חשבון אינפיניטסימלי מתקדם I 80315

אור דגמי, or@digmi.org

10 בינואר 2012

אתר אינטרנט: http://digmi.org

תקציר

סיכום ההרצאות של פרופסור אנדריי שנקובסקי משיעורי חשבון אינפיניטסימלי מתקדם I באוניברסיטה העברית בירושלים בשנת לימודים 2012.

תוכן עניינים

1 מבוא 3

1.1 ספרות 3

1.2 במה נדון? 3

2 מרחב מטרי 4

2.1 נורמה 5

2.2 קבוצות סגורות ופתוחות 7

2.3 שפה של קבוצה 9

2.4 קבוצה צפופה 10

2.5 רציפות 10

2.6 קומפקטיות 14

2.6.1 משפט ויירשטראס (Weierstrass) 17

2.7 הומיאומורפיזם 17

3 נגזרת 22

3.1 דיפרנציאביליות 22

3.1.1 כלל השרשרת 29

3.2 נוסחת טיילור 33

3.3 הפונקציה ההפוכה 38

3.4 כופלי לגרנז' 41

3.5 משפט הפונקצייה הסתומה 44

4 אינגרביליות ב$\mathbb{R}^n$ 49

4.1 אינטגרציית רימן 49

4.1.1 משפט פוביני 57

4.1.2 עקרון Cavalieri 58

4.2 חילוף משתנה 62

30/10/2012

1 מבוא

1.1 ספרות

נלמד בעיקר לפי הספר של י. לינדרשטראוס (בהוצאת האקדמון) "חשבון אינפיניטסימאלי מתקדם" חלק א' וחלק ב'.

ספרים נוספים:

- C.H. Edwards, "Advanced Calculus of Several Variables"
- W. Rudin, "Principles of Mathematical Analysis"
- R. Courant, "Differential and Integral Calculus", vol. 2
- M. Spivak, "Calculus of Manifolds"

1.2 במה נדון?

בקורס זה נדון בפונקציות מ $\mathbb{R}^n$ ל- $\mathbb{R}^m$. (לצורך הדיוק, לא בהכרח נדון ב$\mathbb{R}^n$ אלא ייתכן כי נדון ב $U \to \mathbb{R}^m$ כאשר $U \subset \mathbb{R}^m$).

בקורס נדון בשלושה מקרים:

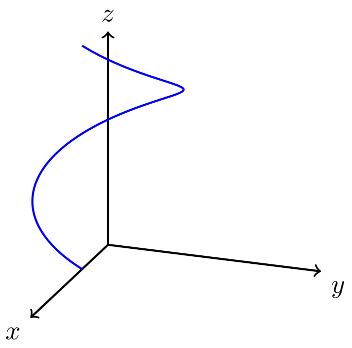
1. במקרה בו $n = 1$, כלומר בפונקציות מסגנון: $f : [a, b] \to \mathbb{R}^m$.

   (א) במידה והפונקציה היא רציפה, מדובר במסילה ב $\mathbb{R}^m$ (וראינו זאת בשנה שעברה בקורס אינפי 2)

   דוגמה 1.1 לדוגמה הפונקציה:

   $$f(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

   כאשר $t \in [0, 2\pi]$



2. במקרה בו $m = 1$ וn כללי. (פונקציה סקלארית של m משתנים).

   דוגמה 1.2 למשל בתרמו דינמיקה:

   $$f(p, V, T, t)$$

3. n, mכלליים. כלומר:

   $$f : \underset{\subset \mathbb{R}^n}{U} \to \mathbb{R}^m$$

   כלומר, $f = (f_1, \ldots, f_m)$כאשר $f_i : U \to \mathbb{R}$ עבור $i = 1, \ldots, m$.

דוגמה 1.3 לדוגמה הפונקציה:

$$f(x,y)=\left(x^2+y+\tan xy,x+y^2\right)$$

(א) לחילופין, מקרה של מערכת משוואות:

$$\begin{cases}y_1 & =f_1(x_1,\ldots,x_n)\\ \vdots\\ y_m & =f_m(x_1,\ldots,x_n)\end{cases}$$

המקרה הכי מעניין הוא $m=n$.

(ב) או מקרים של העתקות:

$$(x_1,\ldots,x_n)\to(y_1,\ldots,y_n)$$

הערה 1.4 למעשה מדובר באותם המקרים, פשוט מנקודת מבט שונה.

(ג) שינוי מערכת קואורדינטות (חילוף משתנה)

דוגמה 1.5 מעבר מקואורדינטות במערכת קרטזית לקואורדינטות כדוריות (ספריות)

$$(x,y,z)=f(r,\eta,\theta)=\gamma(\cos\eta\cos\theta,\sin\eta\cos\theta,\sin\theta)$$

2 מרחב מטרי

הגדרה 2.1 מרחב מטרי: מרחב מטרי הוא זוג (X,d) כאשר: $\mathrm{d}:X\times X\to[0,\infty)$ המקיימת 3 אקסימות:

1. $\mathrm{d}(x,y)=0$ אם"ם $x=y$
2. $\mathrm{d}(x,y)=\mathrm{d}(y,x)$
3. $\mathrm{d}(x,z)\le\mathrm{d}(x,y)+\mathrm{d}(y,z)$ (אי שיוויון המשולש)

דוגמה 2.2 המרחק האוקלידי: במקרה של$X=\mathbb{R}$ (או לחילופין גם $X=\mathbb{C}$ או $X=\mathbb{Q}$) ו $\mathrm{d}(x,y)=|x-y|$

ב$\mathbb{R}^n$: $\mathrm{d}(x,y)=\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i-y_i|^2}$

דוגמה 2.3 מטריקה דיסקרטית: בהינתן $X\neq\varnothing$ קבוצה

$$\mathrm{d}(x,y)=\begin{cases}1 & x\neq y\\ 0 & x=y\end{cases}$$

דוגמה 2.4 בהינתן S קבוצה כלשהי. וX קבוצת כל הפונקציות הממשיות החסומות על $\mathbb{R}$. עבור $f,g\in X$ נגדיר:

$$\mathrm{d}(f,g)=\sup_{s\in S}|f(s)-g(s)|$$

שתי האקסיומות הראשונות הן טריוויאליות, ואילו השלישית, נרצה להראות כי:

$$\sup_{s\in S}|f(s)-h(s)|\le\sup_{s\in S}|f(s)-g(s)|+\sup_{s\in S}|g(s)-h(s)|$$

אנו יודעים מאינפי 1 ו2 כי:

$$\sup_{s\in S}|f(s)-h(s)|\leq\sup_{s\in S}(|f(s)-g(s)|+|g(s)-h(s)|)$$
$$\leq\sup_{s\in S}|f(s)-g(s)|+\sup_{s\in S}|g(s)-h(s)|$$

כנדרש.

דוגמה 2.5 (V,E) גרף קשיר, $\mathrm{d}(v,w)$ אורך המסילה מv לw.

הגדרה 2.6 סדרה מתכנסת: $(x_k)_{k=1}^{\infty}\subset X$ מתכנסת ל x אם: $\lim\mathrm{d}(x_n,x)=0$

דוגמה 2.7 נשתמש בהגדרת המרחב המטרי מדוגמה: 2.2
$x_k=\left(x_k^1,\dots,x_k^n\right)\to x=\left(x^1,\dots,x^n\right)$ אס"ם $\lim\limits_{k\to\infty}x_k^j=x^j$ עבור $j=1,\dots,n$ כי $\mathrm{d}(x_k,x)\geq\left|x_k^j-x^j\right|$ לכל j הכיוון הראשון נכון. הכיוון השני הוא טריוויאלי כי:

$$\sqrt{\sum\left|x_k^j-x^j\right|^2}\xrightarrow[k\to\infty]{}0$$

דוגמה 2.8 נשתמש בהגדרת המרחב המטרי מדוגמה: 2.3
$x_n\in X$, $x_n\to x$ במטריקה דיסקרטית אס"ם $x_n=x$ החל מn מסויים. (אותו דבר גם עבור דוגמה 2.5)

דוגמה 2.9 נשתמש בהגדרת המרחב המטרי מדוגמה: 2.4
$f_n\to f$ אס"ם $f_n(s)\overset{\text{במ"ש}}{\longrightarrow}f(s)$ על S אזי: $\mathrm{d}(f_n,f)\to 0$. ולכן:
יהי $\varepsilon>0$, צ"ל כי קיים N כך שלכל $n>N$ ולכל $s\in S$ מתקיים:

$$|f_n(s)-f(s)|\leq\varepsilon$$

יהי N כך ש $\mathrm{d}(f_n,f)\leq\varepsilon$ לכל $n>N$.
כיוון שני:
מניחים התכנסות במ"ש. צ"ל שלכל $\varepsilon>0$ קיים N כך ש $\mathrm{d}(f_n,f)\leq\varepsilon$ לכל $n>N$.
יהי N כך שלכל $n>N$ ולכל $s\in S$ מתקיים:

$$|f_n(s)-f(s)|\leq\varepsilon$$

לכל $n>N$ מתקיים: $\|f_n-f\|<\varepsilon$ וז"א: $\mathrm{d}(f_n,f)\leq\varepsilon$.

2.1 נורמה

הגדרה 2.10 נורמה: יהי X מרחב וקטורי (מעל $\mathbb{R}$). הפונקציה $x\to[0,\infty)$ נקראת **נורמה** אם לכל $x,y\in X$ מתקיים:

1. $\nu(x)=0$ אס"ם $x=0$
2. $\nu(tx)=|t|\,\nu x$ לכל $t\in\mathbb{R}$ (בפרט: $\nu(x)=\nu(-x)$)
3. $\nu(x+y)\leq\nu(x)+\nu(y)$

דוגמה 2.11 p **נורמה:** $x\in\mathbb{R}^n$, $\|x\|_1=\sum\limits_{j=1}^{n}|x_j|$, $\|x\|_\infty=\max|x_i|$ והגדרה כללית: $\|x\|_p=\left(\sum|x_j|^p\right)^{1/p}$
כאשר $1\leq p\leq\infty$

הערה 2.12 X מרחב וקטורי, ו $\|\|$ נורמה ב X, המטריקה X הנצורת ע"י $\|\|$ היא המטריקה:

$$\mathrm{d}(x,y)=\|x-y\|$$

למשל המטריקה האוקלידית היא המטריקה הנוצרת ע"י הנורמה $\|\|_2$ ב $\mathbb{R}^n$
נוכיח כי d היא מטריקה:

.1

$$\|x-y\|=0 \iff x-y=0 \iff x=y$$

2. טריוויאלי

.3

$$\mathrm{d}(x,z)=\|x-z\|\le\|x-y\|+\|y-z\|=d(x,y)+d(y,z)$$

המטריקה בדוגמה 2.4 נוצרת ע"י הנורמה: $\|f\|=\sup_{s\in S}|f(s)|$

תרגיל: להוכיח כי זוהי נורמה

01/11/2011

הערה 2.13 מטריקה הנוצרת ע"י נורמה הינה אינווריאנטית תחת הזזות.
זאת אומרת:

$$\mathrm{d}(x,y)=\mathrm{d}(x+a,y+a)$$

הגדרה 2.14 מטריקה מושרית: בהינתן (X,d) מרחב מטרי, ו $X\supset Y\neq\varnothing$. **המטריקה המושרית** מ$X$ לY היא המטריקה: $\mathrm{d}|_{Y\times Y}$

דוגמה 2.15 המטריקה המושרית על הכדור $x^2+y^2+z^2=r^2$ מ $\mathbb{R}^3$ - המרחק יהיה הקו הישר בין שתי הנקודות, בניגוד למרחק גיאודזי על פני הכדור.

הגדרה 2.16 כדור פתוח\סגור: $r>0$, $x\in X$, $B_r(x)=\{y\in X|\ \mathrm{d}(x,y)<r\}$ כדור פתוח בעל רדיוס r עם מרכז ב x.
כדי להגדיר כדור סגור פשוט נשנה את ה $<$ ב $\le$ כלומר:

$$\overline{B_r}(x)=\{y\in X|\ \mathrm{d}(x,y)\le r\}$$

דוגמה 2.17 X מרחב דיסקרטי

$$B_r(x)=\begin{cases}\{x\} & r\le 1\\ X & r>1\end{cases}$$

ואילו כדור סגור:

$$\overline{B_r}(x)=\begin{cases}\{x\} & r<1\\ X & r\ge 1\end{cases}$$

דוגמה 2.18 כאשר X מרחב נורמי:

$$B_r(x)=x+rB_1(0)$$

הגדרה 2.19 הקוטר של A: בהינתן $X\supset A\neq\varnothing$ הקוטר של A נתון על ידי:

$$\mathrm{d}\,A=\sup\{\mathrm{d}(x,y)\,;\,x,y\in A\}$$

הערה 2.20

$$\mathrm{d}\left(B_r\left(x\right)\right) \leq \mathrm{d}\left(\overline{B_r}\left(x\right)\right) \leq 2r$$

(במרחב נורמי יש שיווין, בדיסקרטי לא)

הגדרה 2.21 קבוצה חסומה: התנאים הבאים שקולים, ואומרים כי הקבוצה חסומה:

1. $\mathrm{d}\,A < \infty$
2. לכל $x \in X$ קיים r כך ש $A \subset B_r\left(x\right)$
3. קיים $x \in A$ ו r כך ש $A \subset B_r\left(x\right)$

2.2 קבוצות סגורות ופתוחות

הגדרה 2.22 קבוצה פתוחה: אומרים ש A היא קבוצה פתוחה אם לכל $x \in A$ קיים $r > 0$ כך ש $B_r\left(x\right) \subset A$.

הגדרה 2.23 קבוצה סגורה: אומרים ש A היא קבוצה סגורה אם A^c היא פתוחה

טענה 2.24

$B_r\left(x\right)$ פתוחה ו$\overline{B_r}\left(x\right)$ סגורה.

הוכחה: יהי $y \in B_r\left(x\right)$ נסמן:

$$s = r - \mathrm{d}\left(x, y\right) > 0$$

ברור ש:

$$B_r\left(x\right) \supset B_s\left(y\right)$$

כיוון שאנו יודעים כי לפי הגדרת המרחב המטרי (הגדרה 2.1) :

$$\mathrm{d}\left(z, x\right) \leq \mathrm{d}\left(z, y\right) + \mathrm{d}\left(y, x\right) < s + r - s = r$$

כאשר $z \in B_s\left(y\right)$. ולכן $B_r\left(X\right)$ פתוחה.
צ"ל ש $X \backslash \overline{B_r}\left(x\right)$ פתוח. יהי $y \in \left(\overline{B_r}\left(x\right)\right)^c$. נסמן $s = \mathrm{d}\left(x, y\right) - r > 0$. ברור ש $\left(\overline{B_r}\left(x\right)\right)^c \supset B_s\left(y\right)$
ז"א אם $y < \mathrm{d}\left(z, y\right)$ אז $\mathrm{d}\left(z, x\right) > r$. ■

טענה 2.25

קבוצה A הינה סגורה אס"ם לכל סדרה $\left\{x_k\right\}_{k=1}^{\infty} \subset A$ כך ש $x = \lim_{k \to \infty} x_k$ גורר ש $x \in A$

הוכחה: נוכיח את הטענה הנגדית, קבוצה A איננה סגורה אס"ם קיימת סדרה $\left\{x_k\right\}_{k=1}^{\infty} \subset A$ מתכנסת כך ש $\lim_{k \to \infty} x_k \notin A$.

A איננה סגורה $\Longleftrightarrow$ A^c איננה פתוחה $\Longleftrightarrow$ קיים $x \in A^c$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים $B_{\frac{1}{n}} \not\subset A^c$
כלומר: קיים $A \ni x_n \to x \Leftarrow x_n \in B_{\frac{1}{n}}\left(x\right) \cap A$ ■

טענה 2.26

תכונות בוליאניות של קבוצות פתוחות

1. איחוד (מספר סופי) של קבוצות סגורות הינו סגור
2. חיתוך מספר סופי של קבוצות פתוחות הינו פתוח
3. חיתוך של כל אוסף קבוצות סגורות הינו סגור
4. איחוד של כל אוסף של קבוצות פתוחות הינו פתוח

הוכחה:

1.

2. יהיו U,V קבוצות פתוחות. $x\in U\cap V$. צ"ל שקיים r כך ש $B_r(x)\subset U\cap V$.
לפי ההנחה קיימים $q,s>0$ כך ש $B_q(x)\subset U$ וגם $B_s(x)\subset V$ ולכן ברור שעבור: $r=\min\{s,q\}$ מתקיים: $B_r(x)\subset U\cap V$

3.

4. $\mathcal{A}$ אוסף של קבוצות פתוחות. צ"ל $\cup\mathcal{A}$ פתוחה. יהי $x\in\cup\mathcal{A}$. ז"א קיים $A\in\mathcal{A}$ כך ש $x\in A$. A פתוחה, לכן קיים $r>0$ כך ש $B_r(x)\subset A\subset\cup\mathcal{A}$

■

הערה 2.27 לכל קבוצה $A\subset X$ קיימות

1. קבוצה סגורה מינימלית שמכילה את A מסמנים אותה $\overline{A}$ והיא נקראת הסגור של A.

2. קבוצה פתוחה מקסימלית המוכלת בA מסמנים אותה $\mathring{A}$ הפנים של A.

דוגמה 2.28 $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$, $\mathring{\mathbb{Q}}=\varnothing$.

הערה 2.29 A סגורה אס"ם $A=\overline{A}$ וכמו כן, A פתוחה אס"ם $A=\mathring{A}$.

06/11/2011

טענה 2.30

$$\bar{A}=\left\{x:x=\lim_{n=\infty}x_n \text{ כך ש } \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ קיימת סדרה}\right\}$$

הוכחה: נסמן $B=\left\{x:x=\lim_{n=\infty}x_n \text{ כך ש } \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ קיימת סדרה}\right\}$.
נשים לב כי $\bar{A}\subseteq B$ נובע מטענה 2.25. נרצה להראות ש B סגורה. ברור ש $A\subseteq B$. נבנה $\{x_{k_j}\}_{j=1}^{\infty}$ $k,=1,2,\ldots$. סדרות ב A. צריך להוכיח שאם:

$$B\ni x_k=\lim_{j\to\infty}x_{k_j}$$

וקיים $x=\lim_{k\to\infty}x_k$ אזי גם $x\in B$.
עבור $k=1,2,\ldots$ יהי j_k כזה ש: $\mathrm{d}(x_k,x_{k,j_k})<\frac{1}{k}$ מתקיים

$$\underbrace{\mathrm{d}(x,x_k)}_{\to 0}+\underbrace{\mathrm{d}(x_k,x_{k,j_k})}_{\to 0}\geq\mathrm{d}(x,x_{k,j_k})$$

לכן: $x=\lim_{k\to\infty}x_{k,j_k}$ ו: $x_{k,j_k}\in A$ לכל k. ■

למה 2.31

תכונות של $\bar{A}$ ו- $\mathring{A}$

.1

$$()^c = \overline{A^c} \iff \ = \left(\overline{A^c}\right)^c$$

.2

$$A \subseteq B \Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B},\ \mathring{A} \subseteq \mathring{B}$$

.3

$$\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cup B}$$

.4

$$\mathring{A} \cap \mathring{B} = (A \cap B)^{\circ}$$

.5

$$\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$$

.6

$$\left(\mathring{A} \cup \mathring{B}\right) \subseteq (A \cup B)^{\circ}$$

הערה 2.32 ב 5,6 יתכן אי שיוויון: $(-\infty, 0)$ $A = (-\infty, 0)$ $B = (0, \infty)$

הוכחה: ■

.1

.2

.3

$$\bar{A} \cup \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B} \Leftarrow \begin{cases} \bar{A} \subseteq \overline{A \cup B} & \Leftarrow A \subseteq A \cup B \\ \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B} & \Leftarrow B \subseteq A \cup B \end{cases}$$

כי הקבוצה $\bar{A} \cup \bar{B}$ סגורה מכילה את A ו־B. בגלל המינימליות מכיל את $\overline{A \cup B}$

2.3 שפה של קבוצה

הגדרה 2.33 שפה של קבוצה: קבוצה $\partial A = \bar{A} \backslash \mathring{A}$ נקראת השפה של A.

דוגמה 2.34

$$A = \left\{(x, y) :\ x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

$$\partial A = \left\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\right\}$$

כמו כן גם:

$$B = \left\{(x,y) :\ x^2+y^2<1\right\}$$

$$\partial B = \left\{(x,y) : x^2+y^2=1\right\}$$

דוגמה 2.35

$$\mathbb{Q}\subset\mathbb{R},\ \partial\mathbb{Q}=\mathbb{R}$$

הערה 2.36 ∂A הוא יחסי. אם כלל המרחב שלנו הוא X אזי תמיד: $\partial X=\varnothing$ (אין שפה לכלל המרחב).

2.4 קבוצה צפופה

הגדרה 2.37 אומרים שקבוצה $A\subseteq B$ הינה צפופה בA אם $A\subseteq\bar{B}$ (כל קבוצה צפופה בעצמה)

דוגמה 2.38 $\mathbb{Q}$ צפופה ב $\mathbb{R}$

$$\left\{\left(\frac{p}{2^m},\frac{q}{2^m}\right) :\ p,q\in\mathbb{Z},\ m\in\mathbb{N}\right\}$$

צפפה ב $\mathbb{R}^2$.

טענה 2.39

B צפופה ב A אס"ס לכל $x\in A$ ולכל $r>0$ קיים $y\in B$ כך ש $\mathrm{d}(x,y)<r$ (זאת אומרת: $y\in B_r(x)$)

הוכחה:

■

2.5 רציפות

הגדרה 2.40 רציפות בנקודה: (X,d), (Y,ρ) שני מרחבים מטריים. בהינתן פונקציה $f:X\to Y$, נאמר שהפונקציה f רציפה בנקודה $x_0\in X$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש:

$$\forall x\in X\quad \mathrm{d}(x_0,x)<\delta\Rightarrow\rho\left(f(x_0),f(x)\right)<\varepsilon$$

הערה 2.41 שקול ל:

$$f\left(B_\delta(x)\right)\subseteq B_\varepsilon\left(f(x)\right)$$

וכמו כן, שקול להגדרה סדרתית: אם $x_n\to x$ אזי $f(x_n)\to f(x)$.

הגדרה 2.42 פונקציה רציפה: אומרים שהפונקציה $f:X\to Y$ רציפה אם היא רציפה לכל $x\in X$.

דוגמה 2.43 אומרים ש f מקיימת תנאי ליפשיץ (עם קבוע K) אם לכל $x,y\in X$ מתקיים:

$$\rho\left(f(x),f(y)\right)\le K\,\mathrm{d}(x,y)$$

ברור שפונקציית ליפשיץ היא רציפה כי עבור $\varepsilon>0$ נקח $\delta=\frac{\varepsilon}{K}$

טענה 2.44

התנאים הבאים שקולים:
1. f רציפה
2. לכל קבוצה פתוחה $U \subseteq Y$ הקבוצה: $f^{-1}(U)$ פתוחה בX.
3. לכל קבוצה סגורה $A \subseteq Y$ הקבוצה $f^{-1}(A)$ סגורה.

הערה 2.45 2,3 שקולים כי: $f^{-1}(A^c) = f^{-1}(A)^c$

$$f^{-1}(A) = \{x : f(x) \in A\}$$

(לא מדובר בפונקציה הופכית)

הוכחה: $1 \Leftarrow 2$:
יהי $x \in f^{-1}(U)$, כלומר קיים $z \in U$ כך ש: $z = f(x)$. f רציפה ב x וU פתוחה.
יהי $\varepsilon > 0$ כך ש $B_\varepsilon(z) \subseteq U$. מרציפות f קיים $\delta > 0$ כך ש $f(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(z)$. כלומר:

$$B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(B_\varepsilon(z))$$

לכן $f^{-1}(U)$ פתוחה.
$2 \Leftarrow 1$:
יהי $x \in X$. יהי $\varepsilon > 0$ צריך להוכיח $\delta > 0$.
נסמן: $U = B_\varepsilon(f(x))$ קבוצה פתוחה בY. לפי הנתון $f^{-1}(U)$ פתוחה. לכן קיים $\delta > 0$ כך ש $B_\delta(x) \subseteq f^{-1}(U)$ לכן:

$$f(B_\delta(x)) \subseteq f\left(f^{-1}(U)\right) = U$$

כנדרש. ∎

הערה 2.46

1. תהי $f : X \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה. אזי הקבוצות: $\{x : f(x) = a\}$, $\{x, f(x) \leq a\}$ הן סגורות לכל $a \in \mathbb{R}$.
2. כל קבוצה סגורה ניתנת להצגה כזו.

דוגמה 2.47 של פונקציה רציפה: תהי $\varnothing \neq A \subseteq X$ קבוצה. הפונקציה:

$$f(x) = \mathrm{d}(x, A)$$

מקיימת תנאי ליפשיץ (עם קבוע 1)

הערה 2.48

$$\mathrm{d}(x, A) = \inf_{a \in A} \mathrm{d}(x, a)$$

הוכחה: צריך להוכיח שלכל x, y

$$|\mathrm{d}(x, A) - \mathrm{d}(y, A)| \leq \mathrm{d}(x, y)$$

נניח בה"כ כי:

$$\mathrm{d}(y, A) \leq \mathrm{d}(x, A)$$

יהיו $y_1, y_2, \ldots \in A$ כך ש:

$$\mathrm{d}(y, A) = \lim_{b \to \infty} \mathrm{d}(y, y_n)$$

נשים לב כי:

$$\mathrm{d}(x,A)-\mathrm{d}(y,A)\le \mathrm{d}(x,y_n)-\mathrm{d}(y,A)$$

ומאי שיוויון המשולש נקבל כי:

$$\le \mathrm{d}(x,y)+\underbrace{\mathrm{d}(y,y_n)}_{\to \mathrm{d}(y,A)}-\mathrm{d}(y,A)\to \mathrm{d}(x,y)$$

ולכן קיבלנו:

$$\mathrm{d}(x,A)-\mathrm{d}(y,A)\le \mathrm{d}(x,y)$$

$\bar{A}=\{x,f(x)=0\}$ לכן $A=$ אם A סגורה. ■

טענה 2.49

הרכבה של פונקציות רציפות הינה רציפה. דהיינו אם: $f:X\to Y$, $g:Y\to Z$ פונקציות רציפות אזי $g\circ f$ רציפה.

הוכחה: תהיינה $g:Y\to Z$, $f:X\to Y$ מתקיים:

$$(g\circ f)^{-1}(U)=g^{-1}\left(f^{-1}(U)\right)$$

וזהו. ■

08/11/2011

טענה 2.50

פונקציה לינארית $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ היא ליפשיצית (ולכן רציפה)

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\left(\underbrace{\sum_{j=1}^{n}a_{1,j}x_j}_{f_1(x)},\ldots,\underbrace{\sum_{j=1}^{n}a_{m,j}x_j}_{f_m(x)}\right)$$

הוכחה: מתקיים: $f(x)-f(y)=f(x-y)$ לכן מספיק להראות שקיים k כך ש:

$$\|f(x)\|<K\|x\|$$

לכל $x\in\mathbb{R}^n$ כיוון שזה שקול לתנאי ליפשיץ:

$$\|f(x)-f(y)\|=\|f(x-y)\|\le\|x-y\|$$

$$\|f(x)\|^2=\sum_{k=1}^{m}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{kj}x_j\right|^2$$

ממשפט קושי־שוורץ אנו יודעים כי:

$$\left|\sum_{j=1}^{m}a_{kj}x_j\right|\le\left|\sum_{j}a_{kj}^2\right|^{1/2}\|x\|$$

ולכן:

$$\|f(x)\|^2=\sum_{k=1}^{m}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{kj}x_j\right|^2\le\sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{kj}^2\|x\|^2$$

ולכן, נסמן:

$$K=\left(\sum_{k,j}a_{kj^2}\right)$$

ונקבל:

$$\|f(x)\|^2\le K\|x\|^2$$

ולכן f היא ליפשיצית ולכן רציפה ■

טענה 2.51

יהיו $(X,\|\|)$ ו־ $(Y,\|\|)$מרחבים נורמיים. $T:X\to Y$ לינארית. אז התנאים הבאים שקולים:

1. T רציפה
2. T רציפה ב0
3. T מקיימת תנאי ליפשיץ

הוכחה: המעברים $1\Leftarrow 2$ ו: $3\Leftarrow 1$. הם טריוויאלים, לכן נוכיח את $2\Leftarrow 3$.
מהרציפות באפס אנו יודעים שקיים $\delta>0$ כך שלכל $\|x\|\le\delta$ מתקיים $\|Tx\|\le 1$. נבחר $0\ne y\in X$. ונקח $x=\delta\frac{y}{\|y\|}$ ברור ש: $\|x\|=\delta$ ולכן: $\|Tx\|\le 1$. אבל נשים לב כי: $Tx=\frac{\delta}{\|y\|}Ty$ לפי איך שהגדרנו את Tx.
ולכן:

$$\frac{\delta}{\|y\|}\|Ty\|=\|Tx\|\le 1$$

ולכן:

$$\|Ty\|\le\frac{1}{\delta}\|y\|$$

ולכן עבור $K=\frac{1}{\delta}$ נקבל כי:

$$\|Tx\|\le K\|x\|$$

עבור כל $x\in X$. כנדרש. ■

הגדרה 2.52 נורמה אופרטורית: תהי $T:X\to Y$ לינארית הנורמה האופרטורית של T היא

$$\|T\|=\sup\{\||Tx\||:\ \|x\|\le 1\}$$

הערה 2.53 מתקיים $\||Tx\||\le\|T\|\|x\|$ לכל x.

הוכחנו שעבור f כנ"ל:

$$\|f\|\le\left(\sum a_{kj}^2\right)^{1/2}$$

(לא אופטימלי)

טענה 2.54

בהינתן X מרחב מטרי ופונקציה $f:X\to\mathbb{R}^m$

$$f(x)=(f_1(x),\ldots,f_m(x))$$

רציפה אס"ם $f_j:x\to\mathbb{R}$ רציפה עבור $j=1,\ldots,m$

הוכחה: $\Leftarrow$: מתקיים $f_j=P_j\circ f$ כאשר $P_j(x_1,\ldots,x_m)=x_j$ (הטלה) ברור ש P_j רציפה ולכן f_j רציפה.
$\Rightarrow$ $x\in X$. יהי $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש $\mathrm{d}(x,y)<\delta$ ולכן: $|f_j(x)-f_j(y)|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ ובאופן ברור:

$$\|f(x)-f(y)\|<\varepsilon$$

■

2.6 קומפקטיות

הגדרה 2.55 כיסוי: בנהינתן (X,d) מרחב מטרי ו $A\subset X$ אומרים שמשפחת הקבוצות $\left\{\underbrace{U_\alpha}_{\subset U}\right\}_{\alpha\in D}$ היא כיסוי של A אם $A\subset\cup U_\alpha$

דוגמה 2.56 $\{X\}$ היא כיסוי של A, כמו כן גם $\{\{x\}:x\in X\}$, $\{\{x\}:x\in A\}$

הגדרה 2.57 כיסוי פתוח: בהינתן $\{U_\alpha\}_{\alpha\in D}$ כיסוי, נאמר שהיא **<u>כיסוי פתוח</u>** אם כל U_α היא קבוצה פתוחה.

דוגמה 2.58 עבור $\mathbb{R}$: $\{(n,n+2)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ הוא כיסוי פתוח של $\mathbb{R}$ כמו כן גם : $\{(-\infty,n)\}_{n\in\mathbb{N}}$

הגדרה 2.59 תת כיסוי: תת משפחה של כיסוי שהיא גם כיסוי, נקראת **<u>תת כיסוי</u>**.

דוגמה 2.60 $\{(n,n+15)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ היא **<u>לא</u>** תת כיסוי של $\{(n,n+2)\}_{n\in\mathbb{Z}}$.
נניח שלכל $a\in A$ ניתן מספר $r_a>0$ אזי: $\{B_{r_a}(a)\}_{a\in A}$ כיסוי פתוח של A.

הגדרה 2.61 קומפקטיות: $X\subseteq A$ נקראת קבוצה קומפקטית אם לכל כיסוי פתוח של A יש תת כיסוי סופי

הערה 2.62 למשל $\mathbb{R}$ איננו קומפקטי. כל קבוצה סופית כן קומפקטית

דוגמה 2.63

1. $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ לא קומפקטי כי נקח כיסוי: $\left\{\left(\frac{1}{n},\infty\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ ואין לו אף תת כיסוי סופי.
2. $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}\cup\{0\}$ כן קומפקטי כי יהי $\{U_\alpha\}_{\alpha\in D}$ כיסוי פתוח
3. יהי $\alpha_0\in D$ כך ש $0\in U_{\alpha_0}$. U_{α_0}פתוח ולכן קיים $r>0$ כך ש: $(-r,r)\subset U_{\alpha_0}$ לכל $n<\frac{1}{r}$. $\left\{\frac{1}{n}:n\leq\frac{1}{r}\right\}$היא קבוצה סופית וניתן לכסות איתה ע"י מספר סופי של U-ים.

טענה 2.64

> קבוצה קומפקטית היא תמיד סגורה.

הוכחה: $X\subseteq A$. יהי $x\in X\backslash A$. יהי $a\in A$, נגדיר $r_a=\frac{1}{2}\mathrm{d}(a,x)$ (נשים לב כי: $r_a>0$ כיוון ש $x\notin A$). ברור כי: $\{B_{r_a}(a)\}_{a\in A}$ הוא כיוסי פתוח. בגלל הקומפקטיות, קיימים $a_1,\ldots,a_n\in A$ כך ש: $A\subseteq\bigcup_{j=1}^{n}B_{r_{a_j}}(a_j)$.
נקח $r=\min\{r_{a_1},\ldots,r_{a_n}\}$ ברור ש:

$$\forall 1\leq j\leq n\quad B_{r_{a_j}}(a_j)\cap B_r(x)=\varnothing$$

נראה זאת:
נניח בשלילה כי קיים $y\in B_{r_{a_j}}(a_j)\cap B_r(x)$ אזי: $\mathrm{d}(y,x)<r$,$\mathrm{d}(y,a_j)<r_{a_j}$⇐$\mathrm{d}(x,a_j)<r+r_{a_j}$ וזו סתירה.
לכן, מצאנו כדור פתוח לכל $x\in X\backslash A$ (כלומר A^c) כך ש $B_r(x)\subseteq A^c$ ולכן A^c פתוחה כלומר A סגורה כנדרש. ■

טענה 2.65

> A קבוצה קומפקטית היא חסומה

הוכחה: ברור ש $\{B_1(a)\}_{a\in A}$ היא כיסוי פתוח (עוטפים כל איבר בA בכדור ברדיוס 1, ברור כי הכדורים יכילו את כלל איברי A).
יהי $B_1(a_1),\ldots,B_1(a_n)$ כיסוי של A. ז"א $A\subset\bigcup_{j=1}^{n}B_1(a_j)$. לכן:

$$\mathrm{d}\,A\leq\max_{1\leq j,k\leq n}\{\mathrm{d}(a_j,a_k)\}+2$$

(כמות סופית של איברים, בגלל שהכיסוי הוא סופי מהיות הקבוצה קומפקטית, לכן המקסימום מוגדר היטב). ■

הגדרה 2.66 חסומה לחלוטין: אומרים שקבוצה A היא חסומה לחלוטין אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימים מספר סופי של כדורים ברדיוס ε המכסים את A.

דוגמה 2.67 קבוצה קומפקטית הינה חסומה לחלוטין

הגדרה 2.68 מספר לבג: המספר הכי קטן של כדורים ברדיוס ε שמכסים את הקבוצה נקרא **מספר לבג** - $N_{\varepsilon}(A)$.

טענה 2.69

$A \subseteq X$ קומפקטית, $B \subseteq A$ סגורה, אזי: B קומפקטית.

הוכחה: יהי $\{U_{\alpha}\}_{\alpha \in D}$ כיסוי פתוח של B אזי המשפחה: $C = \{U_{\alpha}\}_{\alpha \in D} \cup \{X \backslash B\}$ היא כיסוי של A. A היא קומפקטית, לכן לC יש תת כיסוי סופי T. כלומר:

$$B \subseteq A \subseteq \bigcup_{x \in T} x$$

וכמו כן, ברור כי:

$$B \subseteq \bigcup_{x \in T \backslash \{X \backslash B\}} x$$

ולכן זהו תת כיסוי סופי של B כנדרש. ∎

משפט 2.70

$A \subset \mathbb{R}^n$ קומפקטית אס"ס A סגורה וחסומה.

הוכחה: $\Leftarrow$ תמיד (הראנו את המקרה הכללי לא רק ל $\mathbb{R}^n$)
$\Rightarrow$ המשך בשיעור הבא. ∎

13/11/2011 **דוגמה 2.71** X דיסקרטי, A קומפקטי אס"ם A סופי

הגדרה 2.72 תיבה: תיבה ב $\mathbb{R}^n$ היא קבוצה מהצורה:

$$A = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$$

כאשר $a_i \leq b_i$ לכל $1 \leq i \leq n$

הגדרה 2.73 חלוקה בינארית של תיבה היא חלוקה של התיבה לחצי בכל מימד.
כלומר נקבל 2^n (כאשר n הוא המימד) שקודקודיהן הם אוסף של נקודות מהמבנה $(c_1, \ldots, c_n)$ כאשר:

$$c_j = \begin{cases} a_j \\ \frac{1}{2}(a_j + b_j) \\ b_j \end{cases}$$

הערה 2.74 בכל תיבה מהחלוקה הבינארית קוטר שהוא שווה לחצי מהקוטר של A.

תזכורת 2.75 תזכורת מאינפי 1:

למה 2.76 למה של קנטור

יהי $c_1 \leq c_2 \leq \ldots$ וגם $d_1 \geq d_2 \geq \ldots$ כך ש : $c_j \leq d_j$ לכל j אזי:

$$\varnothing \neq \bigcap_{j=1}^{\infty} [c_j, d_j]$$

מסקנה 2.77

תהיינה $\ldots \supset A_2 \supset A_1$ תיבות, אזי:

$$\varnothing \neq \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$$

הוכחה: נשים לב כי:

$$A_j = \left[a_j^1, b_j^1\right] \times \ldots \times \left[a_j^n, b_j^n\right]$$

מההנחה אנו יודעים כי: $\ldots \leq a_2^j \leq a_1^i$ וגם $\ldots \geq b_2^j \geq b_1^i$
וברור כי:

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \left[a^1, b^1\right] \times \ldots \times \left[a^n, b^n\right]$$

כאשר: $a^k = \lim\limits_{j\to\infty} a_j^k$ ו: $b^k = \lim\limits_{j\to\infty} b_j^k$ והרי לפי הלמה של קנטור הקבוצות $\left[a^k, b^k\right]$ אינן ריקות.

ולכן $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j \neq \varnothing$ כנדרש. ■

טענה 2.78

כל תיבה הינה קומפקטית A

הוכחה: נניח בשלילה כי A כנ"ל איננה קומפקטית. זאת אומרת, קיים כיסוי פתוח $\{U_\alpha\}$ של A שאין לו תת כיסוי סופי.

נתבונן בחלוקה הבינארית של A לאחת מה"תת תיבות" בה אין תת כיסוי סופי של $\{U_\alpha\}$.

כך ברקורסיה מקביל סדרת תיבות: $A, A_1, A_2, \ldots$ כך שכל אחת מהן מוכלת בקודמת כלומר: $A \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots$

כך ש: $\mathrm{d}\, A_j = \frac{1}{2}\mathrm{d}\, A_j$. לפי המסקנה מהלמה של קנטור (מסקנה 2.77) אנו יודעים כי

$$\varnothing \neq \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j$$

וברור ש: $\mathrm{d} \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = 0$ לכן $\bigcap_{j=1}^{\infty} A_j = \{x\}$ (נקודה אחת) כך ש $x \in A$ ולכן קיים α כך ש $x \in U_\alpha$. U_α פתוח לכן קיים $r > 0$ כך ש $B_r(x) \subset U_\alpha$. יהי j כך ש $\mathrm{d}\, A_j < r$ אזי: $A_j \subset B_r(x) \subset U_{ga}$. ולכן קיבלנו סתירה. ל A_j יש תת כיסוי סופי (בעל איבר 1). ■

הוכחה: (של צד שני למשפט 2.70)

$X \subset \mathbb{R}^n$ חסומה, לכן קיימת תיבה A שמכילה את X. עבור K גדול מספיק:

$$X \subset [-K, K] \times \ldots \times [-K, K]$$

X סגורה גם ב A לכן X קומפקטית (לפי טענה 2.69). ■

טענה 2.79

קומפקטיות נשמרת תחת העתקות רציפות. זאת אומרת, אם $A \subseteq X$ קומפקטית ו $f: X \to Y$ רציפה אזי: $f(A)$ קומפקטית.

הוכחה: יהי $\{U_\alpha\}$ כיסוי פתוח ב Y של $f(A)$ אזי: $\left\{f^{-1}(U_\alpha)\right\}$ הוא כיסוי פתוח של A. (כי: $A \subset f^{-1}f(A) \subset f^{-1}\left(\bigcup U_\alpha\right) = \bigcup f^{-1}(U_\alpha)$, פתוח בגלל רציפות f ומטענה: 2.44)

A קומפקטי, לכן קיימים: $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ כך ש:

$$A \subset f^{-1}(U_{\alpha_1}) \cup \ldots \cup f^{-1}(U_{\alpha_n})$$

ולכן:

$$f(A) \subset f\left(f^{-1}U_{\alpha_1} \cup \ldots \cup f^{-1}(U_{\alpha_n})\right) = ff^{-1}(U_{\alpha_1}) \cup \ldots \cup ff^{-1}(U_{\alpha_n}) = U_{\alpha_1} \cup \ldots \cup U_{\alpha_n}$$

כלומר מצאנו תת כיסוי סופי לכיסוי $\{U_\alpha\}$. ולכן $f(A)$ קומפקטית. ■

2.6.1 משפט ויירשטראס (Weierstrass)

מסקנה 2.80 משפט *Weierstrass*

בהינתן $X \to [a,b] : f$ כך ש f רציפה אזי: $f([a,b])$ קומפקטית ולכן חסומה וסגורה.

הגדרה 2.81 אומרים שפונקציה $f : X \to Y$ הינה רציפה במ"ש אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש:

$$\mathrm{d}(x,y) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

טענה 2.82

אם X קומפקטית אזי כל $f : X \to Y$ רציפה הינה רציפה במ"ש.

הוכחה: f רציפה, לכן לכל $x \in X$ קיים $\delta_x > 0$ כך ש ε כך ש $\mathrm{d}(x,y) < \delta_x \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) < \varepsilon$

המשפחה $\left\{B_{\frac{1}{2}\delta_x}(x)\right\}$ היא כיסוי פתוח של X. לכן יש $x_1, \ldots, x_n$ כך ש $X \subset \bigcup_{j=1}^{n} B_{\frac{1}{2}\delta_{x_j}}(x_j)$.

נרצה להראות כי $\delta = \frac{1}{2}\min_j \left\{\delta_{x_j}\right\}$ מקיים

$$\forall x, y \in X \quad \mathrm{d}(x,y) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

יהיו $x, y \in X$ כך ש $\mathrm{d}(x,y) < \delta$, יהי j כך ש $x \in B_{\frac{1}{2}\delta_{x_j}}(x_j)$ מתקיים:

$$\mathrm{d}(y, x_j) = \underbrace{\mathrm{d}(y,x)}_{<\delta \le \frac{1}{2}\delta_{x_j}} + \underbrace{\mathrm{d}(x, x_j)}_{<\frac{1}{2}\delta_{x_j}} < \delta_{x_j}$$

ולכן:

$$\rho(f(y), f(x_j)) \le \frac{\varepsilon}{2}$$

ברור ש $\mathrm{d}(x, x_j) < \delta_{x_j}$ לכן גם $\rho(f(x), f(x_j)) < \frac{\varepsilon}{2}$ ולפי אי שיוון המשולש נקבל:

$$\rho(f(x), f(y)) \le \rho(f(x), f(x_j)) + \rho(f(x_j), f(y)) < \varepsilon$$

■

2.7 הומיאומורפיזם

הגדרה 2.83 הומיאומורפיזם (Homeomorphism): Y, X מרחבים מטריים, $f : X \to Y$, נקראת הומיאומורפיזם אם:

1. f היא בייקציה (חח"ע ועל)
2. f היא רציפה וגם העתקה f^{-1} רציפה

X, Y הומיאומורפיזם אם קיים המואומורפיזם $f : X \overset{\text{על}}{\to} Y$.

הערה 2.84 תהי $f : X \to Y$ בייקציה (חח"ע ועל)

1. f הומיאומורפיזם אס"ם לכל U פתוחה ב X $\iff$ $f(U)$ פתוחה ב Y.
2. f הומיאומורפיזם אס"ם $x_n \to x$ $\iff$ $f(x_n) \to f(x)$

דוגמה 2.85

1. $f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \tan x$

2. $f:[0,2\pi)\to\mathbb{R}^2$ כך ש: $f(t)=(\cos t,\sin t)$

משפט 2.86

תהי $f:X\to Y$ בייקציה רציפה. אם X קומפטקטי אזי f^{-1} גם כן רציפה.

הוכחה: נוכיח שמקור של כל קבוצה סגורה בX ע"י f^{-1} הוא סגור בY.

$X\supset A$ סגורה לכן קומפקטית. f רציפה, לכן: $\left(f^{-1}\right)^{-1}(A)=f(A)$ קומפקטית, לכן סגור. ■

הגדרה 2.87 שלמות: מרחב מטרי X נקרא שלם אם כל סדרת קושי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ב X מתכנסת כך ש $\lim\limits_{n\to\infty}x_n\in X$.

תזכורת 2.88 סדרת קושי: סדרה $\{x_n\}_n^{\infty}\subset X$ נקראת סדרת קושי (cauchy) אם לכל $\varepsilon>0$ קיים N כך ש:

$$n,n>N\Rightarrow \mathrm{d}(x_n,x_m)<\varepsilon$$

דוגמה 2.89

1. $\mathbb{R}$ שלם.
2. $\mathbb{Q}$ לא שלם.

משפט 2.90

1. X שלם. $X\supset A$ סגור $\Leftarrow$ A שלם.
2. X כלשהו, $X\supset A$ שלם $\Leftarrow$ A סגור

הוכחה:

1. תהי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי ב $A\subset X$. X שלם לכן קיים $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x\in X$ אך A סגור לכן $x\in A$.
2. תהי $A\supset\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה שיש לה גבול ב X. נניח כי $\lim\limits_{n\to\infty}x_N=x\subset X$. צריך להוכיח $x\in A$ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת לכן סדרת קושי. A שלם ולכן $x\in A$.

■

15/11/2011

טענה 2.91

$\mathbb{R}^n$ (עם מטריקה אוקלידית) הוא שלם

הוכחה: תהי $x_k=\left(x_k^1,\ldots,x_k^n\right)$ סדרת קושי. מכיוון ש:

$$\left|x_k^j-x_m^j\right|\le\|x_k-x_m\|$$

לכל j הסדרה $\mathbb{R}\supset\left\{x_k^j\right\}_{k=1}^{\infty}$ היא סדרת קושי (עבור $j=1,\ldots,n$).$\mathbb{R}$ שלם, לכן קיים $x^j=\lim\limits_{k\to\infty}x_k^j$. לכן $x_k\to x$ כאשר $x=\left(x^1,\ldots,x^n\right)$. ■

מסקנה 2.92

$A\subset\mathbb{R}^n$ שלמה אס"ס A סגורה.

דוגמה 2.93 $\{(x,y):\ xy\ge 1\}$ שלם.

טענה 2.94

קבוצה A הינה קומפקטית אם לכל משפחת קבוצות סגורות $A\supset\{A_\alpha\}_{\alpha\in D}$ בעלת תכונה הבאה:
לכל n, $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in D$, $A_{\alpha_1}\cap\ldots\cap A_{\alpha_n}\ne\varnothing$ (תכונת החיתוכים הסופיים - *FIP*)
מתקיים: $\bigcap\limits_{\alpha\in D}A_\alpha\ne\varnothing$

הוכחה: נראה ש A לא קומפקטית אם"ם קיימת משפחה של קבוצות סגורות A_α כך ש: $\bigcap\limits_{\alpha\in D} A_\alpha=\varnothing$, אך לכל $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ החיתוך $A_{\alpha_1}\cap\ldots\cap A_{\alpha_n}\neq\varnothing$
קיימת משפחה של קבוצות פתוחות (דהיינו: $U_\alpha=X\backslash A_\alpha$) שהיא כיסוי של X אך אין לו תת כיסוי סופי.

$$A\subset\bigcup_{\alpha\in D}U_\alpha$$

$$A\neq U_{\alpha_1}\cup\ldots\cup U_{\alpha_n}$$

ולכן A לא קומפקטי. ■

טענה 2.95

A קומפקטי $\Leftarrow A$ שלם.

הוכחה: תהי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי בA. נתבונן בקבוצות $A_n=\overline{\{x_n,x_{n+1},\ldots\}}$. מתקיים:

$$A_1\cap\ldots\cap A_n=A_n\neq\varnothing$$

לכן לסדרה $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ יש את תכונת החיתוכים הסופיים. A קומפקטית לכן $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n\neq\varnothing$ מכיוון ש $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\Longleftrightarrow 0 \leftarrow \mathrm{d}\,A_n$ לכן קיים x כך ש $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}A_n=\{x\}$. ברור ש $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ ■

הגדרה 2.96 בהינתן K קומפקטי אז $C\left(K\right)$ הוא מרחב של כל הפונקציות הממשיות הרציפות על K. עם הנורמה $\|f\|=\|f\|_\infty$ ($\max\limits_{x\in K}|f\left(x\right)|$) טם המטריקה הנוצרת ע"י $\|\cdot\|$.

טענה 2.97

$C\left(K\right)$ הינו שלם.

הוכחה: תהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}\subset C\left(K\right)$ סדרת קושי. לכל n,m ולכל $x\in K$:

$$\|f_n-f_m\|\geq|f_n\left(x\right)-f_m\left(x\right)|$$

לכן לכל $x\in K$ $\{f_n\left(x\right)\}$ היא סדרת קושי (ב$\mathbb{R}$) לכן קיים $\lim\limits_{n\to\infty}f_n\left(x\right)$. נגדיר $f\left(x\right)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n\left(x\right)$. צריך להוכיח כי $\|f_n-f\|\to0$ וגם כי f רציפה.
$\|f_n-f\|\to0$ ברור, מכיוון ש: יהי $\varepsilon>0$. יהי N כך ש $\|f_n-f_m\|<\varepsilon$ לכל $n,m>N$ (ז"א $|f_n\left(x\right)-f_m\left(x\right)|<\varepsilon$ לכל $x\in K$) נשאיף את m לאינסוף ונקבל:

$$|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)|<\varepsilon$$

לכל $x\in k \Leftarrow \|f_n-f\|<\varepsilon$, ולכן f רציפה במ"ש.
נרצה להראות כי f רציפה: גבול במ"ש של סדרת פונקציות רציפות הינו רציף. יהי $x\in K$, יהי $\varepsilon>0$. צריך להוכיח $\delta>0$.
יהי n כך ש $\|f-f_n\|<\frac{\varepsilon}{2}$. הפונקציה f_nרציפה, לכן קיים $\delta>0$ כך ש:

$$\mathrm{d}\left(x,y\right)<\delta\Rightarrow|f_n\left(x\right)-f_n\left(y\right)|<\frac{\varepsilon}{2}$$

כמו כן אם $\mathrm{d}\left(x,y\right)<\delta$ נקבל:

$$|f\left(x\right)-f\left(y\right)|\leq|f\left(x\right)-f_n\left(x\right)|+|f_n\left(x\right)-f_n\left(y\right)|+|f_n\left(y\right)-f\left(y\right)|=\varepsilon$$

■

הערה 2.98 אם $\mathrm{d}\left(x_{n+1},x_n\right)\leq MK^n$ עם $0<K<1$ אזי $\{x_n\}$ היא סדרת קושי

דוגמה 2.99

$$f(a)\,f(b)<0$$

$$c_0=\frac{1}{2}(a+b)\,,\;a_0=a,\;b_0=b$$

באינדוקציה:

$$(a_{i+1},b_{i+1})=\begin{cases}(c_i,b_i)\\(a_i,c_i)\end{cases}$$

כך ש:

$$f(a_{i+1})\,f(b_{i+1})$$

ואז: $x=\lim a_i=\lim b_i$ הפתרון הגדול קיים כי:

$$|a_{i+1}-a_i|=2^{-i}\,|b-a|$$

לכן $\{a_i\}$היא סדרת קושי. בנוסף השגיאה היא כמו: $2^{-i}\,|b-a|$

הגדרה 2.100 תהי $f:X\to X$ פונקציה. $x\in X$ נקראת נקודת שבת של f אם $f(x)=x$.

דוגמה 2.101 אם $f:[0,1]\to[0,1]$ וf רציפה, אזי לf יש נקודת שבת כיוון שנתבונן בפונקציה:

$$F(x)=x-f(x)$$

מתקיים:

$$F(1)\geq 0,\qquad F(0)\leq 0$$

לפי משפט ערך הביניים, קיים x_0 כך ש $F(x_0)=0$ ולכן $f(x_0)=x_0$

משפט 2.102 משפט *Brouwer*

X כדור ב $\mathbb{R}^n$. $f:X\to X$ רציפה אזי לf יש נקודות שבת.

הגדרה 2.103 אומרים שלמרחב X יש תכונת נקודת שבת אם לכל פונקצייה רציפה $f:X\to X$ יש נקודת שבת.

דוגמה 2.104 לסיבוב (אמיתי) של המעגל אין נקודות שבת.
לכל סיבוב (חיובי) של הספארה ב$\mathbb{R}^3$ יש נקודות שבת.

הגדרה 2.105 העתקה מכווצת: $f:X\to X$ העתקה מכווצת אם מקיימת את תנאי ליפשיץ עם קבוע $1>$. זאת אומרת, $\mathrm{d}(f(x),f(y))\leq K$ כאשר $K<1$.

דוגמה 2.106 למשל אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה, אז מכווצת $\iff$ $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|f'(x)|<1$. בגלל משפט ערך הממוצע:

$$|f(x)-f(y)|=|f'(c)|\,|x-y|$$

משפט 2.107 משפט העתקה המכווצת

X מרחב שלם, $f:X\to X$ העתקה מכווצת. אזי לf יש נקודת שבת יחידה.

הוכחה: יהי $x_0 \in X$ כלשהו. נגדיר באינדוקציה: $x_{n+1} = f(x_n)$
טענה: $\{x_n\}$ היא סדרת קושי. כיוון ש:

$$\mathrm{d}(x_{n+1}, x_n) = \mathrm{d}(f(x_n), f(x_{n-1})) \leq K\,\mathrm{d}(x_n, x_{n-1}) \leq K^2\,\mathrm{d}(x_{n-1}, x_{-2}) \leq K^n\,\mathrm{d}(x_1, x_0)$$

כלומר קיבלנו כי:

$$\mathrm{d}(x_{n+1}, x_n) \leq K^n\,\mathrm{d}(x_1, x_0)$$

כלומר כל $\{x_n\}$ היא סדרת קושי (כיוון ש $0 < K < 1$).
X שלם, לכן קיים $x = \lim x_n$. נרצה להראות כי $f(x) = x$ כי נפעיל על $x = \lim x_n$ אז:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} x_n = x$$

נניח ש $f(x) = x$, $f(y) = y$ נרצה להראות $x = y$. נשים לב כי מתקיים:

$$K\,\mathrm{d}(x, y) \geq \mathrm{d}(f(x), f(y)) = \mathrm{d}(x, y) \Rightarrow \mathrm{d}(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$$

■

X מרחב וקטורי. הקשר בין הפתרון של $f(x) = 0$ לנקודת שבת:
$f(x_0) = 0$ אם"ם x_0 היא נקודת שבת של פונקציה F המוגדרת ע"י $F_\lambda(x) = x - \lambda f(x)$ לכל $\lambda \neq 0$.

דוגמה 2.108 $f(x) = x^2 - 2 = 0$

$$F_\lambda = x - \lambda\left(x^2 - 2\right)$$

$X \subset \mathbb{R}$ סגור, כך ש $F_\lambda : X \to X$ ו: $\sup_{x\in X} \underbrace{|F_\lambda(x)|}_{1-2\lambda x} < 1$

20/11/2011

מסקנה 2.109

$f : V \to V$. V מרחב וקטורי. אם קיים $X \subset V$ ומטריקה שלמה על X כך שעבור הפונקציה:

$$F(x) = x - \lambda f(x)$$

ומתקיים:
1. $F(X) \subset X$
2. F מכווצת במטריקה

אזי בXיש למשוואה $f(x) = 0$ בדיוק פתרון אחד x_∞. ו: $x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_n$כאשר: $x_{n+1} = x_n - \lambda f(x_n)$
והשגיאה היא:

$$\mathrm{d}(x_n, x_\infty) \leq \frac{k^n}{1-k}\,\mathrm{d}(x_1, x_0)$$

דוגמה 2.110 $f(x) = x^2 - 2$, זאת אומרת אנו מחפשים $\sqrt{2}$. נקח $X = [a, b]$ כאשר $a > 0$.

$$F(x) = x - \lambda\left(x^2 - 2\right)$$

$$F'(x) = 1 - 2\lambda x$$

אנו יודעים כי $\sqrt{2} \in [1, 2]$ (שיקולים נאיביים). נבחר $\lambda = \frac{1}{4}$. נקבל כי: $0 < F'(x) \leq \frac{1}{2}$.
נקבל:

$$x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_n$$

כאשר:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{1}{4}\left(x_n^2 - 2\right)$$

כאשר $x_0 = 1$.
נקבל גי השגיאה $\geq \frac{1}{4} \cdot 2^{-n+1}$

שיטת ניוטון **משפט 2.111**

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$, כאשר $f'(x)>0$ וגם $f''(x)>0$ בקטע $[a,b]$ כך ש: $f(a)<0<f(b)$. אז ל $f(x)=0$ יש פתרון $x_\infty=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.כאשר:

$$x_0=b,\quad x_{n+1}=x_n-f'(x_n)\,f(x_n)$$

3 נגזרת

3.1 דיפרנציאביליות

הגדרה 3.1 דיפרנציאביליות: תהי $f:U\to\mathbb{R}^m$, $U\subset\mathbb{R}^n$ פתוחה, $a\in U$. אומרים ש f דיפרנציאבילית (=גזירה) בa אם קיימת העתקה: $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ לינארית כך ש:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-Th}{\|h\|}=0\in\mathbb{R}^m$$

שקול ל:

$$\lim\frac{\|fm(a+h)-f(a)-Th\|}{\|h\|}=0\in\mathbb{R}$$

הערה 3.2 למקרים בהם $h=0$, נסמן: $\frac{\mathbb{R}^m\ni 0}{\mathbb{R}\ni 0}=0\in\mathbb{R}^m$ תמיד

ההגדרה שקולה לנוסחת טיילור:

$$f(a+h)=f(a)+Th+r(h)$$

כאשר T לינארית ו:

$$\lim_{h\to 0}\frac{r(h)}{\|h\|}=0$$

סימון $\hom(n,m)$ (הומומורפיזם, **לא** הומיאומורפיזם!) הוא המרחב נורמי של כל ההעתקות לינאריות מ$\mathbb{R}^n$ ל$\mathbb{R}^m$ עם הנורמה האופרטורית:

$$\underbrace{\|T\|}_{\text{לא נורמה על } T}=\sup\{\|Tx\|\cdot\|x\|\le 1\}$$

כאשר הנורמות $\|x\|,\|Tx\|$ הן אוקלידיות. זה שקול ל:

$$\|T\|=\inf\{K|\ \|Tx-Ty\|\le K\|x,y\|\}=\sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|}|\ 0\ne x\in\mathbb{R}^n\right\}=\sup\{\|Tx\|\ |\ \|x\|=1\}$$

דוגמה 3.3 $n=m=1$ $T\in\hom(1,1)$ אם"ם קיים $\alpha\in\mathbb{R}$ כך ש $Tx=\alpha x$ אז:

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(a+h)-f(a)-\alpha h}{h}\right|=0\iff\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\alpha\iff\alpha=f'(a)$$

הערה 3.4 $T(h)=\alpha h$, T הוא הדיפרנציאל של f, לא הנגזרת. והוא יסומן: $T=Df(a)$ (או סימון נוסף: $D_f(a)$ בספר ואצל רות לורנס)
כלומר הדיפרנציאל של f בa.

הערה 3.5 אם f דיפרנציאבילית בכל נקודה של U, אז מוגדרת העתקה $Df : U \to \hom(n,m)$

דוגמה 3.6 $n=2$, $m=1$. $a \in (x,y)$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)-T(h,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)-T(0,h)}{h}=0$$

טענה 3.7

אם f,g דיפרנציאביליות ב a, אזי הפונקציה: $\alpha f+\beta g$ (כאשר $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$) גם כן דיפרנציאבילית ומתקיים:

$$D(\alpha f+\beta g)(a)=\alpha Df(a)+\beta Dg(a)$$

הוכחה: נסמן: $T=Df(a)$ ו־ $S=Dg(a)$. מתקיים:

$$\begin{cases}\lim_{h\to 0}\frac{\alpha[f(a+h)-f(a)]-\alpha Th}{\|h\|}=0\\ \lim_{h\to 0}\frac{\beta[g(a+h)-g(a)]-\beta Sh}{\|h\|}=0\end{cases}$$

נחבר אותן ונקבל:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(\alpha f+\beta g)(a+h)-(\alpha f+\beta g)(a)-\overbrace{(\alpha Th+\beta Sh)}^{(\alpha T+\beta S)h}}{\|h\|}=0$$

ונשים לב כי:

$$\alpha T+\beta S=\alpha Df(a)+\beta Sf(a)$$

■

דוגמה 3.8 אם $f(x)=b\in\mathbb{R}^m$ פונקציה קבועה, אזי: $Df(a)=0$ כי אז:

$$\frac{f(a+h)-f(a)-0\cdot h}{\|h\|}$$

לכל h.

הערה 3.9 הדיפרנציאל הוא יחיד (אם קיים)!
נניח כי קיימים $T,S\in\hom(n,m)$ כך ש:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-Th}{\|h\|}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-Sh}{\|h\|}=0\Rightarrow\lim_{h\to 0}\frac{\|Th-Sh\|}{\|h\|}=0\Rightarrow$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|(T-S)h\|}{\|h\|}=0\Rightarrow T-S=0\Rightarrow T=S$$

כיוון שאם $(T-S)v\neq 0$ אזי, בהינתן $t>0$ כך ש $t\to 0$:

$$\frac{(T-S)(tv)}{\|tv\|}=(T-s)\frac{v}{\|v\|}\neq 0$$

טענה 3.10

תהי $f=(f_1,\ldots,f_m):U\to\mathbb{R}^m$. אזי f דיפרנציאבילית ב a אס"ם כל אחת מהפונקציות $f_1,\ldots,f_m$ דיפרנציאבילית ב a.

הוכחה: תהי $T\in \hom(n,m)$, $T=(T_1,\ldots,T_m)$ כאשר $T_j\in \hom(n,1)$.
נסמן: $r(h)=f(a+h)-f(a)-Th$ (השארית). מתקיים:

$$r(h)=(r_1(h),r_2(h),\ldots,r_m(h))$$

כאשר:

$$r_j(h)=f_j(a+h)-f_j(a)-T_jh$$

כמו כן, אנו יודעים כי: $\lim\limits_{h\to0}\frac{r(h)}{\|h\|}=0$ אס"ם $\lim\limits_{h\to0}\frac{r_j(h)}{\|h\|}=0$ לכל $1\le j\le m \iff T_j=Df_j(a)$
כלומר קיבלנו גם:

$$Df(a)=\begin{pmatrix}- & Df_1(a) & -\\ & \vdots & \\ - & Df_m(a) & -\end{pmatrix}$$

■

דוגמה 3.11 בפרט גם: $\mathbb{R}^m\to(\alpha,\beta):f=(f_1,\ldots,f_m)$, כלומר מסילה. דפרנציאבילית ב a אס"ם $f_1,\ldots,f_m$ גזירה בa ומתקיים: $Df(a)=\begin{pmatrix}f_1'(a)\\ \vdots\\ f_m'(a)\end{pmatrix}$.

איך מקבלים את $Df(a)h$?

$$Df(a)v=f(a+v)-f(a)-r(v)$$

כאשר $\lim\limits_{h\to0}\frac{r(h)}{\|h\|}=0$.

$$Df(a)v=\frac{f(a+tv)-f(a)}{t}-\frac{r(tv)}{t}$$

נשאיף את t לאפס ונקבל:

$$Df(a)v=\lim_{t\to0}\frac{f(a+tv)-f(a)}{t}-\cancelto{0}{\frac{r(tv)}{t}}$$

טענה 3.12

אם f דיפרנציאבילית בa אזי לכל $v\in\mathbb{R}^m$ קיים הגבול:

$$\lim_{t\to0}\frac{f(a+tv)-f(a)}{t}$$

22/11/2011

$f:\underbrace{U}_{\subset\mathbb{R}^n}\to\mathbb{R}^m$ דיפרנציאבילית ב$a\in U$ אם קיים $T\in\hom(n,m)$ כך ש $f(a+h)=f(a)+\underbrace{Th}_{=Df(a)}+r(h)$ כאשר: $\lim\limits_{h\to0}\frac{r(h)}{\|h\|}=0$.

כמו כן אומרים ש $r(h)$ הוא $o(\|h\|)$ ב0.

במקרה של שני מימדים מקרה נפוץ הוא:

$$r(h,k)=\alpha h^2+\beta hk+\gamma k^2$$

$$\lim_{(h,k)\to 0}\frac{|r(h,k)|}{\sqrt{h^2+k^2}}=0,\qquad \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h^2}{\sqrt{h^2+k^2}}\underset{?}{=}0$$

כיוון ש:

$$\left|\frac{h^2}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|\leq|h|\to 0$$

$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h^2}{\sqrt{h^2+k^2}}\underset{?}{=}0$ כי $|hk|\leq h^2+k^2$ לכן:

$$\left|\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}\right|\leq\underbrace{\sqrt{h^2+k^2}}_{\substack{||\\ \|(h,k)\|}}\underset{(h,k)\to 0}{\longrightarrow}0$$

הנוסחה:

$$Df(a)\,v=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+tv)-f(a)}{t}\in\mathbb{R}^m$$

ראשית נדבר על המקרה בו $m=1$.

הגדרה 3.13 כיוון ב-$\mathbb{R}^n$: כיוון ב-$\mathbb{R}^n$ הוא וקטור בעל אורך 1.

הגדרה 3.14 נגזרת כיוונית: אם v הוא כיוון, המספר $Df(a)\,v$ נקרא הנגזרת הכיוונית של f (בנקודה a בכיוון v)

סימון:

$$D_vf(a)\in\mathbb{R}$$

בהצגות גאומטריות $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

הגדרה 3.15 גרף: הגרף של f:

$$\mathbb{R}^{n+1}\supset\Gamma(f)=\{(x,f(x))\in U\times\mathbb{R}\}$$

הגדרה 3.16 קווי גובה: קווי גובה של f:

$$f^{-1}(c)=\{x:f(x)=c\}\subset\mathbb{R}^n$$

הגדרה 3.17 הנגזרת הכיוונית

$$D_{e_j} f(a)$$

כאשר:

$$e_j = \left(0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{j}, 0, \ldots, 0\right)$$

נקראת הנגזרת החלקית $f(a)$ של f בכיוון x_j. הסימון:

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{j-1}, a_j + t, a_{j+1}, \ldots, a_n) - f(a)}{t}$$

דוגמה 3.18 $f(x,y) = x^y$ כאשר

$$\varphi(x) = f(a_1, \ldots, a_{j-1}, x, a_{j+1}, \ldots, a_n)$$

$$x, y > 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} x^y = y x^{y-1} \neq \frac{\partial}{\partial y} x^y = \ln x \cdot x^y$$

הגדרה 3.19 גרדיאנט: אם קיימות כל הנגזרות החלקיות של f ב-a מגדירים את הגראדיאנט ב-a כ:

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right)$$

המכפלה הפנימית של גראדיאנט עם x:

$$\nabla f(a) \cdot x = \langle \nabla f(a), x \rangle = \sum x_j \underbrace{Df(a) e_j}_{\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)} = Df(a) x$$

כיוון ש:

$$\sum_j x_j e_j = (x_1, \ldots, x_n) = x \in \mathbb{R}^n$$

הערה 3.20 מכפלה פנימית נהוג לסמן ב $\cdot$ כלומר: $x \cdot y = \langle x, y \rangle$

במקרה עבור m כללי: $f = (f_1, \ldots, f_m)$ ונקבל כי:

$$Df(a) = (Df_1(a), \ldots, Df_m(a))$$

$$Df_j(a)x = \langle \nabla f_j(a), x \rangle \Rightarrow Df_j(a)(x) = \begin{pmatrix} Df_1(a)x \\ \vdots \\ Df_m(a)x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \nabla f_1(a), x \rangle \\ \vdots \\ \langle \nabla f_n(a), x \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

הערה 3.21 פירוש גיאומטרי של הגרדיאנט:
נניח שf דיפרנציאבילית בa. כך ש: $\nabla f(a) \neq 0$

1. כיוון הגראדיאנט: $\left(= \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}\right)$ הוא כיוון של השיפוע מקסימלי = $\|\nabla f(a)\|$ בכל כיוון אחר, השיפוע הוא ממש קטן מ $\|\nabla f(a)\|$. כיוון ש:

$$D_v f(a) = Df(a)v = \langle \nabla f(a), v\rangle \leq \|\nabla f(a)\|$$

והשיוויון קיים, אס"ם $v = \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$

2. כיוון הגרדיאנט הינו ניצב לקו הגובה העובר דרך a ז"א הזוית בין $\nabla f(a)$ ל$a_n - a$ שואפת ל $\frac{\pi}{2}$ כאשר: $M \ni a_n \to a$ (כאשר M הם הקווי גובה). זאת אומרת:

$$\frac{\langle \nabla f(a), a_n - a\rangle}{\|\nabla f(a)\| \|a_n - a\|} = \cos\alpha_n \to 0$$

אנו יודעים ש:

$$0 = f(a_n) - f(a) = \langle \nabla f(a), a_n - a\rangle + r(a_n - a)$$

כאשר $0 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{r(a_n-a)}{\|a_n-a\|}$ אז:

$$\frac{\langle \nabla f(a), a_n - a\rangle}{\|a_n - a\|} = -\frac{r(a_n - a)}{\|a_n - a\|} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

כנדרש.

הגדרה 3.22 דיפרנציאבילית ברציפות: בהינתן $f : U \to \mathbb{R}^m$ נאמר ש f דיפרנציאבילית ברציפות בU אם:

1. f דיפרנציאבילית בכל נקודה של U (סימון: $f \in C^1(U)$)
2. ההעתקה: $Df : \underbrace{U}_{\substack{\cap \\ \mathbb{R}^n}} \to \hom(n,m)$ הינה רציפה (ב $\hom(n,m)$ לוקחים נורמה $\|\cdot\|$)

טענה 3.23

פונקציה $F : U \to \hom(n,m) = \begin{pmatrix} \varphi_{1,1} & \cdots & \varphi_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{m,1} & \cdots & \varphi_{m,n} \end{pmatrix}$ הינה רציפה אס"ם כל אחת מן הפונקציות φ_1 רציפה.

הוכחה:

$$\left(\sum |\varphi_{i,j}(x) - \varphi_{i,j}(y)|^2\right)^{1/2} \geq \|F(x) - F(y)\| \geq |\varphi_{i,j}(x) - \varphi_{i,j}(y)|$$

■

מסקנה 3.24

$f \in C^1(U)$ אס"ם f דיפרנציאבילית ב U $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$ רציפה לכל i,j.

משפט 3.25

אם קיימות כל הנגזרות החלקיות של f בU והן רציפות אזי f דיפרנציאבילית בכל נקודה של U.

הערה 3.26 (הוכחה טובה לבחינה, כי היא לא טריוויאלית)

הערה 3.27

$$f\left(a_1,a_2,\ldots,a_{j-1},\beta,a_{j+1},\ldots,a_n\right)-f\left(a_1,a_2,\ldots,a_{j-1},\alpha,a_{j+1},\ldots,a_n\right)=\left(\beta-\alpha\right)\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(\gamma\right)$$

עבור $\alpha\le\gamma\le\beta$

27/11/2011

הגדרה 3.28 קבוצה קמורה: קבוצה $K\subset V$ (מרחב וקטורי) נקראת **קמורה** אם לכל $a,b\in K$

$$K\supset[a,b]=\left\{ta+(1-t)\,b|\ t\in[0,1]\right\}$$

דוגמה 3.29 $B_r\left(a\right)$ הוא קבוצה קמורה

נחזור ונוכיח את המשפט:

משפט 3.30

אם קיימות כל הנגזרות החלקיות של $f:U\to\mathbb{R}^m$ כאשר $U\subset\mathbb{R}^n$ פתוחה. והנגזרות רציפות אזי f דיפרנציאבילית בכל נקודה של U

הערה 3.31 ייתכן ש f דיפרנציאבילית אך $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ לא רציפות.

דוגמאות נגדיות: $x\sin\frac{1}{x}$

הוכחה: יהי $a\in U$. U פתוחה לכן קיימת סביבה: $B_\rho\left(a\right)\subset U$. יהי: $h\in B_\rho\left(0\right)$. בה"כ $m=1$ (זה יהיה נכון לכל m לפי טענה 3.10)

נסמן:

$$r\left(h\right)=f\left(a+h\right)-f\left(a\right)-\left\langle \nabla f,h\right\rangle$$

צריך להוכיח כי: $\lim\limits_{h\to0}\frac{|r(h)|}{\|h\|}=0$.

נסמן:

$$\begin{aligned}a&=\left(a_1,\ldots,a_n\right)\\h&=\left(h_1,\ldots,h_n\right)\\A_k&=\left(a_1+h_1,\ldots,a_k+h_k,a_{k+1},\ldots,a_n\right)\end{aligned}$$

$$f\left(a+h\right)-f\left(a\right)=f\left(A_n\right)-f\left(A_0\right)=\sum_{k=1}^{n}f\left(A_k\right)-f\left(A_{k-1}\right),\ A_n=a+h,\ A_0=a$$

לפי משפט ערך הממוצע של לגרנז', קיים $c_k\in\left[A_{k-1},A_k\right]$ כך ש: $f\left(A_k\right)-f\left(A_{k-1}\right)=\frac{\partial f}{\partial x_k}\left(c_k\right)\cdot h_k$ מתקיים.

$$r\left(h\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}\left(c_k\right)h_k-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}\left(a\right)\cdot h_k=\left\langle v,h\right\rangle$$

כאשר: $v=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(c_1\right)-\frac{\partial f}{\partial x_1}\left(a\right),\ldots\right)$. לפי קושי שוורץ:

$$\left|r\left(h\right)\right|\le\left\|v\left(h\right)\right\|\left\|h\right\|$$

צריך להוכי:

$$\lim_{h\to0}v\left(h\right)=0$$

יהי $\varepsilon>0$. יהי $\delta>0$ כך ש:

$$\left\|w-a\right\|<\delta\Rightarrow\left|\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(w\right)-\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(a\right)\right|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$$

אם $\|h\|<\delta$ אזי: $\|c_j-a\|<\delta$ לכל j לכן, כל קואורדינטה של v קטנה מ $\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$ לכן $\|v\|<\varepsilon$ ■

3.1.1 כלל השרשרת

משפט 3.32 כלל השרשרת

בהינתן $U\subset\mathbb{R}^n$, $V\subset\mathbb{R}^m$ פתוחות. ובהינתן $f:U\to V$, $f:V\to\mathbb{R}^k$ פונקציות.
אזי בהינתן $a\in U$ נסמן $b=f(a)\in V$. אם f דיפרנציאבילית ב a וg דיפרנציאבילית בb, אזי ההרכבה:
$f\circ g=\varphi$ דיפרנציאבילית ב a ומתקיים: $\varphi:U\to\mathbb{R}^k$,

$$\underbrace{D\varphi(a)}_{\in\hom(n,k)}=\underbrace{Dg(b)}_{\in\hom(m,k)}\underbrace{Df(a)}_{\in(n,m)}$$

נשים לב כי:

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}(a)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial\varphi_k}{\partial x_n}(a)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_m}(a)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial g_k}{\partial y_1}(a) & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial y_m}(a)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a)\end{pmatrix}$$

דוגמה 3.33 מקרה פרטי:

$$f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}^m$$

ו: $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$. אזי ההרכבה: $g\circ f:(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}$ אזי המטריצות האלה יצאו לנו:

$$Df(a)h=f'(a)h,\quad Dg(b)v=\langle\nabla g(b),v\rangle$$

ובכתיב מטריציוני:

$$\langle\nabla g(b),f'(a)\rangle=\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(b),\dots,\frac{\partial g}{\partial x_m}(b)\right)\begin{pmatrix}f_1'(a)\\ \vdots\\ f_m'(a)\end{pmatrix}$$

הוכחה: $r_1(x)=f(a+x)-f(a)-Df(a)x$. מדפרנציאביליות f אנו יודעים כי: $\lim\limits_{x\to0}\frac{r_1(x)}{\|x\|}=0$
באופן דומה: $r_2(x)=g(b+y)-g(b)-Dg(b)y$. מדפרנציאביליות g אנו יודעים כי: $\lim\limits_{y\to0}\frac{r_2(y)}{\|y\|}=0$
נסמן:

$$r(x)=\varphi(a+x)-\varphi(a)-Dg(b)Df(a)x$$

נרצה להוכיח כי:

$$\lim_{x\to0}\frac{|r(x)|}{\|x\|}=0$$

נשם ב כי:

$$\varphi(a+x)=g(f(a+x))=g\left(\underbrace{f(a)}_{b}+\underbrace{Df(a)x+r_1(x)}_{y}\right)=g(b)+Dg(b)y+r_2(y)=$$
$$=\underbrace{g(b)}_{\varphi(x)}+Dg(b)Df(a)x+\underbrace{Dg(b)r_1(x)+r_2(Df(a)x+r_1(x))}_{r(x)}$$

נשים לב כי:

$$\frac{Dg(b)r_1(x)}{\|x\|}\underbrace{=}_{\text{לינאריות הדיפרנציאל}}Dg(b)\frac{|r_1(x)|}{\|x\|}\to0$$

כיוון ש $Dg(b)$ גם רציפה.
נשאר להראות:

$$\lim_{x\to 0}\frac{r_2(Df(a)x+r_1(x))}{\|x\|}=0$$

נשים לב כי:

$$\frac{r_2(Df(a)x+r_1(x))}{\|Df(a)x+r_1(x)\|}\cdot\frac{\|Df(a)x+r_1(x)\|}{\|x\|}$$

נניח כי $\|Df(a)x+r_1(x)\|\neq 0$ כיוון שאם זה שווה לאפס אזי זה טריוויאלי. נשים לב כי בבירור:

$$\frac{r_2(Df(a)x+r_1(x))}{\|Df(a)x+r_1(x)\|}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}0$$

ואילו:

$$\frac{\|Df(a)x+r_1(x)\|}{\|x\|}\underset{x\to 0}{\longrightarrow}\|Df(a)\|+1$$

כלומר חסום. כיוון ש: $\|r_1(x)\|\leq\|x\|$ ואז:

$$\frac{\|Df(a)x+r_1(x)\|}{\|x\|}\leq\|Df(a)\|+1$$

ולכן:

$$\lim_{x\to 0}\frac{r_2(Df(a)x+r_1(x))}{\|x\|}=0$$

כנדרש. ■

משפט 3.34 משפט ערך הממוצע

בהינתן $[a,b]\subset U\subset\mathbb{R}^n$. $f:U\to\mathbb{R}^m$ דיפרנציאבילית אז:

1. אם $m=1$ אז קיים $c\in[a,b]$ כך ש:

$$f(b)-f(a)=\nabla f(c)\cdot(b-a)$$

2. אם $m>1$ אז קיים $c\in[a,b]$ כך ש:

$$\|f(b)-f(a)\|\leq\|Df(c)\|\,\|b-a\|$$

הוכחה: נסמן $\varphi(t)=tb+(1-t)a$

$$F(t)=f(\varphi(t))$$

$$F'(t)=Df(\varphi-t)(b-a)$$

עכשיו נבחן את המקרים:

1. $F'(t)=\nabla f(\varphi(t))\cdot(b-a)$. $F:[0,1]\to\mathbb{R}$, לכן לפי משפט לגרנז' (מאינפי 1) קיים $c\in(0,1)$ כך ש:

$$F(1)-F(0)=F'(c)$$

$$f(b)-f(a)=F(1)-F(0)=F'(c)=\nabla f(\varphi(c))(b-a)$$

2. נמשיך שיעור הבא

■

מסקנה 3.35

אם U קמור ו: $\|Df(x)\| \leq K$ לכל $x \in U$ אזי f מקיימת תנאי ליפשיץ (עבור K) בU.

מסקנה 3.36

אם $Df(x) = 0$ לכל x אזי f קבועה.

29/11/2011

הערה 3.37 $f, g : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}^n$ גזירות אזי:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle f(t), g(t) \rangle = \langle f'(t), g(t) \rangle + \langle f(t), g'(t) \rangle$$

טענה 3.38

$[a, b] \cup U \cup \mathbb{R}^m$. $f : U \to \mathbb{R}^m$ דיפרנציאבילית אזי קיים: $c \in (a, b)$ כך ש:

$$\|f(a) - f(b)\| \leq \|Df(c)\| \|a - b\|$$

הוכחה: נתבונן ב: $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ המוגדרת באופן הבא:

$$g(t) = \langle f(a) - f(b), f(ta + (1 - t) b) \rangle$$

$$g'(t) = \langle f(a) - f(b), Df(ta + (1 - t) b) \cdot (a - b) \rangle$$

לפי משפט ערך ממוצע (מע"מ), קיים $c \in (0, 1)$

$$g(1) - g(0) = g'(c)$$

$$\Rightarrow \|f(a) - f(b)\|^2 = \langle f(a) - f(b), Df(C)(a - b) \rangle \leq \|f(a) - f(b)\| \|Df(C)\| \|a - b\|$$

■

הגדרה 3.39 דיפרנציאביליות פעמיים: בהינתן $f : U \to \mathbb{R}^m$ פונקציה. היא תהא דיפרנציאבילית פעמיים אם $Df : U \to \underbrace{\hom(n, m)}_{=\mathbb{R}^{m \cdot n}}$ דיפרנציאבילית. נשים לב כי:

$$DDf \in \underbrace{\hom(n, m \cdot n)}_{=\mathbb{R}^{m \cdot n^2}}$$

הגדרה 3.40 באינדוקציה, f דיפרנציאבילית $k + 1$ פעם אם הפונקציה:

$$D^k : U \to \hom(\mathbb{R}^n, \hom(\mathbb{R}^n, \ldots \hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \ldots))$$

$$Df(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

הגדרה 3.41 נגזרת חלקית מסדר k. באינדוקציה. סדר 1 ידוע.

$$\frac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_{k+1}} \partial x_{i_k} \cdot \ldots \cdot \partial x_{i_1}} = \frac{\partial}{\partial x_{i_{k+1}}} \cdot \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdot \ldots \cdot \partial x_{i_1}}$$

דוגמה 3.42

$$\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} x^y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} x^y\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y x^{y-1}\right) = x^{y-1} + y \ln(x)\, x^{y-1}$$

נחזור להצגה המטריציונית של הדיפרנציאל, עבור $m = 1$ נקבל: $Df : U \to \mathbb{R}^m$

$$Df(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}(a)\right)$$

$$D^2 f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

זהו ההסיאן (Hessian)

הגדרה 3.43 $f \in C^k(U)$ (דיפרנציאבילית k פעמים ברציפות) אם:

$$D^k : U \to \underbrace{\hom\left(\mathbb{R}^n, \hom\left(\mathbb{R}^n, \ldots \hom\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m\right) \ldots\right)\right)}_{\hom\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{m \cdot n^{k-1}}\right)}$$

הערה 3.44 זה שקול ל: כל הנגזרות החלקיות מסדר k רציפות.

משפט 3.45

$U \subset \mathbb{R}^2$, $f : U \to \mathbb{R}$. נניח שהנגזרות המעורבות:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

קיימות ב U ורציפות ב $a \in U$ אזי:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x)$$

הערה 3.46 זה ברור עבור פולינומים:

$$\sum_{n,m \le N} a(n,m)\, x^n y^m$$

הערה 3.47 מוטיבציה: נקח x, y כך ש: $Q = [a-x, a+x] \times [b-y, b+y] \subset U$ נתבונן ב:

$$\underbrace{\Delta^2(x,y)}_{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) yx} = \underbrace{f(a+x, b+y) - f(a+x, b)}_{\approx \frac{\partial f}{\partial y}(a+x, b) y} - \underbrace{f(a, b+y) + f(a,b)}_{\approx \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) y}$$

למה 3.48
קיים $p \in Q$ כך ש

$$\Delta^2(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p)\, xy$$

הערה 3.49 נשים לב כי המשפט נובע מזה. כי אז קיים $q \in Q$ כך ש $\Delta^2(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(q) \cdot yx$
נשים לב שאם גודל המלבן ישאף לאפס אז יתקיים: $p = q$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) = \lim_{x,y \to 0} \frac{\Delta^2(x,y)}{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(p) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(q)$$

הוכחה: נקח פונקציה:

$$\varphi(t) = f(t, t+y) - f(t,b)$$

$$\Delta^2 = \varphi(a+x) - \varphi(a)$$

לפי מע"מ קיים $a < c < a + x$ כך ש:

$$\Delta^2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(c) \cdot x = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(c, b+y) - \frac{\partial f}{\partial x}(c,b)\right] x$$

ושוב, לפי מע"מ קיים $b < d < b + y$ כך ש:

$$= \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y}(c,d) \cdot y\right] x$$

■

הערה 3.50 אם $f \in C^2(u)$ אז ההסיאן של f הוא מטריצה סימטרית.

הערה 3.51 אם $f \in C^k(x)$ אזי לכל $a \in U$:

$$\frac{\partial^k f(a)}{\partial x_{i_k} \cdot \ldots \cdot \partial x_{i_1}} = \frac{\partial^k f(a)}{\partial x_{j_k} \cdot \ldots \cdot \partial x_{j_1}}$$

אם $(i_1, \ldots, i_k)$ הוא תמורה של $(j_1, \ldots, j_k)$

3.2 נוסחת טיילור

בהינתן $f : U \to \mathbb{R}$ ($U \subset \mathbb{R}^n$) כך ש $f \in C^k(U)$. $[a, a+h] \subset U$

1. $k = 2$ וn כללי.
קיים $0 < \theta < 1$ כך ש:

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{,j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\, h_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a + \theta h)\, h_i h_j$$

$h = (h_1, \ldots, h_n)$

2. $n = 2$, k כללי.

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j!} \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \frac{\partial^j f}{\partial y^{j-i} \partial x^i}(a)\, h_1^i h_2^{j-i} +$$

$$+ \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{\partial^k f}{\partial y^{k-i} \partial x^i}(a + \theta h)\, h_1^i h_2^{k-i}$$

הוכחה: נקח: $F\left(t\right)=f\left(a+th\right)$, $F:\left[0,1\right]\to\mathbb{R}$

.1

$$\begin{aligned}F'\left(t\right) & = \nabla f\left(a+th\right)\cdot h\\ F''\left(t\right) & = D\left(\nabla f\left(a+th\right)\cdot h\right)\end{aligned}$$

$$D\left(\frac{\partial f}{\partial x_{1}}\left(a+th\right),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_{n}}\left(a+th\right)\right)=\begin{pmatrix}\frac{\partial^{2}f}{\partial x_{1}\partial x_{1}} & \cdots & \frac{\partial^{2}f}{\partial x_{n}\partial x_{1}}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial^{2}f}{\partial x_{1}\partial x_{n}} & \cdots & \frac{\partial^{2}f}{\partial x_{n}\partial x_{n}}\end{pmatrix}\left(a+th\right)$$
$$=\sum\frac{\partial^{2}f}{\partial x_{j}\partial x_{i}}h_{i}h_{j}$$

■

04/12/2011

$$f\in C^{k}\left(U\right),\quad\left[a,a+h\right]\subset U\subset\mathbb{R}^{2}$$

$$f\left(a+h\right)=f\left(a\right)+\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{j!}\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\frac{\partial^{j}f\left(a\right)}{\partial y^{j-i}x^{i}}h_{1}^{i}h_{2}^{j-i}+r\left(h\right)$$

נגדיר פונקציית עזר:

$$F\left(t\right)=f\left(a+th\right)$$

טענה 3.52

$$F^{\left(j\right)}\left(t\right)=\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\frac{\partial^{j}f\left(t\right)}{\partial y^{j-i}\partial x^{i}}h_{1}^{i}h_{2}^{j-i}$$

הוכחה: באינדוקציה על j. $j=0$ ברור.
נניח שהטענה נכונה עבור j, צ"ל עבור $j+1$:
נסמן: $\varphi\left(a+th\right)=\frac{\partial^{j}f\left(t\right)}{\partial y^{j-i}\partial x^{i}}$ נקבל:

$$F^{\left(j+1\right)}\left(t\right)=\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i}\left\langle \nabla\varphi\left(a+th\right),h\right\rangle h_{1}^{i}h_{2}^{j-i}$$

נשים לב כי:

$$\left\langle \nabla\varphi\left(a+th\right),h\right\rangle =\frac{\partial^{j+1}f\left(t\right)}{\partial y^{j-i}\partial x^{i+1}}h_{1}^{i+1}h_{2}^{j-i}+\frac{\partial^{j+1}f\left(t\right)}{\partial y^{j+i-i}\partial x^{i}}h_{1}^{i}h_{2}^{j+1-i}$$

המקדם ב $F^{j+1}\left(t\right)$ של $h_{1}^{i}h_{2}^{j+1-i}$ הוא $\binom{j}{i}+\binom{j}{i-1}=\binom{j+1}{i}$ ■

במקרה של $f:\mathbb{R}^{n}\to\mathbb{R}$ נקבל:

$$\left(a,a+h\right)\subset U\subset\mathbb{R}^{n}$$

$$f\left(a+h\right)=f\left(a\right)+\left\langle \nabla f\left(a\right),h\right\rangle +\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^{2}f}{\partial x_{j}\partial x_{i}}\left(a+\theta h\right)$$

הגדרה 3.53 תבנית ריבועים: פונקציה מהצורה $f(x)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}a_{i,j}x_ix_j$ נקראת תבנית ריבועים.

הערה 3.54 $f(x)=\langle Mx,x\rangle$ כאשר $M\in\hom(n,m)$ ניתנת ע"י המטריצה: $M(a_{i,j})$

הגדרה 3.55 מוגדרת: תבנית f נקראת מוגדרת אם ל$f(x)$ סימן קבוע ב $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ (חיובי או שלילי).
והיא נקראת בלתי מוגדרת אם קיימים $x,y\in\mathbb{R}^n$ כך ש: $f(x)<0<f(y)$.
ונקראת מוגדרת למחצה אם היא אי שלישית או אי חיובית (כלומר קיימים אפסים... לדוגמה: $f(x,y)=x^2$ אזי: $f(0,y)=0$)

טענה 3.56

1. $|\langle Mx,x\rangle|\leq\|M\|\,\|x\|^2$
2. עבור $x\in\mathbb{R}^n$ העתקה: $\langle Mx,x\rangle\to M\ni\hom(n,n)$ היא רציפה (לישפיצית עם קבוע $\|x\|^2$)
3. אוסף מטריצות מוגדרות חיוביות\שלישיות פתוח ב $\hom(n,n)$
4. לכל $x,y\in\mathbb{R}^n$

$$\{M\in\hom(n,n)\mid\ \langle Mx,x\rangle<0<\langle my,y\rangle\}$$

הוא פתוח ב $\hom(n,n)$.

הוכחה:

1. מקושי שוורץ:

$$|\langle Mx,x\rangle|\leq\|Mx\|\,\|x\|\underbrace{\leq}_{\text{נורמה אופרטורית}}\|M\|\,\|x\|\,\|x\|=\|M\|\,\|x\|^2$$

2. נשים לב כי:

$$|\langle Mx,x\rangle-\langle M_1x,x\rangle|=|\langle(M-M_1)x,x\rangle|\leq\|M-M_1\|\,\|x\|^2$$

(מ1)

3. M מוגדרת חיובית אס"ם $\langle Mx,x\rangle>0$ לכל x כך ש $1=\|x\|$. כיוון $\Leftarrow$ ברור. כיוון $\Rightarrow$: עבור $y\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ כלשהו. נקח: $x=\frac{y}{\|y\|}$.

$$\langle My,y\rangle=\|y\|^2\langle Mx,x\rangle>0$$

נניח ש M מוגדרת חיובית, יהי $0<\alpha=\{\min\langle Mx,x\rangle\mid\|x\|=1\}$. אנו יודעים כי זוהי פונקציה רציפה חיובית ממש.
אם $\|M-M_1\|<\alpha$ אזי לכל x המקיים $\|x\|=1$:

$$|\langle M_1x,x\rangle-\langle Mx,x\rangle|<\alpha$$

לכן:

$$\langle Mx,x\rangle>0$$

4. נובע מ2

■

הגדרה 3.57 נקודת קיצון: בהינתן $f:U\to\mathbb{R}$, אזי $a\in U$ נקראת נקודת קיצון של f אם קיים $r>0$ כס ש: $B_r(a)$: $f(x)-f(a)$ בעל סימן קבוע.
(נקודות מקסימום, מינימום, ברור)

הערה 3.58 אם a נקודת קיצון של f וקיימת: $D_vf(a)$ אזי $D_vf(a)=0$. כי $\varphi'(0)=0$ כאשר: $\varphi(t)=f(a+tv)$ לפי משפט פרמה.

הערה 3.59 תנאי הכרחי לנקודת קיצון: אם f דיפרנציאבילית ב a ו: a נקודת קיצון אזי בהכרח: $\nabla f(a)=0$

הגדרה 3.60 נקודה סטציונרית: אם $\nabla f(a)=0$ אזי a נקראת נקודה סטציונרית של f

משפט 3.61

בהינתן $f\in C^2(U)$, וa נקודה סטציונרית של f.
1. אם ההסיאן של f בa <u>מוגדר</u>, אזי a היא נקודת קיצון. (חיובית = מינימום. שלילית = מקסימום)
2. אם ההסיאן של f בa בלתי מוגדר, אזי a איננה נקודת קיצון (לדוגמה x^2-y^2)
3. אם ההסיאן של f בa מוגדר למחצה, אין הכרעה.

הוכחה:

1. נתבונן בקירוב:

$$f(a+h)-f(a)=\underbrace{\langle\nabla f(a),h\rangle}_{=0}+\underbrace{\sum\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(a+\theta h)\cdot h_ih_j}_{>0}$$

נניח שמוגדר חיובית. קיים $\varepsilon>0$ כך שאם $\|x-a\|<\varepsilon$ ההסיאן ב x גם מוגדר חיובית. ולכן אם $\|h\|<\varepsilon$ אזי: $\|a+\theta h-a\|<\varepsilon \Leftarrow$ ההסיאן ב $a+\theta h$ מוגדר חיובית$\Leftarrow f(a+h)>f(a)$

2. קיימים $x,y\in\mathbb{R}^n$ כך ש:

$$H_x(h)=\sum\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(x)\,h_1h_j$$

$$H(a)\,y>0>H(a)\,(x)$$

מהרציפות קיים $\varepsilon>0$ כך שאם $\|h\|<\varepsilon$ ($\Leftarrow\|a-a+\theta h\|<\varepsilon$) אזי:

$$H(a+\theta h)\,y>0>H(a+\theta h)\,(x)$$

נקח $h=tx$ כך ש t מספיק קטן כדי לקיים : $\|h\|<\varepsilon$ כלומר: $|t|\,\|x\|<\varepsilon$

$$f(a+h)-f(a)=H(a+\theta tx)\,(tx)$$

$0>t^2H(a+\theta tx)\,(x)$ לכן $0>f(a+h)-f(a)$

■

משפט 3.62 פונקציה הופכית

$f\in C^1((\alpha,\beta))$, $f'(a)\neq 0$ ונסמן $b=f(a)$, אזי קיים $\delta>0$ ו: $\varepsilon>0$ כך שלכל $y\in(b-\varepsilon,b+\varepsilon)$ קיים: $x\in(a-\delta,a+\delta)$ כך ש: $f(x)=y$ או:

$$f^{-1}:(b-\varepsilon,b+\varepsilon)$$

מוגדרת היטב. בנוסף $f^{-1}\in C^1$

הוכחה: בה"כ נניח ש $f'(a)>0$, f' רציפה. לכן קיים $\delta>0$ כך ש $f'(x)>0$ עבור $x\in(a-\delta,a+\delta)\Leftarrow f$ מונוטונית עולה ב $(a-\delta,a+\delta)$. נקח ε כך ש:

$$(b-\varepsilon,b+\varepsilon)\subset f((a-\delta,a+\delta))$$

ברור ש f חח"ע מ $(a-\delta,a+\delta)$ ל: $(b-\varepsilon,b+\varepsilon)$ ■

06/12/2011

הגדרה 3.63

$$GL(n)=\{T\in\hom(n,n):\ T \text{ הפיכה}\}$$

כלומר $\det T\neq 0$.

1. $\det:\hom(n,n)\to\mathbb{R}$ היא פונקציה רציפה ($GL(n)=\det^{-1}(\mathbb{R}\backslash\{0\})$ פתוחה ב $\hom(n,n)$)
2. $T\to T^{-1}$ היא העתקה רציפה מ $GL(n)$ לעצמו. (לכן הומאומורפיזם). פורמלית נגדיר: $\Phi(T)=T^{-1}$. $\Phi:GL(n)\to\hom(n,n)$ רציפה

$$\|T\|<1\Leftarrow(I-T)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}T^n$$

טענה 3.64

$T\in GL(n)$ אזי $\left\|T^{-1}\right\|\geq\|T\|^{-1}$

הוכחה: במקרה ש: $T=\begin{pmatrix}\lambda_1&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\cdots&\lambda_n\end{pmatrix}$ אז $\|T\|=\max|\lambda_j|^{-1}$ ומתקיים: $\left\|T^{-1}\right\|=(\min|\lambda_i|)^{-1}=\max|\lambda_i|^{-1}$ כלומר במטריצה אלכסונית קיים שיוויום אם ורק אם כל ה λ_i זהים.

במקרה הכללי ראינו כי: $\|ST\|\leq\|S\|\,\|T\|$ ולכן: $1=\left\|T^{-1}T\right\|\leq\left\|T^{-1}\right\|\,\|T\|$ ■

טענה 3.65

$$\left\|T^{-1}\right\|\overset{(\star)}{=}\sup_{x\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}}\left\{\frac{\|x\|}{\|Tx\|}\right\}=\sup\left\{\|Tx\|^{-1}\mid\|x\|=1\right\}=\left(\inf\{\|Tx\|\mid\|x\|=1\}\right)^{-1}$$

הוכחה: נסביר את המעבר המסומן ב-$(\star)$ - $\left\|T^{-1}\right\|=\sup\left\{\frac{\|T^{-1}y\|}{\|y\|}|y\neq0\right\}$, ואם נגדיר $y=Tx$ נקבל את הביטוי לעיל. ■

טענה 3.66

$$\left\|T^{-1}\right\|^{-1}\leq\|Tx\|\leq\|T\|\,\|x\|$$

הוכחה: את החסם העליון ראינו מהגדרת הנורמה האופרטיבית. והשני מתקיים כי:

$$\left\|\left(T^{-1}T\right)x\right\|=\|x\|\leq\left\|T^{-1}\right\|\,\|Tx\|$$

■

כלל השרשרת עבור f ו: $T\in\hom(n,n)$

$$D(f\cdot T)x=D_f(Tx)T$$

$$D(T\cdot f)x=T\cdot D_f(X)$$

3.3 הפונקציה ההפוכה

משפט 3.67 פונקציה הפוכה

$W \subset \mathbb{R}^n$ פתוחה, $f : W \to \mathbb{R}^n$ (אותו n) דפרנציאבילית ברציפות.

$$a \in W, D_f(a) \in GL(n) \left(\iff \mathcal{J}_f(a) \neq 0 \right)$$

אזי קיימות קבוצות פתוחות $a \in U \subset W$, $b = f(a) \in V \subset \mathbb{R}^n$ כך ש:

1. $f : U \to V$ היא ביקציה (חח"ע ועל)
2. $f^{-1} : V \to U$ דיפרנציאבילית ומתקיים: $D_{f^{-1}}(y) = \left[D_f\left(f^{-1}(y)\right)\right]^{-1}$
3. +ברציפות (כלומר דיפרנציאבילית ברציפות)

הערה 3.68 אם f דפרנציאבלית בa מסמנים: $\mathcal{J}_f(a) = \det D_f(a)$ (יעקוביאן). אבל לא נתעסק עם זה.

הוכחה: 3 נובע מ 1+2 (כי אנחנו יודעים כי 3=1+2 ☺)

$$\begin{array}{ccccc} & V & \overset{D_{f^{-1}}}{\rightarrow} & \hom(n,n) & \\ f^{-1} & \downarrow & & \uparrow & \Phi \\ & U & \overset{D_f}{\rightarrow} & \hom(n,n) & \end{array}$$

יהי $y \in \mathbb{R}^n$, נגדיר:

$$F(x) = x - T(f(x) - y)$$

אנו יודעים כי אם $\|D_F(x)\| \leq \frac{1}{2}$ לכל x אזי העתקה מכווצת. נשים לב כי:

$$D_F(x) = I - T \circ D_f(x)$$

כלומר כדי לקבל $D_F(a) = 0$ נציב $T = [D_f(a)]^{-1}$ כלומר:

$$\begin{aligned} F(x) &= x - [D_f(a)]^{-1}(f(x) - y) \\ D_F(x) &= I - [D_f(a)]^{-1} \circ D_f(x) \end{aligned}$$

הערה 3.69 בהתחלה הגדרנו את δ באופן הבא:
נשים לב כי $D_f(a) = 0$ גורר כי קיים $\delta > 0$ כך ש: $\|D_F(x)\| \leq \frac{1}{2}$ עבור כל $x \in B_\delta(a)$.

$$D_F(x) = [D_f(a)]^{-1}(D_f(a) - D_f(x))$$

אם $\delta = \|D_f(a)\|^{-1}$ אזי:

$$\|D_F(x)\| \leq \left\|[D_f(a)]^{-1}\right\| \|D_f(a) - D_f(x)\| \overset{?}{\leq} \frac{1}{2}$$

האי שיוויון האחרון יקרה אם:

$$\|D_f(a) - D_f(x)\| \leq \frac{1}{2}\left\|[D_f(a)]^{-1}\right\|^{-1}$$

נקח $\delta > 0$ כך ש $x \in B_\delta(a)$ אזי:

$$\frac{1}{2}\left\|[D_f(a)]^{-1}\right\|^{-1} \geq \|D_f(a) - D_f(x)\|$$

נקח $X=\overline{B}_{\delta}(a)$, אנו יודעים ש $F:X\to\mathbb{R}^n$ מכווצת. נרצה ש $F(X)\subset X$, דהיינו: $\|x-a\|<\delta$ אזי $\|F(x)-a\|<\delta$

$$\|F(x)-a\|\leq\underbrace{\|F(x)-F(a)\|}_{\leq\frac{1}{2}\|x-a\|\leq\frac{\delta}{2}}+\underbrace{\|F(a)-a\|}_{\leq\frac{\delta}{2}}$$

אך מהיות F_y מכווצת נקבל $\|F_y(x)-F_y(a)\|\leq\frac{1}{2}\|x-a\|\leq\frac{\delta}{2}$, וכן $F_y(a)-a=-D_f(a)^{-1}(b-y)$, ונרצה שגם זה יהיה קטן מ-$\frac{\delta}{2}$.

$$\|F_y(a)-a\|\leq\left\|Df(a)^{-1}\right\|\|b-y\|$$

ולכן נסמן $\frac{\delta}{2}\cdot\left\|D_f(a)^{-1}\right\|^{-1}=\varepsilon$. אם $y\in B_{\varepsilon}(b)$ נקבל $\|F_y(a)-a\|<\frac{\delta}{2}$ ולכן $\|F_y(x)-a\|<\delta\Longrightarrow$ $F_y(X)\subset X$.

בינתיים, עבור $X=\overline{B}_{\delta}(a)\,,\,y\in B_{\varepsilon}(b)$, ההעתקה F_y מעתיקה את X לתוך X והיא מכווצת. לפי משפט ההעתקה המכווצת, קיים $x\in X$ יחיד כך ש-$f(x)=y$.

ברור ש-$x\in B_{\delta}(a)$ כי $F_y(X)\subset B_{\delta}(a)$ - יש אי שוויון חזק. לכן נקודת שבת של F_y (שהיא x) גם ב-$B_{\delta}(a)$.

נקח $U=f^{-1}(V)\cap B_{\delta}(a)\,,B_{\varepsilon}(b)$

נוכיח את סעיף 2.

ראית נוכיח את הלמה הבאה:

למה 3.70

$f^{-1}:V\to U$ מקיימת תנאי ליפשיץ

הוכחה: $u,v\in V$, $u\in f(x)$, $v\in f(y)$, צריך למצוא K כך ש: $\|x-y\|\leq K\|u-v\|$.

הגדרה של $r\leftarrow$ $f(z)=f(a)+D_f(a)(z-a)+r(z)$

$$u-v=f(x)-f(y)=D_f(a)(x-y)+r(x)-r(y)$$

$$\|u-v\|\geq\|D_f(a)(x-y)\|-\|r(x)-r(y)\|\geq\left\|[D_f(a)]^{-1}\right\|^{-1}\|x-y\|-\|r(x)-r(y)\|$$

נשים לב כי:

$$\|r(x)-r(y)\|\leq\|D_r(c)\|\,\|x-y\|$$

כלומר נקבל:

$$D_r(c)=D_f(c)-D_f(a)$$

$$\|D_r(c)\|\leq\left\|[D_f(a)]^{-1}\right\|^{-1}$$

■

11/12/2011

נרצה להראות ש $f^{-1}:V\to U$ דיפרנציאבילית ומתקיים: $D_{f^{-1}}(y)=\left[D_f\left(f^{-1}(y)\right)\right]^{-1}$.

$$x=f^{-1}(y)\,,\;y+k\in V,\;y\in V$$

$$f^{-1}(y+k)-x=h(k)=f^{-1}(y+k)-f^{-1}(y)$$

$$f^{-1}(y+k)-f^{-1}(y)-D_f(x)^{-1}k\underbrace{=}_{\text{דיפרנציאביליות } f}r(k)$$

כלומר, צריך להוכיח: $\lim\limits_{k\to 0}\frac{r(k)}{\|k\|}=0$.

ידוע שאם: $f(x+h)-f(x)=D_f(x)h+\rho(h)$ אזי: $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\rho(h)}{\|h\|}=0$.

$$k=f(x+h(k))-f(x)=D_f(x)h(k)+\rho(h(k))$$

$$r(k)=h(k)-D_f(x)^{-1}k=-D_f(x)^{-1}(\rho(h(k)))$$

$$\frac{r(k)}{\|k\|}=-D_f(x)^{-1}\frac{\rho(h(k))}{\|k\|}\overset{?}{\underset{k\to 0}{\longrightarrow}}0\iff\frac{\rho(h(k))}{\|k\|}\overset{?}{\underset{k\to 0}{\longrightarrow}}0$$

נשים לב כי:

$$\frac{\rho(h(k))}{\|k\|}=\frac{\rho(h(k))}{\|h(k)\|}\cdot\frac{\|h(k)\|}{\|k\|}$$

אבל מליפשציות f^{-1} (עם קבוע C) נקבל: $\|h(k)\|=\left\|f^{-1}(y+k)-f^{-1}(y)\right\|\le C\|k\|$ לכן:

$$\frac{\rho(h(k))}{\|h(k)\|}\underset{k\to 0}{\longrightarrow}0,\quad\frac{\|h(k)\|}{\|k\|}\le C$$

■

הגדרה 3.71 העתקה פתוחה: X,Y מרחב מטרי, העתקה: $f:X\to Y$ נקראת **העתקה פתוחה** אם $f(U)$ פתוחה בY לכל קבוצה פתוחה U בX.

הערה 3.72 בתוך U מספיק לקחת כדורים $B_\delta(x)$

דוגמה 3.73 דוגמה נגדית: $f(x)=x^2$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. אם נקח קטע פתוח $(-a,a)$ נקבל: $\left[0,a^2\right)$ וזו לא קבוצה פתוחה ב $\mathbb{R}$.

אבל f כנ"ל פתוחה כפונקציה ב $\mathbb{R}$ל$[0,\infty)$

דוגמה 3.74 אם f מונוטונית ממש ורציפה, אזי f פתוחה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

דוגמה 3.75 $f:X\to Y$ ביקצייה היא פתוחה אס"ם $f^{-1}:Y\to X$ רציפה.

דוגמה 3.76 $T\in\hom(n,m)$ פתוחה אס"ם $T(\mathbb{R}^n)=\mathbb{R}^m$. (ברור שזה הכרחי)

נניח ש $T(\mathbb{R}^n)=\mathbb{R}^m$. קיימים $x_1,\ldots,x_m\in\mathbb{R}^n$ כך ש:

$$\mathbb{R}^m=\operatorname{span}(Tx_1,\ldots,Tx_m)$$

נסמן: $H=\operatorname{span}(x_1,\ldots,x_m)$. וכמו כן: $0<\alpha=\min\{\|Tx\|:\ x\in H,\|x\|=1\}$ לכן:

$$T(B_1(0))\supset B_\alpha(0)$$

ולכן:

$$T\left(\underbrace{B_\varepsilon(0)}_{\subset\mathbb{R}^n}\right)\supset B_{\varepsilon\alpha}(0)\subset\mathbb{R}^m$$

$$TB_\varepsilon(x)=Tx+TB_\varepsilon(0)\supset Tx+B_{\varepsilon\alpha}(0)$$

$$x+y,\quad y\in B_\varepsilon(0)$$

$$Tx+TB_\varepsilon(0)$$

משפט 3.77 משפט ההעתקה הפתוחה

בהינתן $\underbrace{U}_{\subset\mathbb{R}^n} \to \mathbb{R}^m$: f דיפרנציאבילית. אם $\operatorname{rank}(D_f(a)) = m$ (בפרט $n \geq m$) לכל $a \in U$ אזי f פתוחה.

הערה 3.78 מה המשמעות?

$$\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix} = m$$

אס"ם קיימים $i_1,\ldots,i_m$ כך שהמינור:

$$\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_{i_1},\ldots,x_{i_m})}(a) \in GL(m)$$

הוכחה: $a \in U$. נניח בה"כ כי: $\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_m)}(a) \in GL(m)$. נגדיר $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ כך שאנו מוסיפים איברים מתוך הוקטור הנבחר בקואורדינטות הנוספות, כלומר:

$$T(x_1,\ldots,x_m) = (x_1,\ldots,x_m,a_{m+1},\ldots,a_n)$$

נרצה להוכיח כי לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש $f(B_\varepsilon(a)) \subset B_\delta(f(a))$.

נגדיר פונקציה חדשה: $g = f \circ T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$

נשים לב כי:$f(a) = g\underbrace{(a_1,\ldots,a_m)}_{a'}$. וכמו כן כי:

$$D_g(a') = \underbrace{D_f(a)\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 1 \\ & 0 & & \end{pmatrix}}_{\frac{\partial(f_1,\ldots,f_m)}{\partial(x_1,\ldots,x_m)}} \in GL(m)$$

לפי משפט הפונקציה ההפוכה, לכל $\varepsilon > 0$ קיים $a' \in U' \subset B_\varepsilon(a')$ כך ש: $g(a') \in V = g(U')$ פתוחה.

$$f(T(U')) = V \subset f(B_\varepsilon(a))$$

■

3.4 כופלי לגרנז'

הגדרה 3.79 $U \in \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$. $g_1,\ldots,h_k : U \to \mathbb{R}$. אומרים ש $a \in U$ היא נקודת מקסימום של f תחת האילוצים $g_1 = 0,\ldots,g_k = 0$ אם:

1.

$$(0,\ldots,0) = g(a) \overset{\text{סימון}}{=} (g_1(a),\ldots,g_k(a))$$

2. קיים $\varepsilon > 0$ כך שאם $x \in B_\varepsilon(a)$, $g(x) = 0$ אזי: $f(x) < f(a)$

דוגמה 3.80 (אילוץ 1)

$$M = \{(x,y,z) : g(x,y,z) = 0\}$$

נרצה למצוא את הנקודה הכי קרובה ל0. נחפש a כך ש:

1. $g(a)=0$, זאת אומרת: $a\in M$.
2. $\left(x^2+y^2+z^2\right)$ $f(w)$ מקבלת בa מינימום תחת האילוץ $g(w)=0$.

דוגמה 3.81

$$T=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 0\\ 3 & -2\end{pmatrix}\in\hom(2,3)\,,\ \|T\|$$

צריך לחשב מקסימום של $\|Tw\|$ תחת האילוץ $\|w\|=1$

$$f(x,y)=\left((-x+y)^2+(2x)^2+(3x-2y)^2\right)^{1/2}$$

האילוץ: $g(x,y)=x^2+y^2-1$.

משפט 3.82 כופלי לגרנז'

נניח ש $f:U\to\mathbb{R}$, $g:U\to\mathbb{R}^k$ דיפרנציאביליות ברציפות כאשר $U\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה. אם $a\in U$ היא נקודת קיצון של f תחת האילוץ $g=0$ אזי $k\geq\operatorname{rank}\left(\frac{\partial(f,g_1,\ldots,g_k)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(a)\right)$.

הערה 3.83

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_k}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

אם $\nabla g_1(a),\ldots,\nabla g_k(a)$הם בלתי תלויים לינארית אזי התנאי גורר שקיימים $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ כך ש:

$$\nabla f(a)=\lambda_1\nabla g_1(a)+\ldots+\lambda_k\nabla g_k(a)$$

13/12/2011

הוכחה: בשלילה, נניח ש:

$$\operatorname{rank}\left(\frac{\partial(f,g_1,\ldots,g_k)}{\partial(x_1,\ldots,x_n)}(a)\right)=k+1$$

(יותר לא ייתכן, כי זה מספר השורות במטריצה).
נגדיר פונקציית עזר:

$$F=(f,g_1,\ldots,g_k)$$

כאשר: $F:U\to\mathbb{R}^{k+1}$. התנאי על הדרגה אומר כי:

$$k+1=\operatorname{rank}(D_F(a))$$

(זו המשמעות שלו).
בגלל הרציפות קיים V פתוח כך ש כך ש $\operatorname{rank}(D_F(x))=k+1$ לכל $x\in V$. זאת אומרת, F מקיימת תנאי של משפט העתקה פתוחה. ולכן F היא פתוחה.
לכן, לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש:

$$(f(a)\pm\delta,0,\ldots,0)\in\overline{B_\delta}\underbrace{((f(a),0,\ldots,0))}_{F(a)}\subset F(B_\varepsilon(a))$$

לכן לא נקודת קיצון. כנ"ל ■

במקרה בו $k=1$, a נקודת קיצון כנ"ל $\Leftarrow$ $\nabla f(a)$ ו: $\nabla g(a)$ פרופורציוניים. כלומר, קיימות שתי אפשרויות:

- $\nabla g\left(a\right)=0$
- $\nabla g\left(a\right)\neq0$ $\Leftarrow$ אז קיים λ (כופל לגרנז') כך ש $\nabla f\left(a\right)=\lambda\nabla g\left(a\right)$

דוגמה 3.84 אי שיוויון אריתמטי־גיאומטרי. $x_{1},\ldots,x_{n}\geq0$.

$$\frac{1}{n}\left(x_{1}+\ldots+x_{n}\right)\geq\left(x_{1}\cdot\ldots\cdot x_{n}\right)^{1/n}$$

הוכחה: בגלל ההומוגניות מספיק: $x_{1}+\ldots+x_{n}=1$, $x_{1},\ldots,x_{n}\geq0\Leftarrow\frac{1}{n}<\left(x_{1}\cdot\ldots\cdot x_{n}\right)^{1/n}\Leftarrow>x_{1}\cdot\ldots\cdot x_{n}$ $\frac{1}{n^{n}}$.

זאת אומרת, ערך מקסימלי של הפונקציה $f\left(x\right)=x_{1}\cdot\ldots\cdot x_{n}$ תחת האילוץ $x_{1}+\ldots+x_{n}=1$ הינו: $\geq\frac{1}{n^{n}}$.
הקבוצה:

$$\left\{ x\in\mathbb{R}^{n}:x_{1}+\ldots+x_{n}=1,\ x_{i}\geq0\right\}$$

היא קומפקטית. לכן לf יש כאן מקסימום. תהי a נקודה שבה f מקבל מקסימום ברור ש:

$$a\in\left\{ x:x_{j}>0\right\} =U$$

לכן a היא נקודת קציון ש $f:U\to\mathbb{R}$ תחת האילוץ $g=0$. נשים לב כי:

$$\nabla f\left(x\right)=x_{1}\cdot\ldots\cdot x_{n}\begin{pmatrix}\frac{1}{x_{1}}\\
\vdots\\
\frac{1}{x_{n}}
\end{pmatrix},\quad\nabla g\left(x\right)=\begin{pmatrix}1\\
\vdots\\
1
\end{pmatrix}$$

לפי המשפט, קיים $\lambda\in\mathbb{R}$ כך ש:

$$x_{1}\cdot\ldots\cdot x_{n}\begin{pmatrix}\frac{1}{x_{1}}\\
\vdots\\
\frac{1}{x_{n}}
\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda\\
\vdots\\
\lambda
\end{pmatrix},\quad x_{1}+\ldots+x_{n}=1$$

כלומר, $n+1$ משוואות עם $n+1$ נעלמים.
נקבל:

$$x_{1}=x_{2}=\ldots=x_{n}\Rightarrow x=\begin{pmatrix}\frac{1}{n}\\
\vdots\\
\frac{1}{n}
\end{pmatrix}$$

הערך המקסימלי הוא:

$$f\left(\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^{n}}$$

■

אם $\nabla g_{1}\left(a\right),\ldots,\nabla g_{k}\left(a\right)$ בלתי תלויים לינארית אזי קיימים $\lambda_{1},\ldots,\lambda_{k}$ כך ש:

$$\nabla f\left(a\right)=\sum_{j=1}^{k}\lambda_{j}\nabla g_{j}\left(a\right)$$

כלומר:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_{1}} & =\lambda_{1}\frac{\partial g_{1}}{\partial x_{1}}\left(a\right)+\ldots+\lambda_{k}\frac{\partial g_{k}}{\partial x_{1}}\left(a\right)\\
 & \vdots\\
\frac{\partial f}{\partial x_{n}} & =\lambda_{1}\frac{\partial g_{1}}{\partial x_{n}}\left(a\right)+\ldots+\lambda_{k}\frac{\partial g_{k}}{\partial x_{n}}\left(a\right)
\end{aligned}$$

כלומר, נכון לעכשיו יש לנו n משוואות עם $n+1$ נעלמים. כלומר אינסוף פתרונות. אנו מחפשים עוד משוואה, והיא כמובן האילוץ:

$$g_{1}\left(a\right)=0,\ldots,g_{k}\left(a\right)=0$$

3.5 משפט הפונקצייה הסתומה

משפט 3.85 הפונקצייה הסתומה - חד ממדי

$f:[\alpha,\beta]\times[\gamma,\delta]\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית ברציפות, $f(a,b)=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\neq 0$ אזי קיימים $\delta>0,\varepsilon>0$ ופונקצייה $g:(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\to(b-\delta,b+\delta)$ יחידה כך כך ש: $f(x,g(x))=0$.
כלומר:

$$M=\{(x,y):\ f(x,y)=0\}\cap(a-\varepsilon,a+\varepsilon)\times(b-\delta,b+\delta)$$

אז:

$$M=\Gamma(g)$$

הוכחה: בה"כ $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)>0$ מכך שf דיפרנציאבילית ברציפות, קיים ε_1 כך ש $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)>0$ לכל $a-\varepsilon_1<x<a+\varepsilon_1$, $b-\varepsilon_1<y<b+\varepsilon_1$.
לכל $a-\varepsilon_1<x<a+\varepsilon_1$ נסמן: $\varphi_x(y)=f(x,y)$. הפונקציה הנ"ל עולה בקטע $(b-\varepsilon_1,b+\varepsilon_1)$ כי: $\varphi_x'(y)=\frac{\partial f}{\partial y}(y)$. בפרט:

$$\varphi_a(b+\varepsilon_1)>0>\varphi_a(b-\varepsilon_1)$$

בגלל הרציפות קיים $\varepsilon>0$ כך שלכל $x\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$

$$\varphi_x(b-\varepsilon_1)>0>\varphi_x(b-\varepsilon_1)$$

ממשפט ערך הביניים, לכל $x\in(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ קיים y יחיד (מהמונוטוניות) ב $(b-\varepsilon_1,b+\varepsilon_1)$ כך ש $f(x,y)=\varphi_x(y)=0$.
נסמן $\varepsilon_1=\delta$ ומגדירים $y=g(x)$ וקיבלנו את הנדרש. ■

הערה 3.86 נסמן נקודות ב $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ באופן הבא: $(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n)$
כמו כן, נסמן:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\in\hom(m,n)\,,\quad \frac{\partial f}{\partial y}\in\hom(n,n)$$

כלומר:

$$D_f=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}$$

משפט 3.87 הפונקצייה הסתומה - רב ממדי

בהינתן $A\in\mathbb{R}^m$, $B\in\mathbb{R}^n$ פתוחות. יהיו $a\in A$, $b\in B$. ותהי $f=(f_1,\ldots,f_n):A\times B\to\mathbb{R}^n$ דיפרנציאבילית ברציפות כך ש $f(a,b)=0$ וכמו כן: $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\in GL(n)$ אז קיימים $\varepsilon>0$ ו $\delta>0$ ופונקציה $g:B_\varepsilon(a)\to B_\delta(b)$ יחידה כך ש: $f(x,g(x))=0$. g דיפרנציאבילית ברציפות וקיימת נוסחה.

18/12/2011

פעם קודמת השתמשנו בניסוח שונה, הפעם הניסוח הוא:

משפט 3.88 הפונקצייה הסתומה - רב ממדי

בהינתן $A\in\mathbb{R}^m$, $B\in\mathbb{R}^n$ פתוחות. יהיו $a\in A$, $b\in B$. ותהי $f=(f_1,\ldots,f_n):A\times B\to\mathbb{R}^n$ (נשים לב כי $A\times B\subset\mathbb{R}^{m+n}$, והאיבר שם הוא מסגנון: $(x_1,\ldots,x_m,y_1,\ldots,y_n)$) דיפרנציאבילית ברציפות כך ש $f(a,b)=0$ וכמו כן: $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\in GL(n)$ אז קיימים $U\subset A$, $V\subset B$ פתוחות ופונקציה (יחידה) $g:U\to V$ כך ש:

$$\forall x\in U\qquad f(x,g(x))=0$$

הוכחה: נסמן:

$$M=\{(x,y):\ f(x,y)=0\}$$

נגדיר פונקציית עזר $F:A\times B\to\mathbb{R}^{n+m}$ באופן הבא:

$$F(x,y)=(x,f(x,y))$$

הערה 3.89 $(x,y)\in M$ אס"ם $PF(x,y)=0$ כאשר $P:\mathbb{R}^{n+m}\to\mathbb{R}^{n}$ היא הטלה: $P(x,y)=y$.

נשים לב כי:

$$D_F(x,y)=\begin{pmatrix} m\begin{cases}\overbrace{\begin{matrix}1&\dots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\dots&1\end{matrix}}^{m}\end{cases} & \overbrace{0}^{n}\\ n\left\{\frac{\partial f}{\partial x}\right. & \frac{\partial f}{\partial y}\end{pmatrix}$$

ברור כי: $D_F(a,b)\in GL(m+n)$ (מההנחה כי: $\frac{\partial f}{\partial y}\in GL(m+n)$).

לפי משפט הפונקציה ההפוכה, קיימות קבוצות פתוחות $U_1\subset A\times B$ עם $c\in U_1$ ו: $V_1\subset\mathbb{R}^{m+n}$ עם $d\in V_1$ כך ש: $F:U_1\to V_1$ חח"ע ועל.

נגדיר:

$$g=PF^{-1}(x,0)$$

ונגדיר $\underbrace{V}_{\substack{\cap\\ B}},\underbrace{U}_{\substack{\cap\\ A}}$ כך ש $U\times V\subset U$, $\{(x,0):\ x\in U\}\subset V_1$. נשים לב כי:

$$(x,g(x))\in U\times V\subset U_1$$

ובU_1 יש נקודה אחת בלבד כך ש $f(x,y)=0$ ($\iff (x,y)\in M\iff P(F(x,y))=0$)

לכל $x\in U$, g דיפרנציאבילית ברציפות. $f(x,g(x))\equiv 0$. זאת אומרת, $f\cdot h(x)=0$ כאשר: $h(x)=(x,g(x))$. אנו יודעים כי: $D_{f\circ h}(x)=0$. מכלל השרשרת:

$$D_{f\circ h}(x)=D_f(h(x))\cdot D_h(x)$$

$$D_h=\begin{pmatrix} m\begin{cases}\overbrace{\begin{matrix}1&\dots&0\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ 0&\dots&1\end{matrix}}^{m}\end{cases}\\ D_g\end{pmatrix}\qquad D_f=n\left\{\left(\overbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}^{m}\ \middle|\ \overbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}^{n}\ \middle|\right)\right.$$

$$0=\frac{\partial f}{\partial x}(h(x))+\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}}_{\in GL(n)}(h(x))\,D_g(x)$$

$$D_g(x)=-\left(\frac{\partial g}{\partial y}(h(x))\right)^{-1}\frac{\partial f}{\partial x}(h(x))$$

■

דוגמה 3.90 בהינתן פונקציות גזירות ברציפות:

$$\begin{aligned}\varphi(x,y,z,u,v) &= 0\\ \psi(x,y,z,u,v) &= 0\end{aligned}$$

ובהינתן נקודה: $p=(p_!,\ldots,p_5)$ כך ש: $\varphi(p)=0$ וגם: $\psi(p)=0$

$$\frac{\partial(\varphi,\psi)}{\partial(u,v)}\in GL(2)\Rightarrow\begin{cases}u=u(x,y,z)\\ v=v(x,y,z)\end{cases}$$

בסביבת p.

$$g(x,y,z)=(u(x,y,z),v(x,y,z))$$

אז:

$$D_g(p_1,p_2,p_3)=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z}\end{pmatrix}(p_1,p_2,p_3)=-\underbrace{\begin{pmatrix}\frac{\partial\psi}{\partial u} & \frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v}\end{pmatrix}^{-1}}_{\frac{1}{\frac{\partial\varphi}{\partial u}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}-\frac{\partial\psi}{\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial u}}\begin{pmatrix}\frac{\partial\varphi}{\partial u} & -\frac{\partial\varphi}{\partial v}\\ -\frac{\partial\varphi}{\partial u} & \frac{\partial\psi}{\partial v}\end{pmatrix}}\cdot\begin{pmatrix}\frac{\partial\psi}{\partial x} & \frac{\partial\psi}{\partial y} & \frac{\partial\psi}{\partial z}\\ \frac{\partial\varphi}{\partial x} & \frac{\partial\varphi}{\partial y} & \frac{\partial\varphi}{\partial z}\end{pmatrix}$$

הגדרה 3.91 יריעה: קבוצה $M\subset\mathbb{R}^n$ נקראת יריעה (manifold) k-מימדית אם לכל $p\in M$ קיימת קבוצה פתוחה $p\in V\in\mathbb{R}^n$ כך שהקבוצה $V\cap M$ הומאומורפית לקבוצה פתוחה ב $\mathbb{R}^k$.

דוגמה 3.92 למשל כל מסילה סגורה פשוטה היא יריעה חד מימדית.
כי תהי: $f\,[a,b]\to\mathbb{R}^n$ העתקה רציפה כך ש: $f(a)=f(b)$ ו: $f(x)\neq f(y)$ לכל $x,y\in[a,b)$ $x\neq y$.

הערה 3.93 לדוגמה:

$$f(x)=(\cos x,\sin x)$$

$$0\le x\le 2\pi$$

אם $x\neq a,b$ אזי: $f[x-\varepsilon,x+\varepsilon]\to\underbrace{M}_{f([a,b])}$ עבור ε מספיק קטן היא הומאומורפיזם לכן גם: $f:(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\to M$ היא הומאומורפיזם על $f(x)\in f((x-\varepsilon,x+\varepsilon))$.

הגדרה 3.94 הגדרה שקולה ליריעה:
לכל $p\in M$ קיים $\varepsilon>0$ כך שהקבוצה: $B_\varepsilon(p)\cap M$ הומאומורפית ל $B_1(0)$ ב $\mathbb{R}^k$.

הוכחה: השקילות (הגדרה ישנה $\Leftarrow$ הגדרה חדשה):
תהי $f:U\to V\cap M$ הומאו ($M\supset\mathbb{R}^k$ פתוחה).
יהי $f^{-1}(p)=a\in U$. קיים $\delta>0$ כך ש $B_\delta(a)\in U$, לכן $f(B_\delta(a))$ הומאומורפית ל: $B_\delta(a)$ שזה הומאומורפיזם ל$B_1(0)$ (הומאו $\mathbb{R}^k$). ■

20/12/2011

דוגמה 3.95 עבור $n=k$ יריעה היא אותו דבר כמו קבוצה פתוחה ב$\mathbb{R}^n$.

דוגמה 3.96 $U\in\mathbb{R}^k$ פתוחה, $\varphi:U\to\mathbb{R}^{n-k}$ רציפה, $\Gamma(\varphi)=\left\{\underbrace{(x,\varphi(x))}_{\substack{\cap\\ \mathbb{R}^n}}:x\in U\right\}$ הנה יריעה.

כיוון שנגדיר $f(x)=(x,\varphi(x))$, ברור ש f רציפה וחח"ע וכל. וכמו כן, ההופכית היא $P(x,y)=x$

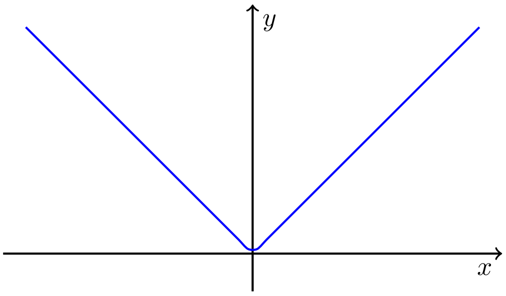
הערה 3.97 אם φ דיפרנציאבילית ב a אס"ם f דיפרנציאבילית ב a.

$$D_f\left(a\right)=\begin{pmatrix}1 & \dots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \dots & 1\\ & D_\varphi\left(a\right) & \end{pmatrix}$$

f כנ"ל נקראת פרמטריזציה של M סביב p אם $p\in f\left(U\right)$.

הגדרה 3.98 רגולרית: נאמר ש f רגולרים את f בa אם f דיפרנציאבילית ב a ו $\text{rank}\left(D_f\left(a\right)\right)=k$.
כמו כן, אומרים שM רגולרים אם לכל $p\in M$ יש פרמטריזציה אשר רגולרית סביב p.

דוגמה 3.99 $k=1$, נתבונן במסילה. וקטע פתוח. f מעבירה מהקטע הפתוח לנקודה p. אם $f'\left(a\right)\neq0$ אזי a היא רגולרית.
לדוגמה נתבונן במסילה $f\left(x\right)=\left(x,\left|x\right|\right)$ כאשר $-1<x<1$. נשים לב שהיא לא דיפרנציאבילית ב0 ואילו כל הנקודות האחרון רגולריות. ואילו $g\left(x\right)=\left(\text{sgn}\left(x\right)x^2,x^2\right)$ דיפרנציאבילית בכל הנקודות אבל לא רגולרית ב 0.



היריעה היא:

$$M=\left[\left(-1,1\right),\left(0,0\right)\right]\cup\left[\left(0,0\right),\left(1,1\right)\right]$$

הערה 3.100 קצת לא ברור מה זה הMהזה במבט ראשון. מדובר פשוט בקטע המחבר את שתי הנקודות, כלומר כל נקודה על הקו הישר המחבר ביניהן.

דוגמה 3.101 $W\in\mathbb{R}^n$, $F:W\to\mathbb{R}^{n-k}$ דיפרנציאבילית ברציפות. $M=\left\{p\in\mathbb{R}^n\middle|\ F\left(p\right)=0\quad \text{rank}\,D_F\left(x\right)=n-k\right\}$
לדוגמה, $D:\mathbb{R}^n\to R$ ו:

$$M=\left\{x:\ F\left(x\right)=0,\ F\left(x\right)=0,\ \nabla F\left(x\right)\neq0\right\}$$

לדוגמה אם נתבונן בפונקציה:

$$F\left(x,y,z\right)=x^2+y^2+z^2-1$$

$$\left\{p:F\left(p\right)=0\right\}$$

$$\nabla F\left(x,y,z\right)=2\left(x,y,z\right)\neq\left(0,0,0\right)$$

למעשה תחת האילוץ הנ"ל מדובר בספירה. נשים לב כי

$$\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2\middle|\ x^2+y^2<1\right\}\ni\left(x,y\right)\mapsto\left(x,y,\sqrt{1-\left(x^2+y^2\right)}\right)$$

מכסה לנו את החצי הכדור הצפוני, בלי קו המשווה, ואם נשים סימן מינוס לפני נקבל את החצי הדרומי.
כדי לקבל את קו המשווה נתבון גם בהעתקות:

$$(x,z)\mapsto\left(x,\pm\sqrt{1-(x^2+z^2)},z\right)$$

עכשיו חסרות לנו רק 2 נקודות, כדי לכסות גם אותן:

$$(y,z)\mapsto\left(\pm\sqrt{1-(y^2+z^2)},y,z\right)$$

טענה 3.102

M היא יריעה k מימדית רגולרית

הוכחה: זהו פירוש שקול של משפט הפונקצייה הסתומה. בפונקציה הסתומה דנו בפונקציה $f:\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, במקרה הזה: $n:=n-k$ ו $m=k$. ■

הגדרה 3.103 תהי $p\in M$ נסמן $a=(p_1,\ldots,p_k)$ ו: $b=(p_{k+1},\ldots,p_n)$. אנו יודעים כי $\operatorname{rank}(D_F(p))=n-k$ (נשתמש בסימון x עבור קואורדינטות a ו: y עבור קואורדינטות b)

הוכחה: כאמור, ב $D_F(p)$ יש $n-k$ עמודות בלתי תלויות. בה"כ נניח כי אלו העמודות האחרונות. ז"א אם נסתכל על $\frac{\partial F}{\partial y}(p)\in GL(n-k)$. לפי המשפט הפונקציה הסתומה, קיימות $a\in U\subset\mathbb{R}^k$ ו: $b\in V\subset\mathbb{R}^{n-k}$ כך ש $U\times V\in W$. ופונקציה $g:U\to V$ כך ש $(x,g(x))\in M$. ואם $(x,y)\in U\times V\cap M\Leftarrow y=g(x)$. נקח עבור $x\in U$, $f(x)=(x,g(x))$, רואים ש: $f(U)=M\cap U\times V$. כמו כן ברור כי $f(a)=p$. זאת אומרת f היא פרמטריזציה רגולרית של M סביב p. ■

הגדרה 3.104 $M\subset\mathbb{R}^n$, אומרים שוקטור v הוא משיק ל M בנקודה p אם קיים $\gamma:[\alpha,\beta]\to M$ גזיר ב $t\in(\alpha,\beta)$ כך ש $\gamma'(t)=v$, $\gamma(t)=p$.

הגדרה 3.105 נסמן T_pM= אוסף של כל הוקטורים המשיקים.

הגדרה 3.106 אם f דיפרנציאבילית ב a אז $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=D_f(a)e_i$ = העמודה ה-i-ית של $D_f(a)$.

טענה 3.107

f רגולרית ב a כאשר $f:\underbrace{U}_{\subset\mathbb{R}^k}\to M$. אזי:

1. $\operatorname{span}\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a),\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_k}(a)\right)=D_f(a)\left(\mathbb{R}^k\right)\subset T_pM$
2. אם M היא יריעה מהדוגמה הקודמת אזי $A=T_pM\subset\ker D_F(p)$

הוכחה: הוכחה של 1:
השוויון ברור כי $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)=D_f(a)e_i$.
נראה $\subset$. יהי $v\in\mathbb{R}^k$, קיים $\varepsilon>0$ כך ש $[a-\varepsilon v,a+\varepsilon v]\subset U$. נגדיר $\gamma:[-\varepsilon,\epsilon]\to M$ ע"י: $\gamma(t)=f(a+tv)$. מכלל השרשרת: $\gamma'(0)=D_f(a)v$ כנדרש.
הוכחה של 2:
תהי $\gamma:(\alpha,\beta)\to M$, $\gamma(t)=p$ וגם $\gamma'(t)=v$. נתבונן בהעתקה $(F\circ\gamma):(\alpha,\beta)\to\mathbb{R}^{n-k}$ זוהי זהותית שווה אפס. לכן

$$D_F(p)v=D_F(\gamma(t))\gamma'(t)=D_{F\circ\gamma}(t)=0$$

(כלל השרשרת) ■

מסקנה 3.108

$B=D_f(a)\mathbb{R}^k=T_p(M)$

הוכחה: A,B מרחבים וקטוריים $\dim A=k$, $\dim B=k$ לכן $A=B$ ומכאן גם בהכרח $T_pM=A=B$. ■

27/12/2011

הערה 3.109 המשיק במקרה הנ"ל הוא לא באמת T_pM אלא זהו רק הכיוון שלו, בשביל לקבל את המשיק האמיתי נסתכל על $p+T_pM$.

דוגמה 3.110 $F:W\to\mathbb{R}$, $M=\{x\in W \mid F(x)=0,\ \nabla F(x)\neq 0\}$, $T_pM=\nabla F(p)^{\perp}$ (כללית $= \ker D_F(p)$)

דוגמה 3.111 $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ מסילה חלקה, אזי $T_pM=Rf'(t)$ כאשר $p=f(t)$.

דוגמה 3.112 $f:U\to M\subset\mathbb{R}^3$ ו: $U\subset\mathbb{R}^2$. f רגולרית בa אז:

$$T_pM=\operatorname{span}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a),\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(a)\times\frac{\partial f}{\partial y}(a)\right)^{\perp}$$

4 אינגרביליות ב$\mathbb{R}^n$

4.1 אינטגרציית רימן

הגדרה 4.1 תיבה: תיבה היא קבוצה מהצורה:

$$A=[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_n,b_n]=\{x\in\mathbb{R}^n \mid a_i\leq x_i\leq b_i\}$$

כאשר $a_i\leq b_i$

הגדרה 4.2 תיבה מנוונת: תיבה נקראת מנוונת אם $a_i=b_i$ עבור i מסויים.

הגדרה 4.3 נפח: הנפח של A מוגדר בצורה הבאה:

$$m(A)=\prod(b_i-a_i)$$

הערה 4.4 A מנוונת אם"ם $m(A)=0$

הערה 4.5 A סגורה, $\mathring{A}=(a_1,b_1)\times\ldots\times(a_n,b_n)$.
∂A היא איחוד סופי של תיבות מנוונות.

אנחנו רוצים שייתקיים $A=\bigcup_{i=1}^{k}A_i$ כאשר A_i תיבות עם $\mathring{A}_i\cap\mathring{A}_j=\varnothing$ כאשר $i\neq j$. $m(A)=\sum m(A_i)$. (כרגע לא נוכיח את זה, לא ברור אם בכלל).

הפרדוקס של האוסדורף־בנך־טרסקי הוא דוגמה למקרה שנפח לא נשמר. הפרדוקס אומר שניתן לקחת כדור, לחלק אותו למספר סופי של חלקים ועל ידי פעולות סיבוב והזזה בלבד נוכל לקבל שני כדורים זהים לכדור המקורי. (כלומר הנפח הוכפל, בלי שביצענו אף פעולה של ניפוח).

הגדרה 4.6 חלוקה: חלוקה של A (תיבה) לא מנוונת $T=(T_1,\ldots,T_n)$ כאשר T_j (קבוצה) היא חלוקה של $[a_j,b_j]$, ז"א:

$$T_j: a_j=t_j^0<t_j^1<\ldots<t_j^{m_j}=b_j$$

הפירוק של A הנוצר ע"י T הוא קבוצת כל התיבות:

$$\left[t_1^{i_1-1},t_1^{i_1}\right]\times\ldots\times\left[t_n^{i_n-1},t_n^{i_n}\right]$$

נסמן: $P(T)$ את התיבות הנ"ל.

הערה 4.7 מתקיים $m(A)=\sum m(A_i)$ כאשר אנחנו מסמנים את $P(T)=\{A_i\}_{i=1}^{k}$ (כלומר A_i זו מנייה של התיבות שבחלוקה)

הגדרה 4.8 עידון: חלוקה $T'=(T'_1,\dots,T'_n)$ נקראת עידון של T אם $T_j\subset T'_j$ עבור $j=1,\dots,n$

הערה 4.9 לכל שתי חלוקות יש עידון משותף (דהיינו האיחוד)

הגדרה 4.10 סכום עליון וסכום תחתון: בהינתן $f:A\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה, T חלוקה של A אזי, הסכום העליון של f הוא:

$$S(f,T)=\sum_{i=1}^{k}\sup_{x\in A_i}f(x)\,m(A_i)$$

והסכום התחתון של f הוא:

$$\sigma(f,T)=\sum_{i=1}^{k}\inf_{x\in A_i}f(x)\,m(A_i)$$

הערה 4.11 אם T' הוא עידון של T אזי:

$$S(f,T')\le S(f,T)$$

וגם:

$$\sigma(f,T')\ge\sigma(f,T)$$

הערה 4.12 לכל חלוקות T,T' תמיד:

$$\sigma(f,T')\le S(f,T)$$

כי זה ברור כי אם $T=T'$ אז $\inf\le\sup$. ונקח עידון משותף T,T' נגדיר אותו בתור T'' אז מתקיים:

$$\sigma(f,T')\le\sigma(f,T'')\le S(f,T'')\le S(f,T'')$$

הגדרה 4.13 אינטגרל העליון ותחתון: האינטגרל העליון של f הוא:

$$\overline{\int_A} f=\inf_T S(f,T)$$

והאינטגרל התחתון של f הוא:

$$\underline{\int_A} f=\sup_T \sigma(f,T)$$

הגדרה 4.14 אינטגרביליות: אומרים ש־f אינטגרבילית על A אם $\underline{\int_A} f=\overline{\int_A} f$ ואז מגדירים את האינטגרל של f על A:

$$\int_A f=\overline{\int_A} f=\underline{\int_A} f$$

דוגמה 4.15 אם f קבועה, $f(x)=k$ לכל $x\in A$ אזי f אינטגרבילית ו: $\int_A f=km(A)$

טענה 4.16

נניח שf,g אינטגרביליות על A אזי:

1. $f+g$ אינטגרבילית על A ומתקיים: $\int\limits_A (f+g) = \int\limits_A f + \int\limits_A g$
2. αf אינטגרבילית על A ומתקיים: $\int\limits_A \alpha f = \alpha \int\limits_A f$
3. אם $k \le f \le M \Leftarrow Mm(A) \ge \int\limits_A f \ge km(A)$ בפרט $0 \le f \Leftarrow$
$\int\limits_A f \ge 0$ וגם $f \le g \Leftarrow \int\limits_A f \le \int_A g$

הערה 4.17 למעשה ב$1,2$ אנו אומרים שקבוצת כל הפונקציות האינטגרביליות על A היא מרחב וקטורי ו $\int\limits_A$ הוא פונקציונל לינארי.
3ו גורר שהוא חיובי.

הוכחה:

1. מתקיים $S(g,T) + S(f,T) \ge S(f+g,T) \ge \sigma(f+g,T) \ge \sigma(g,T) + \sigma(f,T) \Leftarrow$

$$\underline{\int\limits_A} f + \underline{\int\limits_A} g \le \underline{\int\limits_A} (f+g) \le \overline{\int\limits_A} (f+g) \le \overline{\int\limits_A} f + \overline{\int\limits_A} g$$

הקצוות שווים. לכן: $\overline{\int\limits_A} (f+g) = \underline{\int\limits_A} (f+g) \Leftarrow f+g$ אינטגבילית ושיוויון

2. אם $\alpha \ge 0$ אזי: $S(\alpha f,T) = \alpha S(f,T)$ וכו'. לכן ברור. אם $\alpha = -1$ אז:

$$\sigma(-f,T) = -S(f,T), S(-f,T) = -\sigma(f,T)$$

3. ברור ואין לי עצבים.

■

טענה 4.18

f אינטגרבילית על A אס"ס לכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה T של A כך ש

$$S(f,T) - \sigma(f,T) < \varepsilon$$

הוכחה: $\Leftarrow$ תהי T' חלוקה כך ש $\int\limits_A f = \overline{\int\limits_A} f > S(f,T') - \frac{\varepsilon}{2}$ וכמו כן, קיימת חלוקה T'' כך ש: $\int\limits_A f = \underline{\int\limits_A} f < \sigma(f,T'') + \frac{\varepsilon}{2}$ לכן:

$$\varepsilon > S(f,T') - \sigma(f,T'')$$

נתבונן ב T עידון משותף של T' וT'' ונקבל:

$$\varepsilon > S(f,T') - \sigma(f,T'') > S(f,T) - \sigma(f,T)$$

$\Rightarrow$ קיימת העתקה T כך ש: $\varepsilon > S(f,T) - \sigma(f,T)$ ולכן:

$$\varepsilon > \overline{\int\limits_A} f - \underline{\int\limits_A} f \ge 0$$

ולכן: $\underline{\int\limits_A} f = \overline{\int\limits_A}$ כנדרש.

■

01/01/2012

הגדרה 4.19 תנודה: בהינתן $f : X \to \mathbb{R}$. הנודה של f בX היא:

$$\omega_f(X) = \sup_{x\in X} f(x) - \inf_{x\in X} f(x) = \sup_{x,y\in X}(f(x) - f(y)) = \sup_{x,y\in X}|f(x) - f(y)|$$

טענה 4.20 תנאי רימן לאינטגרביליות

f אינטגרבילית על A אס"ם לכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה T של A כך ש:

$$\sum_{A_i\in P(T)} \omega_f(A_i)\cdot m(A_i) < \varepsilon$$

הוכחה: מהגדרת התנודה, מתקיים:

$$S(f,T) - \sigma(f,T) = \sum_{A_i\in P(T)} \omega_f(A_i)\, m(A_i)$$

ולכן זה נכון מטענה קודמת. ■

הערה 4.21 אם f אינטגרבילית אזי גם $|f|$ אינטגרבילית. כי לכל X מתקיים:

$$\omega_{|f|}(X) \le \omega_f(X)$$

מאי שיוויון המשולש המורחב:

$$||f(x)| - |f(y)|| \le |f(x) - f(y)|$$

הגדרה 4.22 תומך: בהינתן $f : X \to \mathbb{R}$ אז התומך של f מוגדר באופן הבא:

$$\operatorname{supp} f = \{x \in X :\ f(x) \ne 0\}$$

הגדרה 4.23 פונקציה אינטגרבילית לפי רימן: פונקציה $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ נקראת אינטגרבילית (לפי רימן) אם קיימת תיבה A כך ש $\operatorname{supp} f \subset A$ וf אינטגרבילית על A.

טענה 4.24

אם $B \subset A \subset \operatorname{supp} f$ אז f אינטגרבילית על A אס"ם f אינטגרבילית על B ואם כן, $\int_B f = \int_A f$.

הערה 4.25 לא יהיה בבחינה.

הוכחה:

למה 4.26

אם $C \subset A$ תיבה מנוונת ו $C \subset \operatorname{supp} h$, h חסומה, אזי h אינטגרבילית על A ו: $\int_A h = 0$.

הוכחה: C מנוונת לכן: $C = [c_1, d_1] \times \ldots \times [c_n, d_n]$. נניח ש $c_j = d_j$. נגדיר חלוקה $T = (T_1, \ldots, T_n)$ של A כך ש:

$$T_j : a_j < c_j - \delta < c_j + \delta < b_j$$

$T_k : a_l < b_k$. ברור שעבור $P(T)$ יש שלושה איברים (או שניים). נסמן: $M = \sup|h(x)|$

$$\begin{aligned} S(h,T) &\le M\cdot m(D_\delta) \\ \sigma(h,T) &\ge -M\cdot m(D_\delta) \end{aligned}$$

כאשר $\delta \to 0$ מתקיים $m\left(D_\delta\right) \to 0$ לכן:

$$S\left(g, T\left(\delta\right)\right) - \sigma\left(h, T\left(\delta\right)\right) \to 0$$

כלומר, h אינטגרבילית. אבל גם:

$$\overline{\int} h \le 0 - \underline{\int} f \ge 0 \Rightarrow \int h = 0$$

■

$$A = \left[a_1, b_1\right] \times \ldots \times \left[a_n, b_n\right]$$

שלב א': נדרוש כי: $\operatorname{supp} f \subset \overset{\circ}{A}$. (כלומר f מתאפסת על השפה)

תהי $T = \left(T_1, \ldots, T_n\right)$ חלוקה של B, נגדיר: $T' = \left(T'_1, \ldots, T'_n\right)$ ע"י: $T'_j = T_j \cup \left\{a_j, b_j\right\}$. נבחין כי מתקיים:

$$S\left(f.T\right) - \sigma\left(f.T\right) \ge S\left(f, T'\right) - \sigma\left(f, T'\right) = S\left(f, T''\right) - \sigma\left(f, T''\right)$$

כאשר: $T''_j = T'_j \cap \left[a_j, b_j\right]$ - חלוקה של $\left[a_j, b_j\right]$ ולכן חלוקה של A. לכן אינטגרביליות על B⇐אינטגרביליות על A.

אם $T = \left(T_1, \ldots, T_n\right)$ חלוקה של A נגדיר חלוקה T' שלB ע"י: $T'_j = T_j \cup \left\{c_j, d_j\right\}$. ברור ש:

$$\begin{aligned} S\left(f, T'\right) &= S\left(f, T\right) \\ \sigma\left(f, T'\right) &= \sigma\left(f, T\right) \end{aligned}$$

לכן אינטגרביליות על A גוררת אינטגרביליות על B.

שלב ב':

f כללית. נגדיר: $h = f \cdot 1_{\partial A}$ ($1_{\partial A}$ פונקצייה אופיינית של השפה) ו: $g = f \cdot 1_{\overset{\circ}{A}}$. ברור ש: $f = h + g$. לפי הלמה:

$$0 = \int\limits_A h = \int\limits_B h$$

ולפי שלב א', $\int\limits_A g$ ו: $\int\limits_B g$ קיימים בו זמנית ושווים (אם קיימים) ■

הגדרה 4.27 מידה 0: $X \subset \mathbb{R}^n$ היא בעלת מידה 0 אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימות תיבות $A_1, A_2, \ldots$ כך ש $X \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j$ ו: $\sum\limits_{j=1}^{\infty} m\left(A_j\right) < \varepsilon$

הגדרה 4.28 תכולה 0: $X \subset \mathbb{R}^n$ היא בעלת תכולה 0 אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימות $A_1, \ldots, A_N$ כך ש: $X = \bigcup\limits_{j=1}^{N} A_j$ ו: $\sum\limits_{j=1}^{N} m\left(A_j\right) < \varepsilon$

דוגמה 4.29 קבוצה סופית היא בעלת תכולה 0 .

טענה 4.30

אם $X_1, X_2, \ldots$ בעלות מידת 0, אזי גם $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} X_j$ בעלת מידה 0.

הוכחה: תהיינה $A_{j,1}, A_{j,2}, \ldots$ תיבות כך ש $X_j \subset \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_{j,i}$. ו: $\sum\limits_{i=1}^{\infty} m\left(A_{j,i}\right) < \frac{\varepsilon}{2^j}$ מתקיים $X \subset \bigcup\limits_{j,i=1}^{\infty} A_{j,i}$ וכמו כן:

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{\infty} > \sum_{j,i=1}^{\infty} m\left(A_{j,i}\right)$$

■

מסקנה 4.31

כל קבוצה בת מנייה היא בעלת מידה 0 .

דוגמה 4.32 $X = \mathbb{Q} \cap [0,1]$ בת מנייה, ולכן בעלת מידה 0. נניח בשלילה כי היא בעלת תכולה אפס. יהיו $A_1, A_2, \ldots A_N$ קטעים סגורים כך ש $X \subset A_1 \cup \ldots \cup A_N$ (X סגורה). ולכן:

$$[0,1] = \overline{X} \subset A_1 \cup \ldots \cup A_N$$

לכן לא ייתכן כי הסכום של האורכים העלה יהיה קטן מε כי הוא בהכרח הוא מכיל קבוצה באורך 1 . מתקיין $\sum 1_{A_j}(x) \geq 1$ (פונקצייה מציינת) לכל $x \in [0,1]$.

$$1 = \int_0^1 1\mathrm{d}x \leq \sum_{j=1}^{N} m(A_j) \not< \varepsilon$$

הערה 4.33 מקבלים את אותן ההגדרות אם במקום תיבות סגורות נקח תיבות פתוחות.

טענה 4.34

כאשר X קומפקטי, שתי ההגדרות מתלכדות.

הוכחה: תהיינה $A_1, A_2, \ldots$ תיבות כך ש $X \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \mathring{A}_j$ ו: $\sum_{j=1}^{\infty} m(A_j) < \varepsilon$. בגלל הקומפקטיות קיים N כך ש $X \subset \bigcup_{j=1}^{N} \mathring{A}_j$ וברור ש: $\sum_{j=1}^{N} m(A_j) < \varepsilon$. ■

הגדרה 4.35 השלד של T: עבור חלוקה T של A, $\Sigma(T) = \bigcup_{A_i \in P(T)} \partial A_i$ (השלד של T)

הערה 4.36 $\Sigma(T)$ הוא בעל תכולה 0 .

הגדרה 4.37 תנודה בנקודה: $f : X \to \mathbb{R}$, $x \in X$ התנודה של f בx מוגדרת ע"י:

$$\omega_f(x) = \inf \omega_f(B_\delta(x)) = \lim_{\delta \to 0^+} \omega_f(B_\delta(x))$$

הערה 4.38 f רציפה ב x אס"ם $\omega_f(x) = 0$.

הערה 4.39 לכל קבוצה פתוחה U, $x \in U$, $\omega_f(x) \leq \omega_f(U)$

משפט 4.40 *Lesbegue*

תהי $f : A \to \mathbb{R}$ (A תיבה) פונקציה חסומה. f אינטגרבילית אס"ס:

$$F = \{x \mid x \text{ אינה רציפה ב } f\}$$

היא בעלת מידה 0.

הוכחה: נסמן עבור $t > 0$:

$$F_t = \{x \in A \mid \omega_f(x) \geq t\}$$

ברור ש:

$$F = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_{1/n}$$

טענה 4.41

לכל $0 < t$ F_t היא בעלת תכולה 0

הערה 4.42 זה נותן $\Leftarrow$ של משפט לבג.

הוכחה: תהי T חלוקה כך ש $\sum\limits_{A_i \in P(T)} \omega_f(A_i) m(A_i) < \varepsilon t$. נניח ש $x \in F_t \cap \mathring{A}_i$ $\Leftarrow$ $t \leq \omega_f(A_i)$. לכן:

$$t\varepsilon \geq \sum_{i:\omega_f(A_i) \geq t} \omega_f(A_i) m(A_i) \geq t \sum_{i:\omega_f(A_i) \geq t} m(A_i)$$

לכן,

$$\sum_{i:F_t \cap \mathring{A}_i \neq \varnothing} m(A_i) \leq \varepsilon$$

ברור ש:

$$F_t \subset \underbrace{\Sigma(T)}_{\text{תכולה 0}} \bigcup_{F_t \cap \mathring{A}_i \neq \varnothing} A_i$$

כלומר, יש כיסוי של F_t ע"י תיבות עם סכום נפחים קטן מ2ε ולכן היא בעלת תכולה 0. ■

03/01/2012

טענה 4.43

F_t סגורה

הוכחה: יהי $a \in \overline{F_t}$ צריך להוכיח כי $a \in F_t$, כלומר נרצה להראות כי $\omega_f(a) \geq t$. זאת אומרת, צריך להוכיח כי לכל $\delta > 0$, $\omega_f(B_\delta(a)) \geq t$.

אנו יודעים כי קיים $b \in F_t$ כך ש $b \in B_\delta(a)$. יהי $\eta > 0$ כך ש $B_\eta(b) \subset B_\delta(a)$ (קיים כי הגדור הראשון הוא קבוצה פתוחה).

מכיוון ש $b \in F_t$, אזי: $\omega_f(\beta_\delta(a)) \geq \omega_f(B_\eta(b)) \geq t$. ■

נרצה להוכיח את הכיוון השני של משפט לבג. יהי $\varepsilon > 0$.

צריך למצוא חלוקה T של A כך ש: $\sum\limits_{A_i \in P(T)} \omega_f(A_i) m(A_i) < \varepsilon$

למה 4.44

תהיינה $B_1, \ldots, B_N$ תיבות המכסות את A. אזי קיימת חלוקה T של A כך שלכל $A_i \in P(T)$ קיים j כך ש $A_i \subset B_j$

הוכחה: תהי $B_k = [c_1^k, d_1^k] \times \ldots \times [c_n^k, d_n^k]$. נגדיר: $T_j = \{a_j, b_j, c_j^k, d_j^k, k = 1, \ldots, n\}$, $T = (T_1, \ldots, T_n)$, וזהו. ■

נקח $t = \frac{\varepsilon}{2m(A)}$. F_t בעלת תכולה 0, לכן קיימות תיבות $B_1, \ldots, B_N$ כך ש: $\sum\limits_{j=1}^{N} m(B_j) < \frac{\varepsilon}{2\omega_f(A)}$ ומתקיים: $U = \left(\bigcup\limits_{j=1}^{N} B_j\right)^\circ \supset F_t$. הקבוצה $A \backslash U$ היא קומפקטית מוכלת ב F_t^c. לכל $x \in A \backslash U$ קיימת תיבה $C(x)$ כך ש $x \in C(x)^\circ$ ו: $\omega_f(C(x)) < t$. $\{C(x)^\circ \mid x \in A \backslash U\}$ הוא כיסוי פתוח של $A \backslash U$. בגלל הקומפקטיות קיימים, $x_1, \ldots, x_m$ כך ש: $C(x_1) \cup \ldots \cup C(x_n) \supset A \backslash U$ (נסמן: $C_i = C(x_i)$).

תהי T חלוקה כך שכל A_i מוכל ב B_j מסוים או ב C_i מסוים. נסמן

$$P = \{A_i \in P(T) \mid A_i \subset B_j \text{ קיים } B_j \text{ כך ש:}\}$$

לכן $A_i \notin P'$ קיים j כך ש $A_i \subset C_j$ לכן: $\omega_f(A_i) \leq \omega_f(C_j) < t$ לכן: $\sum\limits_{A_i \notin P'} \omega_f(A_i) m(A_i) < t \sum\limits_{A_i \in P(T)} m(A_i) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

הערה 4.45

$$\sum_{A_i\in P(T)} = \sum_{A_i\in P'} + \sum_{A_i\notin P'}$$

לכן נרצה למצוא את $\sum\limits_{A_i\in P'}$.

$$\sum_{A_i\in P'} \omega_f(A_i)\, m(A_i) \le \omega_f(A) \sum_{A_i\in P'} m(A_i) \le \omega_f(A) \sum m(B_j) \le \frac{\varepsilon}{2}$$

מכיוון ש: $\bigcup A_i \subset \bigcup B_j$
ולכן קיבלנו כי:

$$\sum_{A_i\in P(T)} \omega_f(A_i)\, m(A_i) \le \varepsilon$$

ומתנאי רימן, הפונקציה אינטגרבילית כנדרש. ■

הגדרה 4.46 בעלת נפח: נאמר שקבוצה $X\in\mathbb{R}^n$ היא בעלת נפח (לפי Jordan) אם הפונקציה האופיינית 1_X אינטגרבילית.

טענה 4.47

X בעלת נפח אס"ם X חסומה ו ∂X (השפה של X) היא בעלת תכולה 0.

הוכחה: מתקיים $\partial X = F(1_X)$. כי אם $x\in \overset{\circ}{X}$ אז 1_X רציפה בx ואם $x\in (X^c)^\circ$ אזי 1_X רציפה ב x.

$$\overline{X^c}\cap \overline{X} = \partial X = \mathbb{R}^n \backslash \left(\overset{\circ}{X} \cup |X^c|^\circ\right)$$

אם $X\in\partial X$ אז לכל $\delta>0$ $B_\delta(x)$ מכיל נקודות של X ושל X^c לכן אין רציפות. ■

מסקנה 4.48 מסקנה ממשפט לבג

נניח ש$f_1,\dots,f_m:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ אינטגרביליות כך ש $f=(f_1,\dots,f_m)$ ו: $f(\mathbb{R}^n)\subset U$ ו $\Phi:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ רציפה אזי הפונקציה $g(x)=\Phi(f_1(x),\dots,f_m(x))$ אינטגרבילית.

הוכחה: כי $F(g)\subset F(f_1)\cup\ldots\cup F(f_m)$ (F זה אוסף נקודות אי רציפות של הפונקציה המצויינת) ולכן $F(g)$ גם היא ממידה אפס. ■

מסקנה 4.49

אם f_1,f_2 אינטגרביליות אזי f_1f_2 גם כן. וכמו כן, אם $|f_2|\ge\varepsilon>0$ אזי גם $\frac{f_1}{f_2}$ אינטגרבילית.

מסקנה 4.50

אם X,Y בעלות נ אזי $X\cup Y$ ו $X\cap Y$ וגם $X+x$ בעלות נפח

הוכחה: כי:

$$1_{X\cup Y} = 1_X + 1_Y - 1_{X\cap Y}, \quad 1_{X\cap Y} = 1_X 1_Y$$

■

טענה 4.51

$f:A\to\mathbb{R}$ פונקציה אי שלילית ($f(x)\ge 0$), f אינטגרבילית ו: $\int_A f = 0$ אזי $\operatorname{supp} f$ הוא בעל מידה 0.

הוכחה: נסמן $x_n=\left\{x \mid f(x)\ge \frac{1}{n}\right\}$ ברור כי: $\operatorname{supp} f = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} X_n$. צריך להוכיח ש$X_n$ בעל מידה 0.

תהי T חלוקה של A כך ש

$$\frac{1}{n}\sum_{i:\ \sup\limits_{x\in A_i} f(x)\geq\frac{1}{n}} m\left(A_i\right) \leq \sum_{i:\ \sup\limits_{x\in A_i} f(x)\geq\frac{1}{n}} \underbrace{\sup_{x\in A_i}}f\left(x\right) \leq \sum \sup_{x\in A_i} f\left(x\right) = S\left(f,T\right) \leq \frac{\varepsilon}{n}$$

ברור ש $X_n \subset \bigcup\limits_{i:\ \sup\limits_{x\in A_i} f(x)\geq\frac{1}{n}} A_i$ ו:

$$\sum_{i:\ \sup\limits_{x\in A_i} f(x)\geq\frac{1}{n}} m\left(A_i\right) < \varepsilon$$

ולכן X_n בעל מידה אפס, ו$\operatorname{supp} f$ הוא בעל מידה אפס כאיחוד בן מנייה של קבוצות בעלות מידה אפס. ■

$f : A\to\mathbb{R}$, $A=[a,b]\times[c,d]$. (כלומר f פונקציה מ2 משתנים).

$$\begin{aligned} I_1 &= \int\limits_c^d\left(\int\limits_a^b f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\ I_2 &= \int\limits_a^b\left(\int\limits_c^d f\left(x,y\right)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ I &= \int\limits_A f \end{aligned}$$

אנו מצפים כי $I=I_1=I_2$, וזהו באמת משפט פוביני, אבל לא תמיד. אם I קיים, אז באמת $I_1=I_2=I$. אבל אם הוא לא, אז לא בהכרח. ויש לזה דוגמה "חולנית".

I_1, I_2 נקראים אינטגרלים חוזרים ואילו I נקרא אינטגרל כפול.

4.1.1 משפט פוביני

משפט 4.52 משפט פוביני (*Fubini*)

$N=n+m$, $A=\underbrace{[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_n,b_n]}_{A'}\times\underbrace{[a_{n+1},b_{n+1}]\times\ldots\times[a_N,b_N]}_{A''}$ תיבה. $f : A\to\mathbb{R}$. נסמן $f\left(x,y\right)$ כאשר $x\in\mathbb{R}^n$ ו: $y\in\mathbb{R}^m$.

f אינטגרבילית על A, אזי $\varphi\left(y\right)$ ו $\psi\left(y\right)$ אינטגרביליות ומתקיים:

$$\int\limits_{A''}\underbrace{\left(\overline{\int\limits_{A'}} f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\right)}_{\varphi(y)}\mathrm{d}y = \int\limits_{A''}\underbrace{\left(\underline{\int\limits_{A'}} f\left(x,y\right)\mathrm{d}x\right)}_{\psi(y)}\mathrm{d}y = \int\limits_A f = I$$

08/01/2012

הערה 4.53 פורמלית זה מוכיח החלפה, כיוון שאם זה נכון על x זה גם נכון על y.

הערה 4.54

$$\varphi\left(y\right)\leq\psi\left(y\right),\ \int\varphi=\int\psi\Rightarrow\left\{y:\varphi\left(y\right)\neq\psi\left(y\right)\right\}$$

היא קבוצה בעלת מידה אפס. פונקציה f_y אינטגרבילית לכל y בפרט לקבוצה בעלת מידה 0

הוכחה: מספיק להראות שלכל $\varepsilon>0$:

$$I-\varepsilon\leq\underline{\int\limits_{A''}}\varphi\left(y\right)\mathrm{d}y\leq\overline{\int\limits_{A''}}\psi\left(y\right)\mathrm{d}y\leq I+\varepsilon$$

כי: $\underline{\int\limits_{A''}}\varphi(y)\,\mathrm{d}y \le \int\limits_{A''}\psi(y)\,\mathrm{d}y \le \overline{\int\limits_{A''}}\varphi(y)\,\mathrm{d}y$.
לכן, ψ, φ אינטגרביליות, והאי שיוויון (הראשון בהוכחה) נותן כי:

$$I-\varepsilon \le \int\limits_{A''}\varphi \le \int\limits_{A''}\psi \le I+\varepsilon$$

זה נכון לכל ε, לכן כולם שווים. נראה זאת.
ברור שמספיק להוכיח שלכל $\varepsilon>0$:

$$\overline{\int\limits_{A''}}\psi(y)\,\mathrm{d}y \le I+\varepsilon$$

תהי $T=(T',T'')$ חלוקה של A כך ש $S(f,T)\le I+\varepsilon$.

$$P(T)=\left\{A'_i\times A''_j \mid A''_j\in P(T''),\ A'_iP(T')\right\}$$

$$\overline{\int\limits_{A''}}\psi \le S(\psi,T'') = \sum_{A''_i\in P(T'')}\sup_{y\in A''_i}\psi(y)\,m(A''_i)$$

$$\psi(y)=\overline{\int\limits_{A'}}f(x,y)\,\mathrm{d}x \le S(f_y,T') = \sum_{A'_j\in P(T')}\sup_{x\in A''}f_y(x)\,m\left(A'_j\right)$$

נבחין כי: $\sup\limits_{x\in A'_j}f(x,y)\le \sup\limits_{x\in A'_j,\ z\in A''_i}f(x,z)$. כמו כן:

$$\sup_{y\in A''_i}\psi(y)\le \sum_{A'_j\in P(T')}\sup_{(x,z)\in A'_j\times A''_i}f(x,z)\,m\left(A'_j\right)$$

ולכן:

$$\overline{\int\limits_{A''}}\psi \le \sum\sum \sup_{(x,z)\in A'_j\times A''_i}\sup f(x,z)\underbrace{m\left(A'_j\right)m\left(A''_i\right)}_{m\left(A'_j\times A''_i\right)} = \sum_{A_i\in P(T)}\sup_{w\in A_i}f(w)\,m(A_i)=S(f,T)\le I+\varepsilon$$

■

4.1.2 עקרון Cavalieri

הגדרה 4.55 $B\subset\mathbb{R}^{n+1}$ עבור $t\in\mathbb{R}$. נסמן:

$$B_t=\{x\in\mathbb{R}^n \mid (x,t)\in B\}$$

אם B בעלת נפחת אזי:

$$V_{n+1}(B)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}V_n(B_t)\,\mathrm{d}t$$

כי לפי פוביני:

$$V_{n+1}(B)=\int 1_B=\int\left(\int\underbrace{1_B(x,t)}_{1_{B_t}}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t=\int\left(\int 1_{B_t}(x)\right)\mathrm{d}t=\int V(B_t)\,\mathrm{d}t$$

B_t בעלת נפח פרט לקבוצת בעלת מידה 0 (ב $\mathbb{R}$) ו: $V_n(B_t)$ אינטגרבילית.

למה 4.56

תהי $f : A \to \mathbb{R}^n$ (A תיבה ב $\mathbb{R}^n$) פונקציה ליפשיצית (קבוע K), אזי לכל קוביה $B \subset A$, $C \supset f(B)$ קוביה בעלת נפח $\geq m(B) \left(Kn^{1/2}\right)^n$

הוכחה: תהי $B = \prod_{i=1}^{n} [a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon]$, $B \subset \overline{B}_{\varepsilon\sqrt{n}}(a)$, $a = (a_1, \dots, a_n)$. לפי ליפשציות, $f(B) \subset \overline{B}_{K\varepsilon\sqrt{n}}(f(a)) \subset \prod_{i=1}^{n} [b_i - K\varepsilon\sqrt{n}, b_i + K\varepsilon\sqrt{n}]$. ■

טענה 4.57

אם $X \subset A \subset \mathbb{R}^n$ בעלת מידה 0\תכולה 0 , $f : A \to \mathbb{R}^n$ ליפשיצית אזי $f(X)$ גם כן בעלת מידה אפס\תכולה אפס.

הוכחה: $\varepsilon > 0$, ברור שקיימות קוביות $B_1, B_2, \dots$ כך ש $X \subset \bigcup B_j$ ו: $\sum m(B_j) < \varepsilon$. לפי הלמה: $f(x) \subset \bigcup f(B_j) \subset \bigcup C_j$ כך ש $\sum m(C_j) \leq \left(Kn^{1/2}\right)^n \varepsilon$. ■

טענה 4.58

תיה $f : A \to \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית אזי הגרף של f:

$$\Gamma f = \left\{ (x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in A \right\}$$

הוא בעל תכולת 0.

הוכחה: תהי T חלוקה של A כך ש ש: $S(f,T) - \sigma(f,T) < \varepsilon$. ברור ש:

$$\Gamma f \subset \bigcup_{A_i \in P(T)} \underbrace{A_i \times \left[\inf_{x \in A_i} f(x), \sup_{x \in A_i} f(x) \right]}_{B_i}$$

$$\sum m(B_i) = \sum \underbrace{\left(\sup_{x \in A_i} f(x) - \inf_{x \in A_i} f(x) \right)}_{\omega_f(A_i)} m(A_i)$$

ולכן זה קטן ε ולכן בעל מידה 0\תכולה 0. ■

דוגמה 4.59

$$D_n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1 \}$$

אס"ם ∂D_n בעלת תכולה 0

$$\partial D_n = S^{n-1} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1 \}$$

למה S^{n-1} בעלת תכולה 0?

$$S^{n-1} = A \cup B$$

כאשר $A = \Gamma(f)$, $f(x) = \sqrt{1 - \|x\|'}$, $f : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$.

10/01/2012

משפט 4.60

אם $B \subset \mathbb{R}^n$ בעלת נפח, $T \in \hom(n,n)$, אזי TB גם בעלת נפח ומתקיים:

$$V(TB) = |\det T| \, V(B)$$

תזכורת 4.61 נזכר במשפט מאלגברה לינארית:

משפט 4.62

כל $T\in\hom(n,n)$ ניתן להציג כ: $T=T_N\circ\ldots\circ T_2\circ T_1$ כאשר $T_j\in\hom(n,n)$ הוא אחד משלושת הסוגים:

1. T_j - פרמוטציה
2. T_j מטריצה אלכסונית
3. הוספה של שורה לשורה או עמודה לעמודה (פעולות אלמנטריות)

בנוסף, אנו יודעים כי: $|\det T|=\prod|\det T_j|$.

לכן כדי להוכיח את המשפט מספיק להראותו עבור העתקות מהסוגים הנ"ל.

טענה 4.63

תהי π פרמוטציה (של $1,\ldots,n$), אזי לכל $f:A\to\mathbb{R}$ (A תיבה ב $\mathbb{R}^n$) אינטגרבילית. הפונקציה $g:A'\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית כאשר $g(x_1,\ldots,x_n)=f\left(x_{\pi(1)},\ldots,x_{\pi(n)}\right)$.

$$A'=\left[a_{\pi(1)},b_{\pi(1)}\right]\times\ldots\times\left[a_{\pi(n)},b_{\pi(n)}\right]$$

ומתקיים:

$$\int\limits_{A'}g=\int\limits_{A}f$$

הוכחה: לכל חלוקה $T=(T_1,\ldots,T_n)$ נתאים חלוקה $T'=\left(T_{\pi(1)},\ldots,T_{\pi(b)}\right)$ של A'. ברור כי:

$$\begin{aligned}S(f,T)&=S(g,T')\\\sigma(f,T)&=\sigma(g,T')\end{aligned}$$

לכן, $\overline{\int\limits_{A}}f=\overline{\int\limits_{A'}}g$ וגם $\underline{\int\limits_{A}}f=\underline{\int\limits_{A'}}g$ ולכן: $\int\limits_{A}f=\int\limits_{A'}g$. ■

טענה 4.64

מספיק להראות עבור:

$$T=\begin{pmatrix}1&0&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&0\\0&\ddots&&&&&\vdots\\\vdots&&1&&&&\vdots\\\vdots&&&\alpha&&&\vdots\\\vdots&&&&1&&\vdots\\\vdots&&&&&\ddots&0\\0&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&0&1\end{pmatrix}$$

הערה 4.65 כי:

$$\begin{pmatrix}\alpha_1&0&\ldots&\ldots&0\\0&1&&&\vdots\\\vdots&&1&&\vdots\\\vdots&&&\ddots&0\\0&\ldots&\ldots&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&\ldots&\ldots&0\\0&\alpha_2&&&\vdots\\\vdots&&1&&\vdots\\\vdots&&&\ddots&0\\0&\ldots&\ldots&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1&0&\ldots&\ldots&0\\0&\alpha_2&&&\vdots\\\vdots&&1&&\vdots\\\vdots&&&\ddots&0\\0&\ldots&\ldots&0&1\end{pmatrix}$$

הוכחה: בה"כ נניח ש: $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$.

נבחין כי: $(TB)_{\alpha t} = B_t$, זאת אומרת: $(TB)_t = B_{t/\alpha}$.
לפי Cavalieri

$$V_n(TB) = \int V_{n-1}\left((TB)_t\right) \mathrm{d}t = \int V_{n-1}\left(B_{t/\alpha}\right) \mathrm{d}t$$

נסמן $u = \frac{t}{\alpha}$, $\alpha \mathrm{d}u = \mathrm{d}t$ ונקבל:

$$= \alpha \int V_{n-1}(B_u) \mathrm{d}u = |\alpha| V_n(B)$$

למה הערך מוחלט? כי אם אנחנו עושים את האינגרל על תחום כלשהו, אנחנו גם צריכים לחלק את התחום ב-α, ואז אם α שלילי, אנחנו הופכים את הסימן של האינטגרל כולו. לכן α צריך להיות בערך מוחלט.
וכמו כן, נזכור כי $|\alpha| = |\det T|$.
ובהכללה:

$$V_n\left(\begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_n \end{pmatrix} B\right) = \alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_n V_n(B)$$

$$V_n(\alpha B) = \alpha^n V_n(B)$$

$$f(t) = V_{n-1}\left(B_{t/\alpha}\right)$$

■

טענה 4.66

נרצה להראות כי $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$

הערה 4.67 אם B בעלת נפח, אז גם $B + x$ גם כן ו: $V(B+x) = V(B)$. נגדיר:

$$g(y) = f(y - x)$$

כאשר $x \in \mathbb{R}^n$ קבוע.

הוכחה:

$$T(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1} + x_n, x_n)$$

נקבל:

$$(TB)_t = B_t + (0, \ldots, 0, t)$$

לכן:

$$V_{n-1}\left((TB)_t\right) = V_{n-1}(B_t)$$

■

ומשילוב הטענות קיבלנו את המשפט כנדרש.

נרצה לחשב את $V_n\left(D_n\right)$ כאשר: $D_n=\{x\in\mathbb{R}^n \mid \|x\|\leq 1\}$ לפי Cavalieri נקבל:

$$\left(D_{n+1}\right)_t=\sqrt{1-t^2}D_n$$

$$V_{n+1}\left(D_{n+1}\right)=\int_{-1}^{1}V_n\left(\sqrt{1-t^2}D_n\right)\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}\left(1-t^2\right)^{\frac{n}{2}}\mathrm{d}tV_n\left(D_n\right)$$

נסמן:

$$I_n=\int_{-1}^{1}\left(1-t^2\right)^{\frac{n}{2}}\mathrm{d}t$$

נציב $t=\sin x \Leftarrow \mathrm{d}t=\cos x\mathrm{d}x$ ונקבל:

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n+1}x\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}\sin x=\cancelto{0}{\cos^n x\sin x|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}}+n\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}x\underbrace{\sin^2 x}_{1-\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

כלומר קיבלנו:

$$I_n=n\left(I_{n-2}-I_n\right)$$

לכן:

$$I_n=\frac{n}{n+1}I_{n-2}$$

$$I_nI_{n-1}=\frac{n-1}{n+1}I_{n-2}I_{n-3}=\ldots=\frac{2\pi}{n+1}$$

ונקבל כי:

$$V_{n+1}\left(D_{n+1}\right)=I_nI_{n-1}\ldots I_2I_1I_0=\frac{\left(2\pi\right)^2}{2k\left(2k-2\right)\ldots 2}=\frac{\pi^k}{k!}$$

4.2 חילוף משתנה

תזכורת 4.68 משפט חילוף משתנה: עבור $n=1$. g גזירה f רציפה. ברציפות:

$$\int_{g(a)}^{g(b)}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_a^b f\left(g\left(t\right)\right)g'\left(t\right)\mathrm{d}t$$

משפט 4.69 משפט חילוף משתנה ב$\mathbb{R}^n$

תהי $U\subset\mathbb{R}^n$ פתוחה עם ∂U בעלת מידה 0. $g:\overline{U}\to\mathbb{R}^n$ דפרציאבילית ברציפות ב U, רציפה ב $\overline{U}$, g חח"ע בU, $J_g\left(t\right)\neq 0$, $t\in U$.
תהי $K\subset\overline{U}$ קבוצה קומפקטית. $f:g\left(K\right)\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה אזי:

$$\int_{g(K)}f=\int_K f\circ g\left|J_g\right|$$

הערה 4.70 $n=1$, $g'(t)\neq 0$:

$$\int\limits_{g([a,b])} f = \int\limits_{[a,b]} f\circ g\left|g'\right|$$

מאיפה הגיע הערך מוחלט?
שוב היפוך של האינטגרל...

הערה 4.71 לא ממש נוכיח, רק נעשה חצי עבודה

דוגמה 4.72 קואורדינטות קוטביות:

$$\begin{aligned}(r\cos\theta, r\sin\theta) &= g(r,\theta)\\ (0,\infty)\times(0,2\pi) &= U\end{aligned}$$

$$\int\limits_{g(K)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

במקרה יותר ספציפי:

$$\int\limits_{B_R(0)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{R} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

עובדה אם $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ תלויה רקב $r=\|x\|$, ז"א $f(x)=\varphi(\|x\|)$ כך ש φ רציפה. אזי:

$$\int\limits_{B_R(0)} f = k_n\int \varphi(r)\, r^{n-1}\mathrm{d}r$$