname{dist}\left(\gamma\left(t_n\right),P\right)\le\sqrt{2\left(\frac{3}{2^n}\right)^2}=\sqrt{2}\cdot\frac{3}{2^n}$$

מכיוון שהסדרה t_n חסומה אזי לפי משפט בולצ'אנו ויירשטראס, לסדרה t_n קיימת תת סדרה מתכנסת $t_{n_k}\xrightarrow[k\to\infty]{}t_0\in[0,1]$.

$$\begin{aligned}\left|x\left(t_{n_k}\right)-a\right| &\le \frac{3}{2^{n_k}}\\ \left|y\left(t_{n_k}\right)-b\right| &\le \frac{3}{2^{n_k}}\end{aligned}$$

נקח גבול עבור המשוואות הנ"ל כאשר $k\to\infty$, נשים לב כי: $x\left(t_{n_k}\right)\xrightarrow[k\to\infty]{}x\left(t_0\right)$ (כיוון ש x רציפה) ולכן כאשר $k\to\infty$ נקבל:

$$\left|x\left(t_0\right)-a\right|\le\underbrace{0}_{\frac{3}{2^{n_k}}\xrightarrow[k\to\infty]{}0}$$

ובאופן דומה: $y\left(t_{n_k}\right)\xrightarrow[k\to\infty]{}y\left(t_0\right)$ (כיוון ש y רציפה) ולכן כאשר $k\to\infty$ נקבל:

$$\left|y\left(t_0\right)-b\right|\le\underbrace{0}_{\frac{3}{2^{n_k}}\xrightarrow[k\to\infty]{}0}$$

ולכן קיבלנו כי:

$$\begin{cases}x\left(t_0\right)=a\\ y\left(t_0\right)=b\end{cases}$$

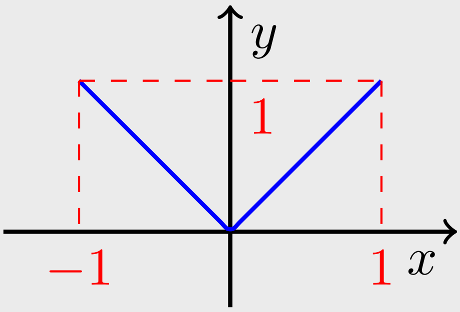
קיבלנו שקיים $t_0\in[0,1]$ כך ש $\gamma\left(t_0\right)=(a,p)=P$ ■

הערה 11.72 נרצה לשאול האם קיימת מסילה רציפה עבור היקף הריבוע? באופן טריוויאלי כן.

לכן נרצה לברר האם קיימת מסילה גזירה?

התשובה היא כן. לדוגמה, ניתן לקבל פינה בצורה הבאה (נראה גם בתרגול)

$$\gamma\left(t\right)=\begin{cases}\left(t^2,t^2\right) & t\ge0\\ \left(-t^2,t^2\right) & t\le0\end{cases}$$



מסילות כאלה נקראות מסילות סינגולריות.

משפט 11.73

קיימת פונקציה $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ רציפה, שאיננה גזירה באף נקודה.

הערה 11.74 מן הסתם לא נוכיח את זה. (דן אמר שאולי בשבוע הבא).
אבל פונקציה כזאת ניתן למצוא כאן: http://en.wikipedia.org/wiki/Weierstrass_function

02/06/2011

טענה 11.75

תהי $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ מסילה רציפה. נניח ש:

$$S=\sup\left\{\ell\left(\gamma,P\right)\mid\quad P \text{ חלוקה של } [a,b]\right\}<\infty$$

אז γ מסילה בעלת אורך, כלומר קיים הגבול:

$$\lim_{\mu(P)\to0}\ell\left(\gamma,P\right)$$

והוא שווה לS.

הוכחה: יהי $\varepsilon>0$ נתון. תהי P_0 חלוקה כך ש:

$$\ell\left(\gamma,P_0\right)>S-\varepsilon$$

(קיים מכיוון ש S חסם עליון). נשים לב שלכל חלוקה Q שמעדנת את P_0 מתקיים:

$$S\geq\ell\left(\gamma,Q\right)\geq\ell\left(\gamma,P_0\right)>S-\varepsilon$$

נסמן בN את מספר הנקודות ב P_0. לפי למה 11.65 קיים $\delta>0$ כך שאם $|t_1-t_2|<\delta$ אז:

$$\operatorname{dist}\left(\gamma\left(t_1\right),\gamma\left(t_2\right)\right)<\frac{\varepsilon}{2N}$$

תהי P חלוקה כלשהי כך ש $\mu\left(P\right)<\delta$.

$$S\geq\ell\left(\gamma,P\cup P_0\right)>S-\varepsilon$$

למה 11.76

אם P חלוקה כך ש $\mu\left(P\right)<\delta$ אז:

$$\ell\left(\gamma,P\right)\leq\ell\left(\gamma,P\cup\{c\}\right)\leq\ell\left(\gamma,P\right)+\frac{\varepsilon}{N}$$

הוכחה: יהי $\varepsilon>0$. נסמן:

$$P=\{a=t_0,t_1,t_2,\ldots,t_n=b\}$$

יהי $c\in\mathbb{R}$ כך ש $t_{k-1}\leq c\leq t_k$. נשים לב כי:

$$\ell\left(\gamma,P\cup\{c\}\right)=\sum_{l=1}^{k-1}\operatorname{dist}\left(\gamma\left(t_l\right),\gamma\left(t_{l-1}\right)\right)+\operatorname{dist}\left(\gamma\left(c\right),\gamma\left(t_{k-1}\right)\right)+$$
$$\operatorname{dist}\left(\gamma\left(t_k\right),\gamma\left(c\right)\right)+\sum_{l=k+1}^{n}\operatorname{dist}\left(\gamma\left(t_l\right),\gamma\left(t_{l-1}\right)\right)$$

אבל כיוון ש $\mu(P) < \delta$ אזי: $|t_{k-1} - c| < \delta$ וגם $|t_k - c| < \delta$ ולכן:

$$\leq \sum_{l=1}^{k-1} \operatorname{dist}(\gamma(t_l), \gamma(t_{l-1})) + \sum_{l=k+1}^{n} \operatorname{dist}(\gamma(t_l), \gamma(t_{l-1})) + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2N} \leq$$
$$\sum_{l=1}^{n} \operatorname{dist}(\gamma(t_l), \gamma(t_{l-1})) + \frac{\varepsilon}{N} = \ell(\gamma, P) + \frac{\varepsilon}{N}$$

כנדרש. ■

מהלמה הנ"ל נובע ש:

$$S - \varepsilon < \ell(\gamma, P \cup P_0) \leq \ell(\gamma, P) + N\frac{\varepsilon}{N} = \ell(\gamma, P) + \varepsilon$$

נסמן:

$$P_0 = \{a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < T_N = b\}$$

$$P \cup P_0 = P \cup \{t_0\} \cup \{t_1\} \cup \ldots \cup \{t_N\}$$

$$S - \varepsilon < \ell(\gamma, P \cup P_0) \leq \ell(\gamma, P) + \underbrace{\frac{\varepsilon}{N} + \ldots + \frac{\varepsilon}{N}}_{N \text{ פעמים}} = \ell(\gamma, P) + \varepsilon$$

ולכן:

$$S - 2\varepsilon < \ell(\gamma, P)$$

לכן, הוכחנו שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם P חלוקה כך ש $\mu(P) < \delta$ אז $S - 2\varepsilon < \ell(\gamma, P)$ לכן הגבול:

$$\lim_{\mu(P) \to 0} \ell(\gamma, P) = S$$

■

למה 11.77

תהי $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ מסילה בעלת אורך. יהיו $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ כך ש: $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ אז $\gamma|_{[x_1,x_2]}$ בעלת אורך.

הוכחה: תהי P חלוקה של הקטע $[x_1, x_2]$. נשים לב כי:

$$\ell\left(\gamma|_{[x_1,x_2]}, P\right) \leq \gamma(\gamma, P \cup \{a, b\}) \leq \ell(\gamma)$$

ולכן קיבלנו כי האורך חסום כלומר:

$$\sup_{P} \ell\left(\gamma|_{[x_1,x_2]}, P\right) \leq \gamma(P) < \infty$$

ולכן, לפי טענה 11.75 $\gamma|_{[x_1,x_2]}$ מסילה בעלת אורך. ■

טענה 11.78

תהי $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ מסילה רציפה בעלת אורך. יהי $c \in \mathbb{R}$ כך ש $a < c < b$. אז:

$$\gamma|_{[a,c]} : [a, c] \to \mathbb{R}^2$$
$$\gamma|_{[c,b]} : [c, b] \to \mathbb{R}^2$$

בעלות אורך ומתקיים:

$$\ell(\gamma) = \ell\left(\gamma|_{[a,c]}\right) + \ell\left(\gamma|_{[c,b]}\right)$$

הערה 11.79 אם γ גזירה ברציפות הטענה נובעת מאדטיביות האינטגרל:

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \,\mathrm{d}t$$

הוכחה: מלמה 11.77 אנו יודעים כי המסילות

$$\begin{aligned} \gamma|_{[a,c]} : [a,c] &\to \mathbb{R}^2 \\ \gamma|_{[c,b]} : [c,b] &\to \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

בעלות אורך, נרצה להראות כי:

$$\ell(\gamma) = \ell\left(\gamma|_{[a,c]}\right) + \ell\left(\gamma|_{[c,b]}\right)$$

ראשית נראה כי:

$$\ell(\gamma) \le \ell\left(\gamma|_{[a,c]}\right) + \ell\left(\gamma|_{[c,b]}\right)$$

תהי P חלוקה כלשהי של $[a,b]$ נשים לב כי:

$$\ell(\gamma, P) \le l(\gamma, P \cup \{c\}) = \ell(\gamma, P_1 \cup P_2)$$

כאשר P_1 היא חלוקה של $[a,c]$ ו P_2 היא חלוקה של $[c,b]$ ומתקיים: $P \cup \{c\} = P_1 \cup P_2$.

$$\ell(\gamma, P_1 \cup P_2) = \ell\left(\gamma|_{[a,c]}, P_1\right) + \ell\left(\gamma|_{[c,b]}, P_2\right) \le \ell\left(\gamma|_{[a,c]}\right) + \ell\left(\gamma|_{[c,b]}\right)$$

הראינו לכל חלוקה P של $[a,b]$ מתקיים:

$$\ell(\gamma, P) \le \ell\left(\gamma|_{[a,c]}\right) + \ell\left(\gamma|_{[c,b]}\right)$$

ומכאן:

$$\ell(\gamma) = \sup_P \ell(\gamma, P) \le \ell\left(\gamma|_{[a,c]}\right) + \ell\left(\gamma|_{[c,b]}\right)$$

כעת נרצה להראות כי:

$$\ell(\gamma) \ge \ell\left(\gamma|_{[a,c]}\right) + \ell\left(\gamma|_{[c,b]}\right)$$

יהי $\varepsilon > 0$, תהי P_1 חלוקה של הקטע $[a,c]$ כך ש:

$$\ell\left(\gamma|_{[a,c]}\right) < \ell\left(\gamma|_{[a,c]}, P_1\right) + \varepsilon$$

כמו כן, תהי P_2 חלוקה של הקטע $[c,b]$ כך ש:

$$\ell\left(\gamma|_{[c,b]}\right) < \ell\left(\gamma|_{[c,b]}, P_2\right) + \varepsilon$$

נסמן $P = P_1 \cup P_2$ (חלוקה של הקטע $[a,b]$), נשים לב כי:

$$\ell(\gamma) \geq \ell(\gamma, P) = \ell\left(\gamma|_{[a,c]}, P_1\right) + \ell\left(\gamma|_{[c,b]}, P_2\right) \geq \ell\left(\gamma|_{[a,c]}\right) - \varepsilon + \ell\left(\gamma|_{[c,b]}\right) - \varepsilon$$

כלומר, קיבלנו כי לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים:

$$\ell(\gamma) \geq \ell\left(\gamma|_{[a,c]}\right) + \ell\left(\gamma|_{[c,b]}\right) - 2\varepsilon$$

ומכאן נובע אי השיוויון שרצינו להוכיח. ■

תרגיל: (יוכח בהרצאה הבאה).
תהי γ מסילה רציפה. אם:

$$\ell(t) := \ell\left(\gamma|_{[a,t]}\right)$$

אז ℓ רציפה.

05/06/2011

טענה 11.80

תהי $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ מסילה רציפה בעלת אורך. נגדיר $\ell : [a,b] = \ell\left(\gamma|_{[a,t]}\right)$. אזי ℓ היא פונקציה רציפה בקטע $[a,b]$.

הערה 11.81 אם γ גזירה ברציפות אז:

$$\ell(t) = \int_a^t \left\|\gamma'(s)\right\| \mathrm{d}s$$

$\left\|\gamma'(s)\right\|$ היא רציפה, בפרט אינטגרבילית ולכן לפי המשפט היסודי ℓ רציפה.

הערה 11.82 נשים לב ש $\ell(t)$ היא מונוטונית עולה:

$$\forall h \geq 0 \quad \ell(t+h) = \ell(t) + \underbrace{\ell\left(\gamma|_{[r,r+h]}\right)}_{\geq 0} \geq \ell(t)$$

הוכחה: יהי $\varepsilon > 0$. נרצה להראות רציפות מימין בנקודה $a \leq c < b$. כלומר, נרצה להראות כי קיים $\delta > 0$ כך ש:

$$\ell(c+\delta) - \ell(c) < \varepsilon$$

(ממונוטוניות הפונקציה ℓ אין צורך לבדוק את כל הנקודות בין c ל δ)
קיימת חלוקה P של $[a,b]$ כך ש:

$$\ell(\gamma) < \ell(\gamma, P) + \varepsilon$$

למה 11.83

לכל k מתקיים:

$$\ell\left(\gamma|_{[t_{k-1}, t_k]}\right) < \operatorname{dist}\left(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)\right) + \varepsilon$$

הוכחה: נניח שקיים k שעבורו:

$$\ell\left(\gamma|_{[t_{k-1},t_k]}\right)\geq \operatorname{dist}\left(\gamma\left(t_{k-1}\right),\gamma\left(t_k\right)\right)+\varepsilon$$

נשים לב כי:

$$\ell\left(\gamma\right)=\ell\left(\gamma|_{[t_{k-1},t_k]}\right)+\ell\left(\gamma|_{[a,t_{k-1}]}\right)+\ell\left(\gamma|_{[t_k,b]}\right)\geq$$
$$\operatorname{dist}\left(\gamma\left(t_{k-1}\right),\gamma\left(t_k\right)\right)+\varepsilon+\sum_{l=1}^{k-1}\operatorname{dist}\left(\gamma\left(t_{l-1}\right),\gamma\left(t_l\right)\right)+\sum_{l=+1}^{b}\operatorname{dist}\left(\gamma\left(t_{l-1}\right),\gamma\left(t_l\right)\right)$$

כעת נעריך את:

$$\ell\left(c+\delta\right)-\ell\left(c\right)=\ell\left(\gamma|_{[c,c+\delta]}\right)\underset{\substack{t_{k-1}\leq c<t_k\\ \text{קטן } \delta}}{\leq}\ell\left(\gamma|_{[t_{k-1},t_k]}\right)$$

אם P_0 חלוקה שמקיימת:

$$\ell\left(\gamma\right)<\ell\left(\gamma,p_0\right)+\varepsilon$$

אז מכיוון ש $t_{k-1}\leq c<t_k$ וδ קטן נקבל:

$$\ell\left(c+\delta\right)-\ell\left(c\right)\leq \operatorname{dist}\left(\gamma\left(t_{k-1}\right),\gamma\left(t_k\right)\right)+\varepsilon$$

■

קיים $\delta_1>0$ כך שלכל חלוקה P עם פרמטר קטן מ δ_1 מתקיים:

$$\forall k\quad \operatorname{dist}\left(\gamma\left(t_{k-1}\right),\gamma\left(t_k\right)\right)<\varepsilon$$

תהי P_1 חלוקה כלשהי עם פרמטר קטן מ δ_1. נגדיר: $P_2:=P_1\cup P_0$. P_2 היא חלוקה עם פרמטר קטן מ δ_1 ובנוסף מקיימת:

$$\ell\left(\gamma\right)<\ell\left(\gamma,P_2\right)+\varepsilon$$

נסמן ב t_k את נקודת החלוקה של P_2 נניח:

$$t_{k-1}\leq c<t_k$$

$$\ell\left(c+\delta\right)-\ell\left(c\right)\leq \operatorname{dist}\left(\gamma\left(t_{k-1}\right),\gamma\left(t_k\right)\right)+\varepsilon<2\varepsilon$$

■

חלק VI
חזרות על דברים שפספסנו

12 טורים

12.1 טורי חזקות

12.1.1 משפט הרציפות של Abel

משפט 12.1 משפט הרציפות של $Abel$

יהי $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות עם רדיוס התכנסות R. ונניח שהטור מתכנס עבור $x = R$.

אז $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ היא פונקציה רציפה בנקודה R. כלומר:

$$\lim_{x \to R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

הוכחה: לשם הפשטות נניח $R = 1$ וגם נניח כי: $0 = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n 1^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$. נסמן ב $S_n(x)$ את סדרת הסכומים החלקיים של הטור המקורי כלומר:

כמו כן נסמן ב S_n את סדרת הסכומים החלקיים עבור $x = 1$. נקבל כי:

$$\begin{aligned} S_n(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n = \\ & S_0 + (S_1 - S_0)x + (S_2 - S_1)x^2 + \ldots + (S_n - S_{n-1})x^n = \\ & S_0(1-x) + S_1 x(1-x) + \ldots + S_{n-1}x^{n-1}(1-x) + S_n x^n = \\ & (1-x)\left(S_0 + S_1 x + \ldots + S_{n-1}x^{n-1}\right) + S_n x^n \end{aligned}$$

נקח גבול כאשר $n \to \infty$ נקבל:

$$f(x) = (1-x) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} S_k x^k + \underbrace{S_n x^n}_{=0}$$

לפי ההנחה עבור $x = 1$ מתקיים $S_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ לכן הביטוי: $S_n x^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ עבור $x = 1$.

עבור $|x| < 1$ מתקיים $|x|^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, $S_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ ולכן:

$$S_n x^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

קיבלנו:

$$f(x) = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} S_n x^n$$

יהי $\varepsilon > 0$ ויהי $N \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N$ מתקיים: $|S_n| < \varepsilon$ ולכן:

$$\left|\sum_{n=N+1}^{\infty} S_n x^n\right| \le \sum_{n=N+1}^{\infty} |S_n x^n| < \varepsilon \cdot \sum_{n=N+1}^{\infty} |x|^n \le$$

$$\varepsilon \cdot \sum_{n=0}^{\infty} |x|^n = \frac{\varepsilon}{1-|x|}$$

ולכן:

$$|f(x)| = |(1-x)|\left|\left(\sum_{n=0}^{N} S_n x^n\right) + \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} S_n x^n\right)\right| \le$$

$$(1-x)\sum_{n=0}^{N} S_n x^n + (1-x) \cdot \frac{\varepsilon}{1-|x|} \underset{0<x<1}{=} (1-x)\sum_{n=0}^{N} S_n x^n + \varepsilon$$

נבחין כי:

$$\limsup_{x\to1}|f(x)|\le\varepsilon$$

אבל טענה זו נכונה לכל $\varepsilon>0$ ולכן:

$$\limsup_{x\to1}|f(x)|=0$$

כמו כן נקבל כי:

$$\liminf_{x\to1}|f(x)|\ge0$$

אבל מכיוון שהוא חייב להיות קטן מ $\limsup$ נקבל כי:

$$\liminf_{x\to1}|f(x)|=0$$

ולכן:

$$\lim_{x\to1}|f(x)|=0$$

כנדרש.

עתה נניח $R=1$ וגם: $\sum_{n=0}^{\infty}a_n=S$ נגדיר:

$$b_0=a_0-S,\quad\forall n\ge1\quad b_n=a_n$$

נביט בטור $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ זהו טור עם רדיוס התכנסות 1 וגם מתקיים: $\sum_{n=0}^{\infty}b_n=0$ ולכן זה נופל בקטגוריה כיוון שמתקיים:

$$g(1)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n-S$$

$$g(x)=f(x)-S\Rightarrow g(x)\underset{x\to1}{\longrightarrow}0$$

מכאן: $f(x)\underset{x\to1}{\longrightarrow}S$.

אם רדיוס ההתכנסות הוא $R>0$ כלשהו, אז רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(\frac{x}{R}\right)^n$ הוא 1 וחוזרים למקרה הקודם. ■

מסקנה 12.2

$\ln2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ מכיוון שר שראינו כי עבור $-1<x<x$ מתקיים:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$$

בנוסף הטור באגף ימיני מתכנס בנקודה $x=1$. אבל אנו יודעים כי:

$$\ln2=\lim_{x\to1^-}\ln(1+x)\underset{Abel}{=}1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$$

באופן דומה:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

נובע מכיוון ש:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$$

עבור $-1 < x < 1$.

12.2 אי שיוויון הממוצעים

יהיו $a, b > 0$. נסמן:

$$M(x) = \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$$

הממוצע ה xי.
נשים לב כי:

$$M(1) = \frac{a+b}{2} \qquad \text{הממוצע החשבוני}$$

$$M(-1) = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \qquad \text{הממוצע ההרמוני}$$

נשים לב:

$$\min(a,b) \le M(x) \le \max(a,b)$$

אכן אם $x > 0$ $a \le b$ אז:

$$a^x = \frac{a^x + a^x}{2} \le \frac{a^x + b^x}{2} \le \frac{b^x + b^x}{2} = b^x$$

$$a \le \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \le b$$

עבור $x < 0$:

$$a^x = \frac{a^x + a^x}{2} \ge \frac{a^x + b^x}{2} \ge \frac{b^x + b^x}{2} = b^x$$

ולכן:

$$a \le \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}} \le b$$

נשים לב כי:

$$M(2) = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \qquad \text{הממוצע הריבועי}$$

נראה כי:

$$M(0)=\sqrt{ab} \quad \text{הממוצע ההנדסי}$$

לצורך כך נקח גבול כאשר $x \to 0$. נהפוך את הביטוי לפשוט יותר בעזרת ביצוע $\log$ על שני האגפים ונקבל:

$$\lim_{x\to 0}\ln\left(M(x)\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\cdot\ln\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)\underset{\text{לופיטל}}{=}$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{2}{a^x+b^x}\cdot\left(\frac{a^x\ln a+b^x\ln b}{2}\right)=\frac{\ln a+\ln b}{2}=\ln\sqrt{ab}$$

$$\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$$

$$M(0)\le M(1)$$

משפט 12.3

M היא פונקציה מונוטונית עולה של x:

$$\lim_{x\to\infty}M(x) = \max\{a,b\}$$
$$\lim_{x\to-\infty}M(x) = \min\{a,b\}$$

הוכחה: נניח $0<x<y$. צריך להוכיח כי:

$$\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)\le\left(\frac{a^y+b^y}{2}\right)^{\frac{x}{y}}$$

נסמן $c=a^x, \quad d=b^x$ ולכן נרצה להראות כי:

$$\frac{c+d}{2}\le\left(\frac{c^{\frac{y}{x}}+d^{\frac{y}{x}}}{2}\right)$$

נסמן $p=\frac{y}{x}$. נשים לב כי $p>1$ (מכיוון ש $x<y$) ולכן נרצה להראות כי:

$$\frac{c+d}{2}\le\left(\frac{c^p+d^p}{2}\right)^{\frac{1}{p}}$$

נעזר באי שיוויון הבא:

$$ab\le\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$$

עבור $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. למשל:

$$ab \le \frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}$$

נוציא לוגריתם:

$$\ln a+\ln b \le \ln\left(\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\right)$$

ראשית נשים לב כי אם נסמן $\alpha=\frac{1}{p}$ ולכן: $1-\alpha=\frac{1}{q}$ נקבל:

$$a^p \le \alpha a^p+(1-\alpha)\, b^q \le b^q$$

ולכן:

$$\ln\left(\alpha a^p+(1-\alpha)\, b^q\right) \underset{\text{קעירות הלוג}}{\ge} a\ln a^p+(1-\alpha)\ln b^q=\ln a+\ln b$$

■

13 חומר למבחן

המבחן יהיה בנוי מ4 שאלות פתוחות. לא יהיה את הפרק על מידה אפס וקבוצות בנות מניה. **<u>יהיו מסילות!</u>**