גיאומטריה דיפרנציאלית

אור דגמי, http://digmi.org

20 בפברואר 2015

סיכום הרצאות של לאוניד פולטרוביץ' בשנת לימודים 2015 באוניברסיטת תל אביב.
הספר של פרבר מכיל הוכחות שלא נמצאות בסיכום.

תוכן עניינים

I סיכומי שיעור 6

1 מרחב אוקלידי 7
1.1 הגדרות 7
1.2 איזומטריות של $\mathbb{R}^n$ 8

2 עקומות במישור 9
2.1 הגדרות 9
2.2 אורך על עקומה 9
2.2.1 מוטיבציה של הגדרת האורך 10
2.2.2 אורך נשמר תחת איזומטריות 11
2.3 פרמטריזציה של עקומות 11

3 אוריינטציה של מרחב לינארי 15
3.1 הגדרות 15
3.2 עקומים במישור, עקמומיות ומשוואות Frenet 15
3.3 משמעות גאומטרית של עקמומיות 18
3.4 ההתנהגות של עקמומיות תחת איזומטריות 19
3.5 עקמומיות בפרמטריזציה כללית 20
3.6 המעגל המשיק 22

4 עקמומיות וקמירות 25
4.1 מסילות סגורות 25
4.2 המכפלה הווקטורית ב $\mathbb{R}^3$ 29
4.2.1 תכונות המכפלה הוקטורית 30
4.3 עקומות במרחב 30

5 משטחים במרחב 37
5.1 הקדמה 37
5.2 מרחב משיק 37
5.3 דיפרנציאל של העתקה חלקה 37
5.3.1 תכונה בסיסית של דיפרנציאל 38
5.4 אימרסיה 38
5.5 דיפיאומורפיזם 39
5.6 משטח רגולרי עם פרמטריזציה 39
5.7 מרחב משיק 40
5.8 משטח ללא פרמטריזציה 40

6 מטריקה רימנית 42
6.1 הגדרות 42
6.2 מטריקה רימנית על משטח שהיא מושרית ממטריקה אוקלידית 44

7 גיאומטריה של על-משטחים 46
7.1 הגדרה 46
7.2 וקטור נורמל 46
7.3 התבנית היסודית הראשונה והשניה 46
7.4 עקמומיות גאוס 48
7.5 משטח הסיבוב (Surface of revolution) 50
7.6 משמעות גיאומטרית של העתקת Weingarten 52
7.6.1 דיפרנציאל של העתקה בין משטחים 52
7.6.2 העתקת Gauss 53

8 נגזרת קווריאנטית (Covariant derivative) 55
8.1 דיפרנציאל של פונקציה 55
8.2 שדה וקטורי (Vector Field) 55
8.3 נגזרת Lie 56
8.4 נגזרת קווריאנטית 56
8.4.1 תכונה חשובה של נגזרת קווריאנטית 57
8.4.2 דוגמאות 58
8.5 איך הנגזרת הקווריאנטית נראית בפרמטריזציה? 59
8.5.1 חישוב סימני Christoffel 60
8.6 מעבר\הזזה במקביל (Parallel Transport) 64
8.6.1 דוגמה על ספירה 65
8.7 נגזרות קווריאנטיות ומטריקה רימנית 67

9 נגזרת קווריאנטית Levi-Civita 71
9.1 קומוטטור של שדות וקטוריים 71
9.2 נגזרת קווריאנטית סימטרית 72
9.3 משפט Levi-Civita 74

10 עקמומיות של ∇ 77
10.1 הגדרות 77
10.2 משמעות גאומטרית של אופרטור העקמומיות 79
10.3 תכונות אלגבריות של אופרטור עקמומיות 82
10.4 טנזור עקמומיות 84
10.5 שימוש של עקמומיות 90

11 קווים גאודסיים (גאודסיות, Geodesics) וחשבון וריאציות 92
11.1 מבוא 92
11.2 עקמומיות גאודסית 92
11.3 גאודסיות וחשבון וריאציות 95
11.4 חישוב קווים גאודסיים 98
11.5 קווים גאודסיים על משטח סיבוב 99
11.5.1 משפט Clairaut 100

12 שטח ונפח בגיאומטריה רימנית **103**
12.1 מוטיבציה 103
12.2 תבניות דיפרנציאליות 103
12.2.1 תבנית נפח קנונית על מרחב עם מכפלה סקלרית ואוריינטציה 104
12.2.2 תבניות דיפרנציאליות על $U \subseteq \mathbb{R}^n$ 105
12.2.3 אינטגרציה של תבניות 106
12.3 נפח בגיאומטריה רימנית 107
12.4 דוגמאות קונקרטיות 107
12.5 משפט Gauss-Bonnet 108
12.5.1 חזרה לתבניות דיפרציאליות 109
12.5.2 הוכחה של Gauss Bonnet 112
12.5.3 משטח בלי שפה קומפקטית 112

13 תולדות הגאומטריה דיפרנציאלית **113**

II תרגולים **114**

14 תרגול ראשון - 27.10.2014 - מסילות ב $\mathbb{R}^n$ **115**
14.1 מנהלות 115
14.2 תזכורת הגדרות 115
14.3 עקום Peano 115

15 תרגול שני - 10.11.2014 - מסילות במרחב **118**
15.1 בסיס Frenet 118
15.2 משוואות Frenet 118
15.3 נוסחאות ל τ, k 118

16 תרגול שלישי - 17.11.2014 - מרחב משיק, דיפרנציאל ומשטחים ב $\mathbb{R}^n$ **122**
16.1 מרחב משיק 122
16.2 דיפרנציאל 122
16.2.1 תכונות 122
16.3 משטחים ב $\mathbb{R}^n$ 123

17 תרגול רביעי - 24.11.2014 - מטריקה רימנית ועל משטחים **125**
17.1 מטריקה רימנית 125
17.2 מטריקה מושרית 126
17.3 על משטחים 127
17.3.1 התבנית היסודית הII 127
17.4 העתקת Weingarten 128

18 תרגול חמישי - 01.12.2014 - נגזרת קוואריאנטית **130**
18.1 שדות וקטוריים 130
18.1.1 נגזרת Lie של שדה וקטורי 130
18.2 נגזרת קוואריאנטית (Connection) 131
18.2.1 סימני כריסטופל 132
18.2.2 נגזרת קוואריאנטית לאורך מסילה 132

19 תרגול שישי - 08.12.2014 - נגזרת קווריאנטית על משטחים והזזה במקביל 134
19.1 נגזרת קוואריאנטית על משטחים . . . 134
19.2 הזזה במקביל . . . 136

20 תרגול שביעי - 15.12.2014 - משפט Levi-Civita וקומוטטור של שדות וקטוריים 140
20.1 נגזרות Levi-Civita . . . 140
20.1.1 דוגמאות לנגזרות Levi-Civita . . . 140
20.1.2 נוסחה ל $\Gamma_{i,j}^k$ של ∇_{LC} במונחי g . . . 140
20.2 קומוטטור של שדות וקטוריים . . . 142
20.2.1 משמעות גיאומטרית של הקומוטטור . . . 142

21 תרגול שמיני - 22.12.2014 - אופרטור העקמומיות 144
21.1 הגדרה . . . 144
21.2 תכונות . . . 144
21.3 דוגמה . . . 145

22 תרגול תשיעי - 29.12.2014 - עקמומיות חתך 149
22.1 עקמומיות חתך . . . 149

23 תרגול עשירי - 05.01.2015 - גאודזים 153
23.1 הגדרה . . . 153
23.1.1 גאודזיים רימניים . . . 153
23.2 גאודזים על משטח סיבוב . . . 154
23.2.1 אינטגרל Clairaut . . . 154

24 תרגול אחד עשר - 12.01.2015 - נפח רימני 158
24.1 תבנית דיפרנציאלית . . . 158
24.2 תבנית נפח רימנית . . . 158
24.3 משמעות גאומטרית - משפט Pappus . . . 159

חלק I

סיכומי שיעור

פרק 1

מרחב אוקלידי

26/10/

1.1 הגדרות

$x_i \in \mathbb{R}$ כאשר $\mathbb{R}^n,\ x = (x_1, \ldots, x_n)$.
מכפלה סקלרית: $x, y \in \mathbb{R}^n$ מוגדרת בתור:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

אורך:

$$|x| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{\sum x_i^2}$$

מרחק:

$$\operatorname{dist}(x, y) = |x - y|$$

נניח שתי נקודות על הר, מה המסלול הכי קצר?

יש לנו עקומה של לטפס את ההר, או ללכת מסביב. יש לנו עקומה ויצור שחי על העקומה היצור יודע לזחול עם מהירות 1. נוכל להגדיר:

הגדרה 1.1.1 $\rho(x, y)$ - מרחק על γ. זמן הכי קצר להגיע מ x ל y בתנועה במהירות 1.

שאלה: איך היצור שלנו רואה את העולם שלו?

תשובה: כקו ישר.

הוכחה: נגדיר את $\varphi(t)$ פונקצייה מהקטע $[0, L]$ אל המסילה בין הנקודות A, B להיות הנקודות המקיימות: $\rho(A, \varphi(t)) = t$ ■

✎ **תרגיל 1.1.2 :** $\rho(\varphi(t_1), \varphi(t_2)) = |t_1 - t_2|$ (למעשה זו איזומטריה).

דוגמה 1.1.3 : כעת על γ חי יצור שרואה את המישור. היצור יכול להבדיל בין ישר לעקום. מה ההבדל?

שאלה: מה הפורמליזציה המתמטית?

תשובה: עקמומיות (curvature).

1.2 איזומטריות של $\mathbb{R}^n$

הגדרה 1.2.1 איזומטריה: העתקה $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ חח"ע ועל נקראת איזומטריה אם:

$$\forall x,y\in\mathbb{R}^n\quad \mathrm{dist}\left(f\left(x\right),f\left(y\right)\right)=\mathrm{dist}\left(x,y\right)$$

דוגמה 1.2.2 : $A\in O\left(n\right)$ (מטריצה אורתוגונליות) $f\left(x\right)=Ax$ אז:

$$\left(Ax,Ay\right)=\left(x,y\right)\Rightarrow \mathrm{dist}\left(Ax,Ay\right)=\mathrm{dist}\left(x,y\right)$$

דוגמה 1.2.3 : הזזה: $b\in\mathbb{R}^n$, $f\left(x\right)=x+b$.

סימון: $\mathrm{Isom}\left(\mathbb{R}^n\right)$ - חבורה של כל האיזומטריות של $\mathbb{R}^n$.

דוגמה 1.2.4 : $A\in O\left(n\right)$ ו $b\in\mathbb{R}^n$ אז: $f_{A,b}=f\left(x\right)=Ax+b$ איזומטריה.

משפט 1.2.5

כל האיזומטריות של $\mathbb{R}^n$ הן מהצורה $f_{A,b}$.

הוכחה: **מקרה ראשון:** נניח ש $f\left(0\right)=0$. צריך להוכיח שקיימת $A\in O\left(n\right)$ כך ש $f\left(x\right)=Ax$ (כלומר באיזשהו אופן "גאומטריה זוכרת אלגברה").

$$\forall\xi,\eta\in\mathbb{R}^n:\ \left(\xi,\eta\right)=\frac{1}{2}\left(-\left|\xi-\eta\right|^2+\left|\xi\right|^2+\left|\eta\right|^2\right)=\frac{1}{2}\left(-\mathrm{dist}\left(\xi,\eta\right)^2+\mathrm{dist}\left(0,\xi\right)^2+\mathrm{dist}\left(0,\eta\right)^2\right)$$

לכן:

$$\forall\xi,\eta\in\mathbb{R}^n\ \left(f\left(\xi\right),f\left(\eta\right)\right)=\left(\xi,\eta\right)$$

נבחר בסיס אורתונורמלי $e_1,\ldots,e_n$ ל$\mathbb{R}^n$ אז: $f\left(e_1\right),\ldots,f\left(e_n\right)$ גם בסיס אורתונורמלי.

יהי $\xi\in\mathbb{R}^n$ וקטור כלשהו אז:

$$\xi=\sum_i\left(\xi,e_i\right)e_i$$

(נכון לכל ξ ולכל בסיס אורתונורמלי).

לכן לכל וקטור $\xi=\sum\limits_i\lambda_ie_i$ מתקיים:

$$f\left(\xi\right)=\sum_i\lambda f\left(e_i\right)$$

ולכן f לינארית ולכן אורתוגונלית.

מקרה שני: $f\left(0\right)=b$. נגדיר את ההזזה $Tx=x-b$. $\left(T\circ f\right)\left(0\right)=0$ ו $\left(T\circ f\right)$ איזומטריה. לכן מהמקרה הקודם, $\left(T\circ f\right)\left(x\right)=Ax$ עבור $A\in O\left(n\right)$ ולכן: $f\left(x\right)=Ax+b$. ■

פרק 2

עקומות במישור

2.1 הגדרות

הגדרה 2.1.1 עקומה: העתקה חלקה C^∞:

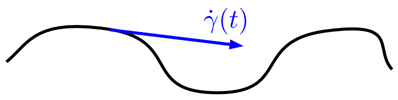
$$\gamma : I \to \mathbb{R}^n$$

כאשר $I = [a,b]$ או (a,b) או $\mathbb{R}$.

נסמן $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$. האינטואיציה שלנו היא γ מייצגת מסלול של חקיק ב $\mathbb{R}^n$, כאשר בזמן t הוא ימצא במיקום $\gamma(t)$.
ניתן להגדיר וקטור משיק לעקומה:

$$\dot{\gamma}(t) = (\dot{\gamma}_1(t), \ldots, \dot{\gamma}_n(t))$$

(כאשר אנו מסמנים $\dot{f} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$).
נהוג לקרוא ל $\dot{\gamma}(t)$ וקטור המהירות.

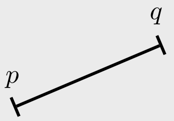


2.2 אורך על עקומה

בהינתן $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ עקומהתת נגדיר את האורך להיות:

$$\mathrm{length}(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)|\,\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{\dot{\gamma}_1(t)^2 + \ldots + \dot{\gamma}_n(t)^2}\,\mathrm{d}t$$

דוגמה 2.2.1 : קטע ב $\mathbb{R}^n$:



העקומה ניתנת להגדרה בתור:

$$\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}^n$$

$$\gamma(t)=p+t(p-q)\Rightarrow\dot{\gamma}(t)=p-q$$

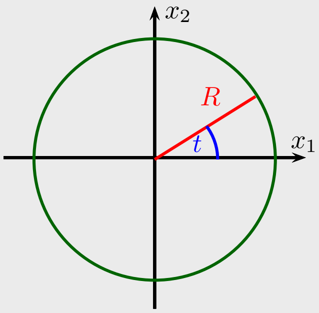
נבחין כי אכן מתקיים:

$$\gamma(0)=p,\quad\gamma(1)=q$$

ונקבל כי האורך הינו:

$$\text{length}(\gamma)=\int_0^1|\dot{\gamma}(t)|\,\mathrm{d}t=\int_0^1|q-p|\,\mathrm{d}t=|q-p|$$

דוגמה 2.2.2 : מעגל ב $\mathbb{R}^2$:



כעת נגדיר את העקומה $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$ באופן הבא:

$$\gamma(t)=(R\cos t,R\sin t)$$

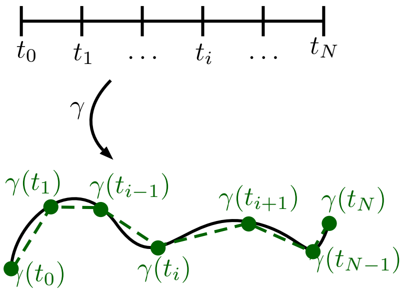
ונקבל כי:

$$\dot{\gamma}(t)=(-R\sin t,R\cos t)\Rightarrow|\dot{\gamma}(t)|=R$$

ולכן:

$$\text{length}(\gamma)=\int_0^{2\pi}R\mathrm{d}t=2\pi R$$

2.2.1 מוטיבציה של הגדרת האורך



נבחין כי אנחנו מקבלים קירוב של γ ע"י קו שבור t_N. נגדיר:

$$L_N=\sum_{i=0}^{N-1}\mathrm{dist}\left(\gamma\left(t_i\right),\gamma\left(t_{i+1}\right)\right)$$

נקבל כי:

$$L_N=\sum_{i=1}^{N-1}\left|\gamma\left(t_{i+1}\right)-\gamma\left(t_i\right)\right|\approx\sum_{i=0}^{N-1}\left|\dot{\gamma}\left(t_i\right)\left(t_{i+1}-t_i\right)\right|=\sum_{i=0}^{N-1}\left|\gamma\left(t_i\right)\right|\Delta t_i\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\int_a^b\left|\dot{\gamma}\left(t\right)\right|\mathrm{d}t$$

2.2.2 אורך נשמר תחת איזומטריות

טענה 2.2.3

נניח ש $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ עקומה חלקה ו $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ איזומטריה.
נגדיר $\alpha\left(t\right)=f\left(\gamma\left(t\right)\right)$ אזי:

$$\mathrm{length}\left(\alpha\right)=\mathrm{length}\left(\gamma\right)$$

הוכחה: $f\left(x\right)=Ax+b$ עבור $A\in O\left(n\right)$ ו $b\in\mathbb{R}^n$. לכן:

$$\begin{aligned}\alpha\left(t\right)&=A\gamma\left(t\right)+b\\ \dot{\alpha}\left(t\right)&=A\dot{\gamma}\left(t\right)\\ \left|\dot{\alpha}\left(t\right)\right|&=\left|A\dot{\gamma}\left(t\right)\right|\underbrace{=}_{A\in O(n)}\left|\dot{\gamma}\left(t\right)\right|\end{aligned}$$

ולכן:

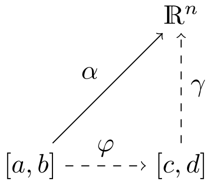
$$\mathrm{length}\left(\alpha\right)=\int_a^b\left|\dot{\alpha}\left(t\right)\right|\mathrm{d}t=\int_a^b\left|\dot{\gamma}\left(t\right)\right|\mathrm{d}t=\mathrm{length}\left(\gamma\right)$$

■

2.3 פרמטריזציה של עקומות

נניח ש $\varphi:[a,b]\to[c,d]$ העתקה חלקה כך ש $\forall t\ \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}>0$ וגם: $\varphi\left(a\right)=c,\varphi\left(b\right)=d$.

הגדרה 2.3.1 עקומה $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ מתקבלת מעקומה $\alpha:[c,d]\to\mathbb{R}^n$ ע"י שינוי פרמטריזציה אם: $\gamma\left(t\right)=\alpha\left(\varphi\left(t\right)\right)$ עבור φ מתאימה.



סימון: $\alpha \sim \gamma$.

תרגיל 2.3.2 :

1. $\sim$ זה יחס שקילות.
2. $\alpha \sim \gamma \Leftarrow \operatorname{length}(\alpha) = \operatorname{length}(\gamma)$.

תרגיל 2.3.3 : נתונה עקומה $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$. נגדיר עקומה חדשה $\overline{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ בתור: $\overline{\gamma}(t) = \gamma(b+a-t)$. צריך להוכיח כי:

$$\operatorname{length}(\overline{\gamma}) = \operatorname{length}(\gamma)$$

הגדרה 2.3.4 מחלקת שקילות של עקומות ביחס ל $\sim$ נקראת **עקומה בלי פרמטריזציה**.

27/10/

טענה 2.3.5

נתון קטע pq. ונתונה $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ עקומה חלקה כך ש $\gamma(a) = p$ ו $\gamma(b) = q$ אז:

$$\operatorname{length}(\gamma) \geq \operatorname{dist}(p,q) = |p-q|$$

הוכחה: בלי הגבלת הכלליות ניתן להניח כי $p = 0$ ו $q = (c, 0, \ldots, 0)$ וכמו כן $[a,b] = [0,1]$. זאת מכיוון שראינו שאיזומטריות אשר יקבעו את p ל0 ויסובבו את q כך שיהיה על x_1 לא משנות את האורך, ושינוי פרמטריזציה גם כן לא משנה את האורך.

כעת:

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$$

$$\operatorname{length}(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{\dot{\gamma}_1(t)^2 + \ldots + \dot{\gamma}_n(t)}\mathrm{d}t \geq \int_0^1 \sqrt{\dot{\gamma}_1(t)}\mathrm{d}t = \int_0^1 |\dot{\gamma}_1(t)| \geq \left| \int_0^1 \dot{\gamma}_1(t) \right| = |\gamma_1(1) - \gamma_1(0)| = c$$

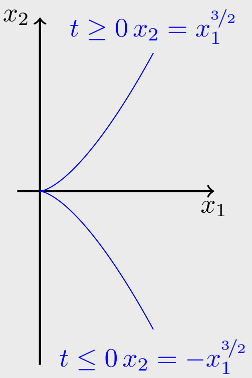
■

אנליזה של שוויון: נניח כי: $\dot{\gamma}_n = \ldots = \dot{\gamma}_2 = 0$ וכי $\dot{\gamma}_1 \geq 0$. אם קיים t^* כך ש $\dot{\gamma}_1(t^*) = 0$ זו גם עקומת minimizer. במקרה כזה, עקומה זו אינה שקולה ל $p + t(p-q)$.

(התאפסות של נגזרת זו תכונה אינווריאנטית לשינוי פרמטריזציה).

הגדרה 2.3.6 עקומה רגולרית: עקומה $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ היא **רגולרית** אם $\forall t\ \dot{\gamma}(t) \neq 0$.

דוגמה 2.3.7 : $\gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to\mathbb{R}^2$ המוגדרת ע"י $\gamma(t)=\left(t^2,t^3\right)$ היא אינה מסילה רגולרית.



הגדרה 2.3.8 פרמטריזציה טבעית: הפרמטריזציה $\gamma(t)$ של עקומה γ נקראת **טבעית** אם $|\dot{\gamma}(t)|=1$ $\forall t$.

טענה 2.3.9

נניח $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ עקומה רגולרית. אזי:

1. קיימת עקומה $\alpha(s)$ עם פרמטריזציה טבעית כך ש $\gamma\sim\alpha$.
2. אם $\alpha_1:[c_1,d_1]\to\mathbb{R}^n$ ו $\alpha_2:[c_2,d_2]\to\mathbb{R}^n$ שתי עקומות כאלה, אזי קיים $u\in\mathbb{R}$ כך ש:

$$\begin{cases}c_2=c_1+u\\ d_2=d_1+u\\ \alpha_1(t)=\alpha_2(t+u)\end{cases}$$

הוכחה:

1. נסמן $L=\text{length}(\gamma)$ ונניח ש $\gamma\sim\alpha$ (פרמטריזציה טבעית). כלומר: $\alpha:[c,d]\to\mathbb{R}^n$ ומתקיים $|\dot{\alpha}|=1$.

$$L=\text{length}(\gamma)=\text{length}(\alpha)=\int_c^d|\dot{\alpha}(t)|\,\text{d}t=\int_c^d 1\text{d}t=d-c\Rightarrow d=c+L$$

נניח ש: $\gamma(t)=\alpha(\varphi(t))$, אז גוזרים:

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}(t)&=\dot{\alpha}(\varphi(t))\,\dot{\varphi}(t)\\|\dot{\gamma}(t)|&=|\dot{\alpha}(\varphi(t))|\,\dot{\varphi}(t)=\dot{\varphi}(t)\end{aligned}$$

קיבלנו מד"ר על φ עם תנאי התחלה $\varphi(a)=c$ אז:

$$\varphi(t)=\varphi(a)+\int_a^t|\dot{\gamma}(\tau)|\,d\tau=c+\text{length}\left(\gamma\mid_{[a,b]}\right)$$

לסיום ההוכחה נגדיר:

$$\varphi(t)=c+\int_a^t|\dot{\gamma}(\tau)|\,d\tau$$

ונבדוק ש:

$$\alpha(s):=\gamma\left(\varphi^{-1}(s)\right)$$

עקומה עם פרמטריזציה טבעית.

2. נניח ש $\alpha_1(s), \alpha_2(s)$ שתי פרמטריזציות טבעיות של γ. לכן מתקיים: $\gamma \sim \alpha_1$ ו $\gamma \sim \alpha_2$ ולכן $\alpha_2 \sim \alpha_1$. לכן קיימת $\psi(s)$ כך ש: $\alpha_1(s) = \alpha_2(\psi(s))$

$$\underbrace{\left|\dot{\alpha_1}(s)\right|}_{1} = \left|\dot{\alpha}_2(\psi(s))\right| \dot{\psi}(s) \Rightarrow \dot{\psi}(s) = 1 \Rightarrow \psi(s) = s + u$$

■

הערה 2.3.10 אם $\gamma_2 \sim \gamma_1$ ל γ_1 וγ_2 יש אותה פרמטריזציה טבעית.

02/11/

פרק 3

אוריינטציה של מרחב לינארי

3.1 הגדרות

נניח שאנחנו עובדים ב $\mathbb{R}^n$

הגדרה 3.1.1 בסיסים שקולים: נאמר כי שני בסיסים של $\mathbb{R}^n$ הם **<u>שקולים</u>** אם למטריצת המעבר בינהם יש דטרמיננטה חיובית.

נבחין כי ההגדרה הזו טובה, מכיוון שאם למטריצה יש דטרמיננטה חיובית, גם להופכית יש דטרמיננטה חיובית.

✎ **תרגיל 3.1.2 :**

1. בדקו שזהו יחס שקילות.
2. בדקו כי ישנן 2 מחלקות שקילות.

מהי אוריינטציה? כאשר אנחנו מסתכלים במראה, הדמות עוברת שיקוף. בעצם בחיי היומיום, אוריינטציה היא החלטת הכיוונים של ימין ושמאל. אם אנחנו עומדים מול מראה, האוריינצטיה מתהפכת. ובהגדרה פורמלית:

הגדרה 3.1.3 אוריינטציה: אוריינטציה של $\mathbb{R}^n$ היא בחירה של מחלקת שקילות (ביחס ליחס השקילות הנ"ל).

הגדרה 3.1.4 אוריינטציה חיובית: **<u>האוריינטציה החיובית</u>** של $\mathbb{R}^n$ היא זו הנקבעת ע"י הבסיס הסטנדרטי בסדר הסטנדרטי: $(e_1, \ldots, e_n)$ כאשר : $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ (1 במקום ה i בלבד).

הערה 3.1.5 יש חשיבות לסדר! שינוי סדר של הבסיס יכול לשנות את הסימן של מטריצת המעבר.

הגדרה 3.1.6 בסיס חיובי: בסיס חיובי של $\mathbb{R}^n$ הוא כל בסיס המייצג את האוריינטציה החיובית.
במפורש, בסיס $(v_1, \ldots, v_n)$ הוא חיובי אם"ם:

$$\det\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \ldots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} > 0$$

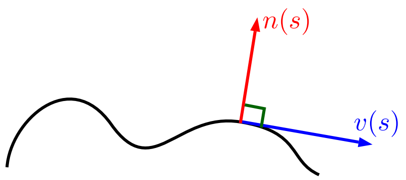
3.2 עקומים במישור, עקמומיות ומשוואות Frenet

$\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ עקומה רגולרית. נניח כי γ בפרמטיזציה הטבעית. ונסמן:

$$\begin{aligned} v(s) &= \dot{\gamma}(s) \\ |v(s)| &\equiv 1 \end{aligned}$$

הגדרה 3.2.1 הוקטור הנורמל: הוקטור הנורמל של γ מוגדר ע"י:

1. $|n(s)| = 1$
2. $v(s) \perp n(s)$
3. $(v(s), n(s))$ הם בסיס חיובי.



טענה 3.2.2 נוסחה למציאת $n(s)$

אם נרשום:

$$v(s) = (v_1(s), v_2(s))$$

אז:

$$n(s) = (-v_2(s), v_1(s))$$

הוכחה:

.1

$$|n|^2 = v_2^2 + v_1^2 = |v|^2 = 1$$

.2

$$(v, n) = -v_1 v_2 + v_2 v_1 = 0 \Rightarrow n \perp v$$

.3

$$\det(v, n) = \det \begin{pmatrix} v_1 & -v_2 \\ v_2 & v_1 \end{pmatrix} = v_1^2 + v_2^2 = 1 > 0$$

■

טענה 3.2.3

לכל s:

$$\dot{v}(s) \perp v(s)$$

הוכחה: אנו יודעים כי:

$$(v(s), v(s)) \equiv 1$$

נגזור (מכלל לייבניץ):

$$2\left(\dot{v}\left(s\right),v\left(s\right)\right)=0$$

ולכן:

$$\dot{v}\left(s\right)\perp v\left(s\right)$$

■

מסקנה 3.2.4

קיימת פונקציה סקלרית חלקה $k\left(s\right)$ כך שמתקיים ש:

$$\dot{v}\left(s\right)=k\left(s\right)n\left(s\right)\ \forall s$$

הערה 3.2.5 אנחנו מניחים שהמסילה חלקה, ולכן v חלקה ולכן גם הנגזרת שלה. ומכיוון שאז $n\left(s\right)$ חלקה (ולא מתאפסת) אנחנו מקבלים ש $k\left(s\right)$ חלקה.

הגדרה 3.2.6 עקמומיות: $k\left(s\right)$ נקראת העקמומיות של γ ב S.

הערה 3.2.7 לפעמים מסמנים עקמומיות ב κ במקום ב k.

טענה 3.2.8

$$k\left(s\right)=\det\left(v\left(s\right),\dot{v}\left(s\right)\right)$$

הוכחה:

$$\det\left(v\left(s\right),\dot{v}\left(s\right)\right)=\det\left(v\left(s\right),k\left(s\right)n\left(s\right)\right)=k\left(s\right)\underbrace{\det\left(v\left(s\right),n\left(s\right)\right)}_{=1}=k\left(s\right)$$

■

טענה 3.2.9

$$\dot{n}\left(s\right)=-k\left(s\right)\cdot v\left(s\right)$$

הוכחה: נשים לב שעל פי הגדרה:

$$\left|n\left(s\right)\right|=1$$

ולכן כמו שעשינו קודם:

$$\left(n\left(s\right),n\left(s\right)\right)\equiv1\Rightarrow\dot{n}\left(s\right)\perp n\left(s\right)$$

ולכן יש איזשהי פונקציה $\alpha\left(s\right)$ כך ש:

$$\dot{n}\left(s\right)=\alpha\left(s\right)v\left(s\right)$$

אבל או יודעים כי:

$$\left(v\left(s\right),n\left(s\right)\right)\equiv0$$

הרי הם מאונכים לפי הגדרה. נגזור ונקבל:

$$0=\left(\dot{v}\left(s\right),n\left(s\right)\right)+\left(v\left(s\right),\dot{n}\left(s\right)\right)=\left(kn,n\right)+v\left(\alpha v\right)=k\underbrace{\left(n,n\right)}_{1}+\alpha\underbrace{\left(v,v\right)}_{1}\Rightarrow\alpha=-k$$

■

סיכום ביניים: קיבלנו כי:

$$\begin{cases} \dot{v}(s) = k(n)\,n(s) \\ \dot{n}(s) = -k(s)\,v(s) \end{cases}$$

משוואות אלה נקראות משוואות Frenet.

הערה 3.2.10 עבור γ עם פרמטריזציה רגולרית כללית (לאו דווקא טבעית), העקמומיות $k(t)$ מוגדרת להיות העקמומיות של הפרמטריזציה הטבעית של γ בנקודה המתאימה.

דוגמה 3.2.11 : קו ישר:

$$\gamma(s) = a + sb$$

כאשר $a, b \in \mathbb{R}^2$ ובשביל פרמטריזציה טבעית: $|b| = 1$. בשביל שיהיה צדק בעולם, אנחנו מקווים שהעקמומיות תהיה אפס. נבחין כי:

$$v = \dot{\gamma} \equiv b$$

וכעת:

$$\dot{v} = 0 \Rightarrow k(s) = 0$$

דוגמה 3.2.12 : מגעל ברדיוס R:

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi R] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \gamma(s) &= \left(R\cos\left(\frac{s}{R}\right), R\sin\left(\frac{s}{R}\right)\right) \end{aligned}$$

אנחנו מצפים שהעקמומיות תהיה איזה פונקצייה יורדת של R, למעשה אנחנו נקבל שהיא $k(s) = \frac{1}{R}$. נבחין כי:

$$\begin{aligned} v(s) &= \dot{\gamma}(s) = \left(-\sin\left(\frac{s}{R}\right), \cos\left(\frac{s}{R}\right)\right) \\ n(s) &= \left(-\cos\left(\frac{s}{R}\right), -\sin\left(\frac{s}{R}\right)\right) \\ \dot{v}(s) &= \left(-\frac{1}{R}\cos\left(\frac{s}{R}\right), -\frac{1}{R}\sin\left(\frac{s}{R}\right)\right) = \frac{1}{R}n(S) \end{aligned}$$

כלומר:

$$k(s) \equiv \frac{1}{R}$$

הערה 3.2.13 נבחין כי מדובר במעגל חיובי, כיוון המעגל חשוב ומשפיע על סימן העקמומיות (כפי שנראה בהמשך עם היפוך אוריינטציה).

3.3 משמעות גאומטרית של עקמומיות

נחזור למקרה של $\gamma(s)$ בפרמטריזציה טבעית. ונסמן $\dot{\gamma}(s) = v(s)$. וכמו כן, נסמן את הזווית $\varphi(s)$ הזווית בין $v(s)$ לבין הציר x_1 (ציר x אם אנחנו מדברים במישור xy).

טענה 3.3.1

$$\varphi'(s) = k(s)$$

הוכחה: נסמן $v=(v_1,v_2)$ ואז: $\varphi=\arctan\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$ (יש כאן קצת בעיה, $v_1=0$ עושה צרות, אבל נבחין כי אנחנו יכולים לבחור כל ציר שנרצה ולא רק x_1 שבו זה לא מתאפס נקודתית, וזה רק ישנה את φ בקבוע, בכל מקרה הנגזרת תהא זהה ומוגדרת היטב).
נגזור ונקבל:

$$\varphi'(s)=\frac{1}{1+\left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2}\cdot\frac{\dot{v_2}v_1-\dot{v_1}v_2}{v_1^2}=\frac{\det(v,\dot{v})}{\underbrace{v_1^2+v_2^2}_{=1}}=k(s)$$

■

תרגיל 3.3.2 : נניח ש: $\gamma:[0,L]\to\mathbb{R}^2$ מסילה רגולרית. ונתבונן במסילה ההפוכה: $\overline{\gamma}:[0,L]\to\mathbb{R}^2$, $\overline{\gamma}(t)=\gamma(L-t)$. מה הקשר בין העקמומיות של $\overline{\gamma}$ לזו של γ?
(הסימן מתהפך).

3.4 ההתנהגות של עקמומיות תחת איזומטריות

$\gamma:[0,L]\to\mathbb{R}^2$ בפרמטריזציה טבעית. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x)=Ax+b$, $A\in O(n)$.
נגדיר

$$\alpha(s)=f(\gamma(s))=A\gamma(s)+b$$

מה הקשר בין k_α לבין k_γ?
ראשית, נחשבת את ווקטור המהירות של α:

$$v_\alpha(s)=\dot{\alpha}(s)=A\dot{\gamma}(s)=Av_\gamma(s)$$

טענה 3.4.1

$$n_\alpha(s)=(\det A)\,An_\gamma(s)$$

הוכחה: נסמן: $N(s)=(\det A)\,An_\gamma(s)$. נבחין שהוא מקיים את התכונות של נורמל:

$$|N(s)|=|n_\gamma(s)|=1$$

(מכיוון ש A אורתוגונלית, אז הדטרמיננטה בערך מוחלט היא 1).
כעת נבחין כי:

$$(N(s),v_\alpha(s))=(\det A)(An_\gamma(s),Av_\gamma(s))=(\det A)\underbrace{(n_\gamma(s),v_\gamma(s))}_{0}=0$$

כמו כן

$$\det(v_\alpha(s),N(s))=(\det A)\cdot\det(Av_\gamma(s),An_\gamma(s))$$

ומהתרגיל מתחת:

$$=(\det A)^2\det(v_\gamma(s),n_\gamma(s))>0$$

ולבסוף:

$$\dot{v}_\alpha(s)=A\dot{v}_\gamma(s)=A(k_\gamma(s)n_\gamma(s))=[\det A\cdot k_\gamma(s)]\,n_\alpha(s)$$

■

תרגיל 3.4.2 : לכל $u_1,\dots,u_n\in\mathbb{R}^n$ ומטריצה P שהיא $n\times n$ מתקיים:

$$\det\left(Pu_1,\dots,Pu_n\right)=\det P\cdot\det\left(u_1,\dots,u_n\right)$$

מסקנה 3.4.3

$$k_\alpha\left(s\right)=\left(\det A\right)k_\gamma\left(s\right)$$

3.5 עקמומיות בפרמטריזציה כללית

טענה 3.5.1

$c:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ מסילה רגולרית. $k\left(t\right)$ - העקמומיות של c בזמן t אז:

$$k\left(t\right)=\frac{c_1'\left(t\right)c_2''\left(t\right)-c_2'\left(t\right)c_1''\left(t\right)}{\left[c_1'\left(t\right)^2+c_2'\left(t\right)^2\right]^{3/2}}=\frac{\det\left(c',c''\right)}{\left|c'\right|^3}$$

הוכחה: נניח $\alpha\left(s\right)$ פרמטריזציה טבעית של c, דהיינו: $c\left(t\right)=\alpha\left(s\left(t\right)\right)$ כאשר $s\left(t\right)$ הפרמטריזציה הטבעית.

$$s\left(t\right)=\int_0^t\left|c'\left(t\right)\right|\mathrm{d}t+\mathrm{const}$$

ולכן:

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\left|c'\left(t\right)\right|$$

כעת, לפי ההגדרה:

$$k\left(t\right)=\det\left(\dot\alpha\left(s\left(t\right)\right),\ddot\alpha\left(s\left(t\right)\right)\right)$$

כעת נגזור את $c\left(t\right)=\alpha\left(s\left(t\right)\right)$ ונקבל:

$$c'\left(t\right)=\dot\alpha\left(s\left(t\right)\right)\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\dot\alpha\left(s\left(t\right)\right)\left|c'\left(t\right)\right|$$

נגזור בשנית ונקבל:

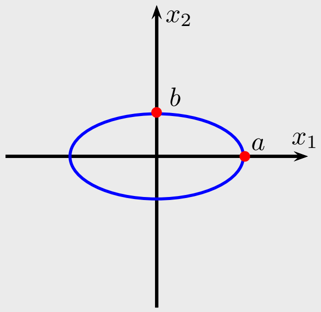
$$c''\left(t\right)=\ddot\alpha\left(s\left(t\right)\right)\left|c'\left(t\right)\right|^2+\dot\alpha\left(s\left(t\right)\right)\cdot\left(\star\right)$$

לכן:

$$\det\left(c',c''\right)=\det\left(\dot\alpha\cdot\left|c'\right|,\ddot\alpha\left|c'\right|^2+\dot\alpha\cdot\left(\star\right)\right)=\left|c'\right|^3\det\left(\dot\alpha,\ddot\alpha\right)+\left|c'\right|\cdot\left(\star\right)\underbrace{\det\left(\dot\alpha,\dot\alpha\right)}_{0}=\left|c'\right|^3\cdot k\left(t\right)$$

כלומר, מה שרצינו. ■

דוגמה 3.5.2 : אליפסה:



$$\left\{\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=1\right\}$$

נקח פרמטרזיציה לא טבעית אבל כן רגולרית:

$$\begin{aligned} f:[0,2\pi] &\to \mathbb{R}^2 \\ f(t) &= (a\cos t, b\sin t) \end{aligned}$$

נבחין כי:

$$\begin{aligned} f'(t) &= (-a\sin t, b\cos t) \\ f''(t) &= (-a\cos t, -b\sin t) \end{aligned}$$

נקבל כי:

$$f_1'f_2''-f_2'f_1''=ab\sin^2 t+ab\cos^2 t=ab$$

וגם:

$$|f'|=\sqrt{a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t}$$

לכן:

$$k(t)=\frac{ab}{\left[a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t\right]^{3/2}}$$

דוגמה 3.5.3 : גרף: $c(t)=(t,f(t))$. נניח שמתקיים $f'(0)=0$, ונחשב את העקמומיות ב 0. נבחין כי:

$$\begin{aligned} c'(t) &= (1,f'(t)) \\ c''(t) &= (0,f''(t)) \\ &\Downarrow \\ \det(c',c'') &= f''(t) \\ |c'(t)| &= \sqrt{1+f'(t)^2} \end{aligned}$$

ולכן:

$$k(0)=\frac{f''(0)}{\sqrt{1+0}}=f''(0)$$

כלומר:

$$k(0)=f''(0)$$

בפרט, f קמורה ~ $k>0$.
f קעורה ~ $k<0$.
נקודת פיתול ~ $k=0$.

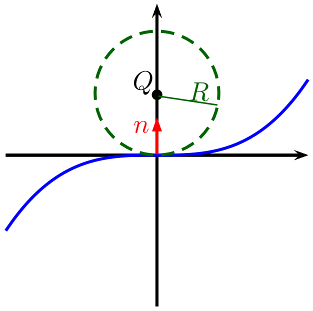
הערה 3.5.4 נשים לב שזה לא לגמרי מדוייק, נגיד פונקיות קמורות, לדוגמה $f(x)=x^4$ שבהן הנגזרת השנייה מתאפסת. לכן ההתעסקות עם 0 היא בעייתית.

הערה 3.5.5 מקומית, כל מסילה היא מהצורה הנ"ל (גרף) עד כדי שקילות והפעלת איזומטריה.

3.6 המעגל המשיק

הערה 3.6.1 זה לא בהכרח השם הכי מתאים, בוויקיפדיה באמת קוראים לזה המעגל הנושק. ובאנגלית קוראים לזה: Osculating circle.

הגדרה 3.6.2 מעגל משיק: נניח $\gamma(t)$ מסילה רגולרית, ונניח: $k(0)\neq 0$. המעגל המשיק ל γ (ב $t=0$) מרכזו: $Q=\gamma(0)+\frac{1}{k(0)}n(0)$ ורדיוסו: $R=\left|\frac{1}{k(0)}\right|$.



משמעות: המעגל היחיד המקרב את המסילה עד כדי סדר שני.

דוגמה 3.6.3 : נניח $x_2 = f\left(x_1\right)$ והמסילה: $c\left(t\right) = \left(t, f\left(t\right)\right)$ כאשר $f'\left(0\right) = 0$ ונניח גם כי: $k\left(0\right) = f''\left(0\right) > 0$ ואז נקבל כי:

$$R = \frac{1}{k\left(0\right)} = \frac{1}{f''\left(0\right)}$$

כעת נרשום את משוואת המעגל המשיק:

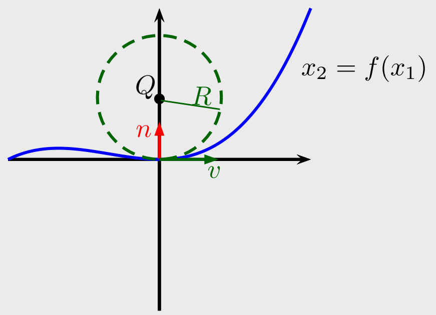
$$x_1^2 + \left(x_2 - R\right)^2 = R^2$$

ולכן, סביב $\left(0,0\right)$ אפשר לבטא את זה:

$$x_2 = g\left(x_1\right) = R - \sqrt{R^2 - x_1^2}$$

03/11/

דוגמה 3.6.4 : נתבונן שוב במקרה של גרף של פונקציה f.



$$\begin{aligned}\gamma(t) &= (t, f(t)) \\ f'(0) &= 0 \quad f(0) = 0 \\ f''(0) &= k(0) > 0\end{aligned}$$

אנו נקבל כי:

$$R = \frac{1}{k(0)} \qquad Q = (0, R)$$

המעגל המשיק ב 0 הוא מעגל סביב Q ברדיוס.
נבחר פרמטריזציה למעגל (ליד 0) בתור גרף: $c(t) = (t, g(t))$ כך ש:

$$\begin{aligned}g(0) &= 0 \\ g'(0) &= 0 \\ g''(0) &= k_c(0) = \frac{1}{R}\end{aligned}$$

ולכן:

$$\begin{cases} g(0) = f(0) \\ g'(0) = f'(0) \\ g''(0) = f''(0) \end{cases}$$

ולכן:

$$f(t) - g(t) = O\left(t^3\right)$$

בניסוח אחר:

$$\frac{f(t) - g(t)}{t^2} \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$$

(זה ניסוח של o ולא O, שזה קצת יותר חלש).
כלומר, אנו רואים כי המעגל המשיק מקרב את הפונקציה עד כדי סדר שני סביב 0.

הנ"ל נכון גם באופן כללית המרחק מהמיקום על המסילה לאחר זמן t יהיה $O\left(t^3\right)$ מהנקודה על המעגל המשיק.

פרק 4

עקמומיות וקמירות

4.1 מסילות סגורות

אינטואיטיבית, מסילה סגורה היא מסילה שנסגרת, כלומר ששתי הקצוות שלה הן באותה נקודה.

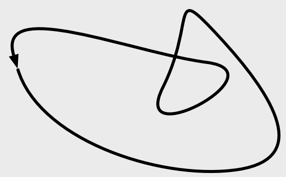
הגדרה 4.1.1 מסילה סגורה: מסילה סגורה היא העתקה חלקה $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ עם מחזור $T > 0$, דהיינו: $\gamma(t+T) = \gamma(t)$.

לרוב נבחר מחזור מינימלי $T > 0$ ונתבונן ב $\gamma|_{[0,T]} : [0,T] \to \mathbb{R}^2$. מדוע יש מחזור מינימלי?

תרגיל 4.1.2 : אם אין מחזור מינימלי, המסילה γ קבועה.

מכיוון שאנחנו נדבר על מסילות רגולריות, מסילה קבועה לא אפשרית, ולכן אם המסילה היא גרולרית וחלקה, קיים מחזור מינימלי.

דוגמה 4.1.3 : $\gamma(t)$ בקטע $[0,T]$:



הגדרה 4.1.4 מסילה פשוטה: מסילה סגורה נקראת פשוטה אם $\gamma|_{[0,T)}$ חח"ע.
(כלומר אין נקודת חיתוך עצמית פרט ל $\gamma(0) = \gamma(T)$).

נניח בנוסף כי $\gamma : [0,L] \to \mathbb{R}^2$ מסילה סגורה בפרמטריציה טבעית (אז $L = \text{length}(\gamma)$).

טענה 4.1.5

קיימת בחירה רציפה של זווית $\varphi(s)$ בין $v(s) = \dot{\gamma}(s)$ לבין ציר x_1.
כלומר, קיימת $\varphi : [0,L] \to \mathbb{R}$ רציפה כך שלכל s:

$$v(s) = (\cos\varphi(s), \sin\varphi(s))$$

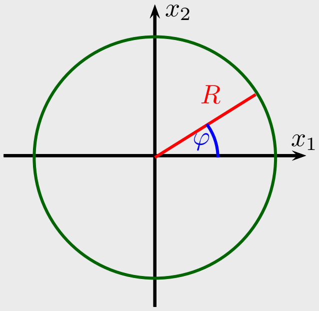
הערה 4.1.6 לא נוכיח את הטענה, הוכחה בספר של פרבר.

נבחין כי:

$$\varphi(L) - \varphi(0) = 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}$$

מכיון ש: $v(0)=v(L)$.

דוגמה 4.1.7 :



$\gamma(s)=\left(R\cos\frac{s}{R},R\sin\frac{s}{R}\right)$ כאשר $s\in[0,2\pi R]$. נקבל כי:

$$v(s)=\left(-\sin\frac{s}{R},\cos\frac{s}{R}\right)=\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{s}{R}\right),\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{s}{R}\right)\right)$$

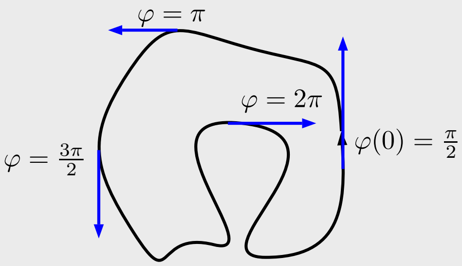
לכן:

$$\varphi(s)=\frac{\pi}{2}+\frac{s}{R}$$

כאן:

$$\varphi(2\pi R)-\varphi(0)=2\pi$$

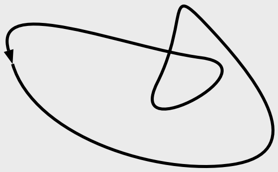
דוגמה 4.1.8 :



משפט 4.1.9 Hopf

לכל מסילה סגורה ופשוטה: $\varphi(L)-\varphi(0)=\pm2\pi$.

הערה 4.1.10 זה לא נכון למסלות לא פשוטות למשל:



נקבל כי:

$$\varphi(L)-\varphi(0)=4R$$

הוכחה: לא ניתן הוכחה מלאה, כי יש כמה דברים לא טריוויאלים בהוכחה.

נניח ש $\gamma_\tau:[0,L]\to\mathbb{R}^2$ כאשר: $\tau\in[0,1]$ משפחה רציפה של מסילות סגורות ופשוטות המקיימת: $\gamma_0=\gamma$ ("דפורמציה רציפה של γ דרך מסילות פשוטות וסגורות").

הערה 4.1.11 הכוונה במשפחה רציפה היא שהפונקציה בין $(\tau,s)\mapsto\gamma_\tau(s)$ היא פונקציה רציפה בשני משתנים.

תהי φ_τ פונקציית הזווית הרציפה של γ_τ, אז לכל τ:

$$\varphi_\tau(L)-\varphi_\tau(0)=2\pi m(\tau)$$

עם $m(\tau)\in\mathbb{Z}$. הפונקציה $\tau\mapsto m(\tau)$ רציפה ומקבלת ערכים שלמים, ולכן קבועה. לכן: $\varphi_0(L)-\varphi_0(0)=\varphi_1(L)-\varphi_1(0)$.

כלומר, φ לא משתנה תחת דפורמציה רציפה של מסילות.

"עובדה" (ללא הוכחה כאן): לכל מסילה פשוטה וסגורה γ יש משפחה γ_τ כנ"ל כך ש γ_1 היא מעגל. ולכן:

$$\varphi_0(L)-\varphi_0(0)=\varphi_1(L)-\varphi_1(0)=\pm2\pi R$$

■

משפט 4.1.12 ז'ורדן (Jordan)

תהי γ היא מסילה פשוטה סגורה. ונסמן: $\Gamma=\mathrm{Image}(\gamma)$. אז: $\mathbb{R}^2\backslash\Gamma=U_0\coprod U_1$ (הסימון $\coprod$ אומר איחוד זר) כאשר U_0,U_1 פתוחות זרות וקשירות. U_0 חסומה ו U_1 לא חסומה.

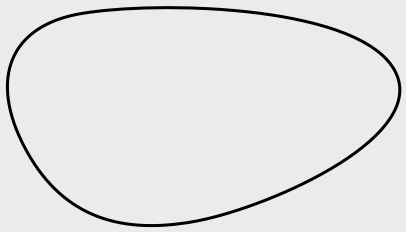
U_0 נקרת התחום החסום ע"י γ.

לא נוכיח את משפט ז'ורדן אלא נקח אותו כעובדה (למעשה לקח מאות שנים להוכיח את המשפט, היו הרבה הוכחות בדרך אבל כולן היו שגויות).

הגדרה 4.1.13 $U\subset\mathbb{R}^2$ נקראת קומרה אם לכל $A,B\in U$ מתקיים:

$$\{\lambda A+(1-\lambda)B:\ \lambda\in[0,1]\}=[A,B]\subset U$$

דוגמה 4.1.14 : גוף קמור:



גוף לא קמור:

משפט 4.1.15

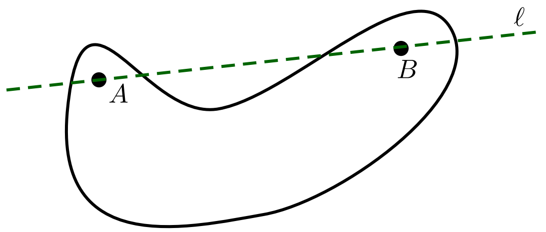
γ מסילה פשוטה ורגולרית החוסמת תחום $U\subseteq\mathbb{R}^2$ (דהיינו U התחום החסום ע"י γ). נניח כי $k\left(s\right)\neq0$ לכל s אז U קמור.

הוכחה: נניח בה"כ $k\left(s\right)>0$ לכל s (אם $k\left(s\right)<0$, נעבור למסילה ההפוכה, התחום שחסום יהיה אותו תחום, ומכיוון ש k חלקה ובפרט רציפה ולא עוברת ב 0 אז היא לא משנה סימן) . תהי $\varphi\left(s\right)$ הזווית הרציפה של γ. בה"כ $\varphi\left(0\right)=0$. אז: $\varphi'\left(s\right)=k\left(s\right)>0$ גורר φ עולה ממש. וממשפט Hopf:

$$\varphi\left(L\right)-\varphi\left(0\right)=+2\pi$$

לכן: $\varphi:\left[0:L\right]\rightarrow\left[0,2\pi\right]$ עולה ממש, חח"ע ועל.

נניח בשלילה כי U לא קמורה:



יהי ℓ הישר העובר דרך הנקודות A,B אז: $\left|\ell\cap\Gamma\right|\geq4$ (מספר האיברים בקבוצה).

נרשום:

$$\ell = \{(x,y) = ax+by+c=0\}$$

ונגדיר פונקציה:

$$f(s) = a\gamma_1(s) + b\gamma_2(s) + c$$

לf יש (לפחות) 4 אפסים ב $[0,L]$ ולכן ל $\dot{f}$ יש (לפחות) 3 אפסים ב $[0,L]$ (משפט פרמה מאינפי 1). לכן:

$$\begin{aligned} f'(s) &= a\dot{\gamma}_1(s) + b\dot{\gamma}_2(s) = 0 \\ &= ((a,b), \dot{\gamma}(s)) = 0 \end{aligned}$$

כלומר, מצאנו 3 נקודות בהן $\dot{\gamma}(s) \| \ell$. ולכן יש 2 נקודות מבין ה3 האלו בהן $\varphi(s_1) = \varphi(s_2)$ וזו סתירה לכך ש φ חח"ע. ■

תרגיל 4.1.16 : תהי $\gamma : [0,L] \to \mathbb{R}^2$ בעלת עקמומיות קבועה: $k(s) = c > 0$. הוכיחו כי γ היא חלק ממעגל ברדיוס $R = \frac{1}{c}$.

פתרון: נניח ש γ בפרמטריזציה טבעית. נסמן:

$$Q(s) = \gamma(s) + \frac{1}{k(s)} n(s) = \gamma(s) + \frac{1}{c} n(s)$$

נגזור:

$$Q'(s) = v(s) + \frac{1}{c}\left[-c \cdot v(s)\right] = 0$$

ולכן: $Q(s) \equiv Q \in \mathbb{R}^2$ כלומר, זוהי פונקציה קבועה והמרכזים של המעגילים המשיקים נשארים במקום. נבחין כי:

$$\begin{aligned} \gamma(s) - Q &= -\frac{1}{c} n(s) = Rn(s) \\ |\gamma(s) - Q| &= R \end{aligned}$$

לכן: γ נמצאת על המעגל ברדיוס R סביב Q.

4.2 המכפלה הווקטורית ב $\mathbb{R}^3$

נראה שלוש הגדרות שקולות למכפלה הוקטורית: $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ונסמנה: $x,y \mapsto [x,y]$ (יש מקומות שמסמנים $(x \times y)$).

הגדרה 4.2.1 הגדרה ראשונה: אם $x \| y$ אז $[x,y] = 0$. אחרת: $[x,y] \in \mathbb{R}^3$ מוגדרת ביחידות ע"י:

$$\begin{aligned} [x,y] &\perp x,y \\ |[x,y]| &= |x|\,|y| \sin\alpha \end{aligned}$$

כאשר $\alpha \in [0,\pi]$ היא הזווית הקטנה מבין הוקטורים.
ולבסוף: $(x,y,[x,y])$ הם בסיס חיובי ל $\mathbb{R}^3$.

הגדרה 4.2.2 הגדרה שניה: $[x,y]$ הוא הוקטור היחיד ב $\mathbb{R}^3$ המקיים:

$$\forall z \in \mathbb{R}^3 \;\; \det(x,y,z) = ([x,y], z)$$

הערה 4.2.3 הוקטור $[x,y]$ קיים ויחיד ממשפט ההצגה של ריס (Riesz representation theorem) האומר כי כל פונקציונל לינארי מתקבל ביחידות ממכפלה פנימית עם וקטור כלשהו, במקרה שלנו הפונקיצונל על $\mathbb{R}^3$ הוא: $z \mapsto \det(x,y,z)$.

הגדרה 4.2.4 הגדרה שלישית: נסמן (e_1,e_2,e_3) הבסיס הסטנדרטי ל $\mathbb{R}^3$ אז:

$$[x,y] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = e_1 \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} - e_2 \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix} + e_3 \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix}$$

הערה 4.2.5 נשים לב שזה קצת מוזר, כי e_1,e_2,e_3 הם למעשה וקטורים, לכן הפיתוח בהמשך מסביר יותר את הכוונה.

✎ **תרגיל 4.2.6 :** בדקו את השקילות של שלושת ההגדרות.

רמז: השקילות בין 2 ל 3 היא די קלה, מכיוון ש כל וקטור ובפרט $[x,y]$ ניתן לייצוג:

$$[x,y] = ([x,y],e_1)\,e_1 + ([x,y],e_2)\,e_2 + ([x,y],e_3)\,e_3$$

מהגדרה 2:

$$([x,y],e_1) = \det(x,y,e_1) = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

וכן הלאה.

4.2.1 תכונות המכפלה הוקטורית

1. $[x,y]$ לינארית ב x,y.
2. $[x,y] = [-y,x]$.

✎ **תרגיל 4.2.7 :** תכונה שלישית (triple product):

$$([x,y],z) = ([z,x],y) = ([y,z],x)$$

התרגיל הבא עוזר להוכיח למה ההגדרה הראשונה שקולה להגדרה השניה:

✎ **תרגיל 4.2.8 :** (זהות לגראנז')
עבור ההגדרה השניה של $[\cdot,\cdot]$:

$$([a,b],[c,d]) = \det\begin{pmatrix} (a,c) & (b,c) \\ (a,d) & (b,d) \end{pmatrix}$$

09/11/

4.3 עקומות במרחב

עד כה דיברנו על עקומות ב $\mathbb{R}^2$ כעת נעבור לדבר על המרחב התלת מימדי.
$f:[0,L]\to\mathbb{R}^3$ עקומה עם פרמטריזציה טבעית. $v(s)=\dot{f}(s)$. $(v(s),v(s))=1\ \forall s$. נגזור לפי s ונקבל:

$$2(\dot{v}(s),v(s)) = 0$$

$$\dot{v}(s)\perp v(s)$$

הגדרה 4.3.1 פונקציה $k(s) = |\dot{v}(s)|$ נקראת עקמומיות (בלי סימן) של עקומה f בנקודה s.

הגדרה 4.3.2 נניח כי $k(s) > 0$ לכל s. ונגדיר $n(s) = \frac{\dot{v}(s)}{|\dot{v}(s)|}$, זהו הנורמל לעקומה f.

אבל נבחין שאנחנו נמצאים ב $\mathbb{R}^3$ לכן אנחנו יכולים למצוא יותר מוקטור נורמל אחד, אבל בכל זאת הוקטור $n(s)$ מוגדר היטב, בגלל שהוא מקבל את הכיוון של $\dot{v}(s)$.

כמו כן, קיים וקטור $b(s)$ יחיד כך ש $|b| = 1$ ומתקיים: $b \perp v, b \perp n$ ומתקיים ש:

$$\det\begin{pmatrix} | & | & | \\ v & n & b \\ | & | & | \end{pmatrix} > 0$$

נסמן:

$$b = v \times n = [v, n]$$

(כאשר מדובר על מכפלה פנימית. הסימון השני, שהשתמשנו בו גם בשיעור הקודם, הוא הפחות סטנדרטי, אבל עדיין נשתמש בו).

משפט 4.3.3 Fernet

נניח כי $k(s) > 0$. קיימת ביחידות פונקציה $\tau(s)$ (הנקראת פיתול - *torsion*) כך ש:

$$\begin{cases} \dot{v} = kn \\ \dot{n} = -kv - \tau b \\ \dot{b} = \tau n \end{cases}$$

הערה 4.3.4 יש ספרים שבמקום τ משתמשים ב $-\tau$ (עניין של סימן).

כדי להוכיח את המשפט אנחנו צריכים טענת עזר שהיא מעניינת מעצמה:

למה 4.3.5

נניח ש $A(s)$ היא משפחה של מטריצות אורתוגונליות. אז:

$$B(s) := \dot{A}(s) A^{-1}(s)$$

היא מטריצה אנטי־סימטרית (דהיינו: $B^T = -B$).

נוכיח את הטענת עזר: **הוכחה:** $A(s)$ אורתוגונלית אס"ם מתקיים: $A(s) A^T(s) = \mathrm{Id} \quad \forall s$.

נגזור ונקבל:

$$\dot{A}A^T + A\dot{A}^T = 0$$

נבחין כי:

$$B := \dot{A}A^{-1} = \dot{A}A^T$$

ולכן קיבלנו כי:

$$\dot{A}A^T + A\dot{A}^T = 0 \Rightarrow B + B^T = 0$$

כנדרש. ■

כעת יש באמתחתנו את הכלים על מנת להוכיח את המשפט: **הוכחה:** נגדיר את המטריצה:

$$A(s)=\begin{pmatrix}- & v(s) & -\\ - & n(s) & -\\ - & b(s) & -\end{pmatrix}$$

נבחין כי $A(s)$ היא מטריצה אורתוגונלית (הרי הוקטורים הנ"ל ניצבים זה לזה).
נגדיר:

$$B(s):=\dot{A}(s)A^{-1}(s)$$

ונקבל כי:

$$\dot{A}(s)=B(s)A(s)$$

לפי הלמה, המטריצה B היא אנטי־סימטרית. אנו יודעים כי למטריצות האלה ב 3×3 צורה ספציפית:

$$B(s)=\begin{pmatrix}0 & \alpha(s) & \beta(s)\\ -\alpha(s) & 0 & \gamma(s)\\ -\beta(s) & -\gamma(s) & 0\end{pmatrix}$$

ולכן אנו מקבלים כי:

$$\begin{pmatrix}- & \dot{v}(s) & -\\ - & \dot{n}(s) & -\\ - & \dot{b}(s) & -\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \alpha(s) & \beta(s)\\ -\alpha(s) & 0 & \gamma(s)\\ -\beta(s) & -\gamma(s) & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}- & v(s) & -\\ - & n(s) & -\\ - & b(s) & -\end{pmatrix}$$

מכך אנחנו מקבלים כי:

$$\begin{cases}\dot{v}=\alpha n+\beta b\\ \dot{n}=-\alpha v+\gamma b\\ \dot{b}=-\beta v-\gamma n\end{cases}$$

אבל אנו יודעים כי $\alpha n+\beta b=kn$ (מהגדרת n), לכן זה אומר כי: $\alpha=k,\beta=0$ ונקבל:

$$\begin{cases}\dot{v}=kn\\ \dot{n}=-kv+\gamma b\\ \dot{b}=-\gamma n\end{cases}$$

ולכן נסמן $\tau(s)=-\gamma(s)$ וקיבלנו את הנדרש. ■

הערה 4.3.6 v,n,b:

$$\begin{aligned}b &= v\times n\\ v &= n\times b\\ n &= b\times v\end{aligned}$$

נגדיר ווקטור $\Omega:=-\tau v+kb$.

$$\begin{aligned}[\Omega,v] &= k[b,v]=kn=\dot{v}\\ [\Omega,n] &= -\tau[v,n]+k[b,n]=-\tau b-kv=\dot{n}\\ [\Omega,b] &= [-\tau v+kb,b]=-\tau[v,b]=\tau n=\dot{b}\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו כי:

$$\begin{cases} \dot{v} = kn & = [\Omega, v] \\ \dot{n} = -kv + \gamma b & = [\Omega, n] \\ \dot{b} = -\gamma n & = [\Omega, b] \end{cases}$$

וקטור Ω נקרא וקטור Darboux. למעשה הוקטור הוא ה Angular Velocity של המסילה.

הערה 4.3.7 עקמומיות $k(s)$ ופיתול $\tau(s)$ לא משתנים ביחס לאיזומטריות של $\mathbb{R}^3$ השומרות את האוריאנטציה. האיזומטריות הן למעשה החבורה:

$$\begin{cases} x \mapsto \underbrace{C}_{\in \mathrm{SO}(3)} x + \xi \end{cases}$$

$C \in \mathrm{SO}(3)$ אומר למעשה כי מתקיים: $\det C = 1$.

תרגיל 4.3.8 : מה קורה עם k ו τ ביחס לאיזומטריות שהופכות את האוריאנטציה? כאשר בעצם:

$$\begin{cases} x \mapsto Cx + \xi \end{cases}$$

ומתקיים: $\det C = -1$.

תרגיל 4.3.9 : מה קורה עם k ו τ כאשר אנחנו הופכים את האוריאנטציה של עקומה f?

$$\begin{aligned} f : (-1,1) &\to \mathbb{R}^3 \\ \overline{f}(s) &= f(-s) \end{aligned}$$

חשבו את: $\overline{\tau}$ ואת: $\overline{k}$ (העקמומיות והפיתול של העקומה החדשה).

נזכר כי עבור עקומה $f : [0,L] \to \mathbb{R}^3$ כאשר $\dot{v}(s) \neq 0$, הגדרנו שני אינווריאנטים של f ביחס לאיזומטריה: עקמומיות $k(s)$ ופיתול: $\tau(s)$.

השאלה הנשאלת האם אינווריאנטים אלה מגדירים את העקומה היטב?

משפט 4.3.10

נניח ש $k(s) > 0$ ו $\tau(s)$ פונקציות חלקות. אז קיימת ויחידה (עד כדי איזומטריות ששומרות את האוריאנטציה) עקומה $f : [0,L] \to \mathbb{R}^3$ כך ש k היא העקמומיות של f ו τ היא הפיתול של f.

לשם ההוכחה נצטרך את הלמה הבאה ממד"ר (ולא נוכיח אותה):

למה 4.3.11

$B : [0,L] \to \mathrm{Mat}(n \times n)$ משפחה חלקה של מטריצות. אז קיים ביחידות פתרון למשוואה הדיפרנציאלית:

$$\dot{A}(s) = B(s) A(s)$$

עם תנאי התחלה $A(0) = A_0$.

נוכיח את המשפט בעזרת הלמה: **הוכחה:** נגדיר את המטריצה:

$$B(s) = \begin{pmatrix} 0 & k(s) & 0 \\ -k(s) & 0 & -\tau(s) \\ 0 & \tau(s) & 0 \end{pmatrix}$$

נפתור את המשוואה $\dot{A}=BA$ עם תנאי התחלה $A(0)=\mathrm{Id}$. אנו יודעים כי הפתרון קיים, נסמנו:

$$A(s)=\begin{pmatrix}- & v(s) & -\\ - & n(s) & -\\ - & b(s) & -\end{pmatrix}$$

אנחנו רוצים לבדוק ש v,n,b הוא בסיס אורתונורמלי חיובי. במילים אחרות כי: $A(s)\in\mathrm{SO}(3)$ לכל s.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(A^TA\right) &= \dot{A}^TA+A^T\dot{A}\\ &= (BA)^T A+A^TBA\\ &= A^T\underbrace{B^T}_{-B}A+A^TBA\\ &= 0\end{aligned}$$

כי בחרנו את B להיות אנטי סימטרית. לכן: $B^T=B$

$$A^TA(s)=A^TA(0)=\mathrm{Id}$$

מכיוון שראינו ש A^TA היא קבועה מכיוון שהנגזרת מתאפסת. ולכן $A\in\mathrm{O}(3)$.

נתבונן ב $s\mapsto\det A(s)$, אנו מקבלים ערכים ±1, אבל במקביל היא גם רציפה. ומכיוון ש $A(0)=\mathrm{Id}$ נקבל כי: $\det A(s)=1$ לכל s.

נסיים את ההוכחה ע"י בניה של העקומה $f(s)$ עם התכונות הבאות:

1. $f(0)=0$.
2. $v(0)=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.
3. $n(0)=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.
4. $b(0)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

נגדיר $f:[0,L]\to\mathbb{R}^3$ באופן הבא:

$$f(s)=\int_0^s v(z)\,dz$$

ונקבל כי:

$$\dot{f}(s)=v(s)$$

אנו יודעים כי $A(s)$ אורתוגונלי, ולכן: $|v(s)|=1$ ולכן העקומה $f(s)$ נתונה בפרמטריזציה טבעית.

אנחנו רוצים לבדוק ש $k(s)$ ו$\tau(s)$ באמת הם העקמומיות והפיתול של f. לפי $\dot{A}=BA$ אנחנו רואים כי:

$$\begin{cases}\dot{v}=k(s)\,n\\ \dot{n}=-k(s)\,v+\tau(s)\,b\end{cases}$$

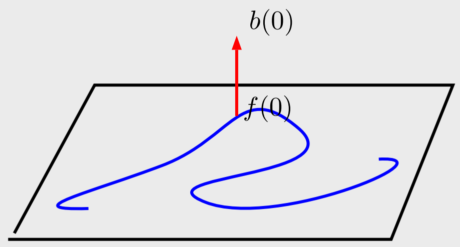
ואנחנו יודעים כי (v,n,b) בסיס חיובי כי $\det A(s)=1$. אבל $|n|=1$ ולכן: $|\dot{v}|=k(s)$.

ואם נעבור על ההגדרות של τ,b,k,n. ■

תרגיל 4.3.12 : להראות יחידות של העקומה עד כדי איזומטריות.

מה אנחנו יכולים להגיד על עקומה עם פיתול שונה מאפס? או לחילופין על עקומה עם פיתול שווה אפס?

הערה 4.3.13 אם $f(s)$ עקומה ב $\mathbb{R}^3$, $k>0$. אם $\tau(s)=0$ לכל s אז עקומה f נמצאת במישור:



$$f(0)+b(0)^{\perp}$$

הוכחה: אם $\tau(s)=0$ $\forall s$ אז:

$$\dot{b}(s)=\tau(s)\,n(s)=0$$

ואז נקבל כי:

$$b(s)=b(0)\quad\forall s$$

כעת נבחין כי:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\overbrace{f(s)-f(0)}^{u(s)},\overbrace{b(s)}^{=b(0)}\right)=\left(\underbrace{\dot{f}(s)}_{v(s)},b(0)\right)=0$$

אבל נבחין כי:

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}u(s)=0\\ u(0)=0\end{cases}\Rightarrow u\equiv 0$$

ולכן:

$$f(s)-f(0)\perp b(0)\ \ \forall s$$

■

נתונה עקומה $f(t)$ עם פרמטריזציה רגולרית ($\dot{f}(t)\neq 0$). נגדיר פרמטריזציה טבעית:

$$s(t)=\int_0^t|f'(\tau)|\,d\tau$$

$f\sim g$, $g(s)$ היא פרמטריזציה טבעית:

$$g(s(t))=f(t)$$

העקמומיות:

$$K\left(t\right)=k\left(s\left(t\right)\right)$$

והפיתול:

$$T\left(t\right)=\tau\left(s\left(t\right)\right)$$

את המשפט הבא נקבל בתרגילים:

משפט 4.3.14

$$\begin{aligned} K\left(t\right) &= \frac{\left|\left[f',f''\right]\right|}{\left|f'\right|^{3}} \\ T\left(t\right) &= \frac{\left(f',\left[f'',f'''\right]\right)}{\left|\left[f',f''\right]\right|^{2}} \end{aligned}$$

(כאשר $f'=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ נגזרת לפי האיבר המקורי לי לפי s, ו $[\cdot,\cdot]$ היא מכפלה וקטורית).

10/11/

פרק 5

משטחים במרחב

5.1 הקדמה

אנחנו רוצים לדבר על משטחים של $\mathbb{R}^m$ במרחב של $\mathbb{R}^n$. במקרה שקל לנו לדמיין נדבר על משטח M^2 מ $\mathbb{R}^2$ בתוך $\mathbb{R}^3$.

במסילה הייתה לנו פרמטריזציה טבעית, במשטחים זה לא המצב. אין דרך אינטיליגנטית לבחור פרמטריזציה שתהיה עדיפה על אחרות.

אנחנו רוצים לבנות מערכת קואורדינטות על משטח, כלומר אם המשטח שלנו הוא דו־מימדי, אנחנו רוצים לכל נקודה במשטח להתאים שתי קואורדינטות.

5.2 מרחב משיק

הגדרה 5.2.1 תחום $(q_1,\ldots,q_m)\ U\subset\mathbb{R}^m$ הינו קבוצה פתוחה.

$$\forall q\in U\quad T_qU$$

מרחב משיק. T_qU היא אוסף של כל הוקטורים ב $\mathbb{R}^m$ עם ראשית ב q.

הערה 5.2.2 מדובר על מרחב לינארי. כלומר אם יש לנו שני וקטורים η,ξ אז אנחנו מגדירים את הסכום שלהם, $\xi+\eta$, בעזרת חוק המקבילית והוא במרחב המשיק. ולכל $c\in\mathbb{R}$ גם $c\cdot\xi$ במרחב המשיק.

נבחין כי $T_qU\cong\mathbb{R}^m$. ולא סתם איזומורפי, אלא יש איזומורפיזם פשוט המוגדר ע"י החלפת הראשית של הוקטור ל 0.

אם $\gamma:(a,b)\to U$ עקומה חלקה אז לפי הגדרה: $\dot{\gamma}(t)\in T_{\gamma(t)}U$. נבחין כי מבחינת תורת הקבוצות, או אלגברה לינארית: $T_qU=T_q\mathbb{R}^n$.

5.3 דיפרנציאל של העתקה חלקה

הגדרה 5.3.1 נניח ש$U\subset\mathbb{R}^m$ תחום ויש העתקה $f:U\to\mathbb{R}^n$, דהיינו: $(q_1,\ldots,q_m)\mapsto(f_1(q_1,\ldots,q_m),\ldots,f_n(q_1,\ldots,q_m))$ (במקור יש לנו m קואורדינטות ובתמונה n).

אנחנו אומרים ש f חלקה אם לכל i מתקיים $f_i\in C^\infty$.

דיפרנציאל של העתקה הינו:

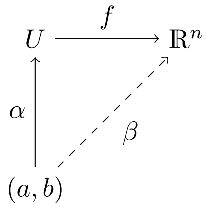
$$D_qf:T_qu\to T_{f(q)}\mathbb{R}^n$$

כאשר:

$$\xi\mapsto\left(\frac{\partial f_i}{\partial q_j}(q)\right)\xi$$

5.3.1 תכונה בסיסית של דיפרנציאל

נניח שיש לנו תחום $U \subset \mathbb{R}^m$ והעתקה $f : U \to \mathbb{R}^n$. ונניח שיש לנו עקומה $\alpha : (a,b) \to U$. אז נו יכולים להגדיר העתקה $\beta : (a,b) \to \mathbb{R}^n$ ע"י $\beta(t) := f(\alpha(t))$.



טענה 5.3.2

$\dot{\beta}(t) = \left(D_{\alpha(t)} f\right) \dot{\alpha}(t)$.

הערה 5.3.3

$$D_{\alpha(t)} f = \frac{\partial f_i}{\partial q_j}(\alpha(t))$$

הוכחה: נסמן:

$$\beta_i(t) = f_i(\alpha_1(t), \ldots, \alpha_m(t))$$

לכן:

$$\dot{\beta}_i(t) = \sum \frac{\partial f_i}{\partial q_j}(\alpha(t))\, \dot{\alpha}_j(t) \Rightarrow \dot{\beta} = \left(\frac{\partial f}{\partial q}(\alpha(t))\right) \dot{\alpha}$$

כנדרש. ■

5.4 אימרסיה

הגדרה 5.4.1 בהניתן תחום $U \subset \mathbb{R}^m$ והעתקה: $f : U \to \mathbb{R}^n$ העתקה חלקה. נאמר ש f אמרסיה (immersion) אם: לכל $q \in U$

$$D_q f : T_q U \to T_{f(q)} \mathbb{R}^n$$

היא מונומורפיזם (דהיינו $\ker = 0$).

דוגמאות:

דוגמה 5.4.2 : $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^2$ כאשר $t \mapsto \left(\frac{1}{2}t^2, \frac{1}{3}t^3\right)$. נבחין כי:

$$D_t f = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$$

ואנחנו מקבלים כי $D_0 f = 0$ ולכן f היא לא אימרסיה בנקודה $t = 0$.

דוגמה 5.4.3 : $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ מוגדרת ע"י:

$$(q_1, \ldots, q_n) \mapsto (q_1, \ldots, q_n, \varphi(q_1, \ldots, q_n))$$

כאשר $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. כלומר: $q_{n+1} = \varphi(q_1, \ldots, q_n)$, זהו למעשה הגרף של הפונקציה φ.

תרגיל 5.4.4 : f אימרסיה.

5.5 דיפיאומורפיזם

הגדרה 5.5.1 יהיו $U,V\subset\mathbb{R}^m$ תחומים. העתקה $f:U\to V$ תקרא דיפיאומורפיזם אם:

1. f חלקה.
2. f חח"ע ועל.
3. f^{-1} חלקה.

תרגיל 5.5.2 : (כלל השרשרת)

$$\mathbb{R}^m\xrightarrow{f}\mathbb{R}^n\xrightarrow{g}\mathbb{R}^l$$

נגדיר העתקה $h=g\circ f$. ו $q\in\mathbb{R}^m$ אז:

$$T_q\mathbb{R}^m\overset{D_qf}{\longrightarrow}T_{f(q)}\mathbb{R}^n\overset{D_{f(q)}g}{\longrightarrow}T_{g(f(q))}\mathbb{R}^l$$

אנו רוצים לבחון את: $D_q\left(g\circ f\right)$.

1. להוכיח ש:

$$D_q\left(g\circ f\right)=D_{f(q)}g\cdot D_qf$$

2. אם $f:U\to V$ דיפיאומורפיזם אז הדיפרנציאל D_qf מטריצה הפיכה לכל q.

משפט 5.5.3

(פונקציה הופכית)
$f:U\to V$ חלקה. עבור $q\in U$, $D_qf:T_qU\to T_{f(q)}v$ איזומורפיזם, אז קיימות סביבות U' של q ו־V' של $f\left(q\right)$ כך ש: $f:U'\to V'$ דיפיאומופזיסם.

הגדרה 5.5.4 הומאומורפיזם היא העתקה $f:X\to Y$ שהיא חח"ע, על ורציפה וגם f^{-1} רציפה.

הערה 5.5.5 נבחין כי אם f היא הומאומורפיזם, ונניח כי היא גם חלקה, זה לא מספיק כדי שהיא תהיה דיפיאומורפיזם! לדוגמה $f\left(x\right)=x^3$. הנגזרת של f באפס היא אפס, ולכן הדיפרנציאל לא יהיה העתקה איזומורפית. (הפונקציה ההופכית לא תהיה גזירה ב 0).

16/11/

5.6 משטח רגולרי עם פרמטריזציה

הגדרה 5.6.1 משטח רגולרי עם פרמטריזציה (Regular Surface with parameterization): משטח רגולרי של מימד m עם פרמטריזציה ב $\mathbb{R}^n$:

1. $\left(q_1,\ldots,q_m\right)\ U\subseteq\mathbb{R}^m$.
2. $f:U\to\mathbb{R}^n$ אימרסיה ($\forall q\in U,\ D_qf:T_qU\to T_{f(q)}\mathbb{R}^n$ מונומורפיזם).
3. $f:U\to f\left(U\right)\subset\mathbb{R}^n$ הומאומורפיזם (כלומר חח"ע, ועל ורציפה וגם f^{-1} רציפה).

העתקה f נקראת פרמטריזציה של המשטח.

דוגמה 5.6.2 : מקרה של משטח עם $m=2$ ב $\mathbb{R}^3$ הוא כבר מקרה מעניין.

דוגמה 5.6.3 : נתבונן בהעתקה $\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ אשר עושה צורה של חילזון, שלא נסגר. כלומר בכיוון אחד היא נשארת על ציר הx ובכיוון השני היא עושה לופ ונושק לציר הx אבל לא נוגעת בו).

דוגמה 5.6.4 : נתבונן ב: $U=\left\{q_1^2+\ldots+q_{n-1}^2<1\right\}\subset\mathbb{R}^{n-1}$ ובהעתקה: $f:U\to\mathbb{R}^n$ המוגדרת באופן הבא: $q\mapsto\left(q_1,\ldots,q_{n-1},\sqrt{1-q_1^2-\ldots-q_{n-1}^2}\right)$

תרגיל 5.6.5 : f היא פרמטריזציה רגולרית של חצי ספירה.

5.7 מרחב משיק

הגדרה 5.7.1 מרחב משיק:

$$\begin{aligned} T_AM &:= \mathrm{Im}D_qf\\ &= D_qf\left(T_qU\right)\subseteq T_A\mathbb{R}^n\end{aligned}$$

הערה 5.7.2 $\dim T_AM=m$ מכיוון ש D_qf היא מונומורפיזם ו $\dim M=m$.

תרגיל 5.7.3 :

$$v_j=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial q_j}(q)\\ \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial q_j}(q)\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n$$

עבור $j=1,\ldots,m$. צריך להוכיח כי:

$$T_AM=\mathrm{span}\left(v_1,\ldots,v_m\right)$$

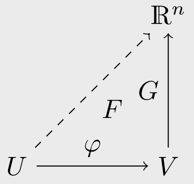
(כאשר $v_1,\ldots,v_m$ בסיס ב T_AM).

5.8 משטח ללא פרמטריזציה

הגדרנו איזשהו אובייקט שדרש מידע עזר מסויים, הפרמטריזציה, אבל עדיין אנו מעוניינים יותר בתמונה. כלומר, אנחנו רוצים להגדיר משטח בלי פרמטריזיה.

נתונים שני משטחים רגולרים עם פרמטריצזיה $F:U\to\mathbb{R}^n$ ו $G:V\to\mathbb{R}^n$ עבור $U\subset\mathbb{R}^m$ ו $V\subset\mathbb{R}^m$.

הגדרה 5.8.1 אנחנו אומרים כי המשטחים שקולים, $F\sim G$, אם קיים דיפאומורפיזם $\varphi:U\to V$ כך ש: $F=G\circ\varphi$.



ואנו דורשים כי: $\det\frac{\partial\varphi}{\partial q}(q)>0$

הערה 5.8.2 הדטרמיננטה קיימת, כי מדובר במטריצה ריבועית, היות ו V,U מאותו מימד.

הערה 5.8.3 נניח כי $A:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ איזומורפיזם. ו נניח כי $v_1,\ldots,v_m$ בסיס חיובי. אז $Av_1,\ldots,Av_m$ בסיס חיובי אם"ם $\det A>0$.

תרגיל 5.8.4 : $\sim$ הוא יחס שקילות.

הגדרה 5.8.5 אם נתבונן בקבוצה: $\{\text{משטחים עם פרמטריזציה}\}/\sim$ זה בעצם משטחים בלי פרמטריזציה.

תרגיל 5.8.6 : <u>**חשוב!!!**</u>
מרחב משיק T_AM לא תלוי בבחירת הפרמטריזציה.

פרק 6

מטריקה רימנית

6.1 הגדרות

זהו למעשה האובייקט המרכזי שאנחנו רוצים ללמוד בקורס.

אנחנו נמצאים בשטח, יש לנו קואורדינטות x,y,z ונתון המשטח: $z=F(x,y)$. המטרה שלנו היא להגיע מנקודה A לנקודה B. לשם כך, אנחנו צריכים את המפה. מכיוון שזהו גרף של פונקציה שנמצא בתחום U, עם פרמטריזציה: $(x,y)\mapsto(x,y,F(x,y))$. המפה שלנו היא דו מימדית, עם קואורדינטות x,y. הפתרון הנאיבי הוא לקחת קו ישר על המפה בין A ל B ולעשות את המסלול הזה על המשטח, אבל ברור כי זה לא בהכרח המסלול הכי קצר. המטרה שלנו היא לקחת איזשהי עקומה $\gamma:t\mapsto(x(t),y(t),F(x(t),y(t)))$ המתחילה ב A ומסיימת ב B. אנחנו רוצים למדוד את אורך העקומה הזו, לשם כך נבחין כי:

$$\dot{\gamma}(t)=\left(\dot{x}(t),\dot{y}(t),\frac{\partial F}{\partial x}(x(t),y(t))\dot{x}(t)+\frac{\partial F}{\partial y}(x(t),y(t))\dot{y}(t)\right)$$

ולכן:

$$\begin{aligned}|\dot{\gamma}(t)| &= \dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\dot{x}^2+2\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\dot{x}\dot{y}+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\dot{y}^2\\ &= \dot{x}^2(t)\left(1+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\right)+2\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\dot{x}\dot{y}+\left(1+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right)\dot{y}^2\end{aligned}$$

ולכן:

$$\mathrm{length}(\gamma)=\int_a^b\sqrt{\dot{x}^2(t)\left(1+\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\right)+2\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}\dot{x}\dot{y}+\left(1+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right)\dot{y}^2\mathrm{d}t}$$

בניגוד לנוסחה האוקלידית:

$$\mathrm{length}(\gamma)=\int_a^b\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\mathrm{d}t$$

נבחין כי הביטוי הראשון נראה מפחיד במבט ראשון, אבל למעשה מדובר בתבנית ריבועים מוקטור משיק $\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}$ כמו גם הביטוי האוקלידי. רק שהמקדמים שלנו תלויים בנקודה.

הגדרה 6.1.1 מטריקה רימנית על U: $U\subset\mathbb{R}^m$ קבוצה פתוחה ו $q_1,\ldots,q_m$ קואורדינטות ב $\mathbb{R}^m$.
מטריקה רימנית על U היא משפחה חלקה (ב $q\in U$) של תבניות בילינאריות סימטריות חיוביות ממש: $g_q:T_qU\times T_qU\to\mathbb{R}$.

בקואורדינטות:

$$g_q(\xi,\eta)=\sum g_{i,j}\xi_i\eta_j$$

כאשר $(g_{i,j})$ היא מטריצה סימטרית וגם חיובית ממש. אבל $g_{i,j}$ היא למעשה פונקציה שתלויה ב q.
למעשה אפשר להגדיר שמדובר במשפחה חלקה של מכפלות סקלריות. הדרישה של החלקות דורשת כי הפונקציות $g_{i,j}(q)$ הן חלקות.
נבחין כי מה שראינו לפני ההגדרה, היא למעשה דוגמה למקרה.
את המטריקה הרימנית g_q נהוג לסמן (צורה סטנדרטית בלי הרבה משמעות כרגע, למעשה יש ואולי נבין בהמשך) באופן הבא:

$$\mathrm{d}s^2=\sum g_{ij}(q)\,\mathrm{d}q_i\mathrm{d}q_j$$

דוגמה 6.1.2 : דוגמה טריוויאלית ובסיסית: מטריקה אוקלידית על $\mathbb{R}^m$ ניתנת ע"י:

$$\mathrm{d}s^2=\sum_{j=1}^{m}\mathrm{d}q_j^2$$

כלומר: $g_{i,j}(q)=\delta_{i,j}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$ או: $(g_{i,j}(q))=\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}=\mathbb{1}$.

סימון: לעיתים נרשום: $g(\xi,\eta)=(\xi,\eta)_g$ עבור $\xi,\eta\in T_qU$ וגם:

$$|\xi|_g=\sqrt{(\xi,\xi)_g}=\sqrt{\sum_{i,j}g_{i,j}(q)\,\xi_i\xi_j}$$

וזהו האורך הרימני של וקטור משיק, אורך של וקטור משיק $\xi\in T_qU$.

הגדרה 6.1.3 (U,g) תחום רימני. (כלומר U קבוצה פתוחה ו g מטריקה רימנית).
$\gamma:[a,b]\to U$ עקומה חלקה. נגדיר את האורך של העקומה:

$$\mathrm{length}_g(\gamma)=\int_a^b|\dot\gamma(t)|_g\,\mathrm{d}t=\int_a^b\sqrt{\sum g_{i,j}(\gamma(t))\,\dot\gamma_i(t)\,\dot\gamma_j(t)}\mathrm{d}t$$

בדוגמה שראינו לפני ההגדרות נקבל כי:

$$\begin{aligned}g_{x,x}&=1+\left(\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\right)^2\\ g_{y,y}&=1+\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right)^2\\ g_{x,y}&=\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\cdot\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\end{aligned}$$

נרצה להבין שוב את הדוגמה ממנה התחלנו, איך התחלנו ממטריקה אוקלידית ב$\mathbb{R}^3$ ו"נפלנו" למטריקה רימנית ב $\mathbb{R}^2$.

הגדרה 6.1.4 אימרסיה איזומטרית: נניח ש (U,g) ו (V,h) הם שני תחומים רימנים כאשר $U\subset\mathbb{R}^m$ ו $V\subset\mathbb{R}^n$ ומתקיים: $f:U\to V$ אימרסיה.
f נקראת אימרסיה איזומטרית אם לכל וקטור $\xi\in T_qU$ ווקטור $\eta\in T_qU$ (אנו יודעים כי אז f שולחת אותם לדיפרנציאל $(D_qf)\,\xi$ ו $(D_qf)\,\eta$ בהתאמה) מתקיים:

$$(D_qf\xi,D_qf\eta)_h=(\xi,\eta)_g$$

לכל $q\in U$ ולכל $\xi,\eta\in T_qU$.

g היא מטריקה מושרית מ h בעזרת אימרסיה f.

הערה 6.1.5 אם $f : U \to V$ דיפאומורפיזם, אומרים ש f היא איזומטריה רימנית.

תרגיל 6.1.6 : נניח (U, g) ו (V, h) וביניהם f איזומטריה רימנית: $(U, g) \xrightarrow{f} (V, h)$ ומסילה $\gamma : [a, b] \to U$ ומסילה $\tilde{\gamma} = f \circ \gamma$.
צריך להוכיח כי:

$$\text{length}_g(\gamma) = \text{length}_h(\tilde{\gamma})$$

6.2 מטריקה רימנית על משטח שהיא מושרית ממטריקה אוקלידית

יש לנו $U \subset \mathbb{R}^m \, (q_1, \ldots, q_m)$, ויש לנו משטח עם פרמטריזציה: $f : U \to \mathbb{R}^n$ משטח רגולרי עם פרמטריזציה. ואנו לוקחים h - מטריקה אוקלידית על $\mathbb{R}^n$:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x_1^2 + \ldots + \mathrm{d}x_n^2$$

ע"י נוסחה $(\xi, \eta)_g = (D_q f \xi, D_q f \eta)_h$ נגדיר את המטריקה המושרית g על U.

תרגיל 6.2.1 : לחשב את g בקואורדינטות, דהיינו למצוא את $g_{i,j}\left(q\right)$.

פתרון: מטריקה h נתונה ע"י $\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}x_1^2+\ldots+\mathrm{d}x_n^2$, אימרסיה f: $f=\left(f_1\left(q\right),\ldots,f_n\left(q\right)\right)$. למטריקה יש צורה:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 &= \left(\mathrm{d}f_1\right)^2+\ldots+\left(\mathrm{d}f_n\right)^2\\ &= \left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f_1}{\partial q_j}\mathrm{d}q_j\right)^2+\ldots+\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f_n}{\partial q_j}\mathrm{d}q_j\right)^2\end{aligned}$$

פתרון שני: (ופורמלי יותר)

$$A\left(q\right):=D_qf\left(q\right)=\left(\frac{\partial f_i}{\partial q_j}\left(q\right)\right)$$

מה זה g?

$$\left(\xi,\xi\right)_g=\sum g_{i,j}\left(q\right)\xi_i\xi_j$$

לכל $\xi\in T_qU$. ומתקיים:

$$\left(\xi,\xi\right)_g=\left(A\left(q\right)\xi,A\left(q\right)\xi\right)_{\mathrm{Eucl}}=\sum_{i=1}^{n}\left(A\left(q\right)\xi\right)_i^2$$

אבל נבחין כי:

$$\left(A\left(q\right)\xi\right)_i=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f_i}{\partial q_j}\left(q\right)\xi_j$$

ולכן:

$$\left(\xi,\xi\right)_g=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f_i}{\partial q_j}\xi_j\right)^2$$

אנו רוצים לחזור לסימון של $\mathrm{d}s^2$ לשם כך מחליפים את $\left(\xi,\xi\right)_g$ ב $\mathrm{d}s^2$ ואת ξ_j ב $\mathrm{d}q_j$ ונקבל:

$$\mathrm{d}s^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f_i}{\partial q_j}\mathrm{d}q_j\right)^2$$

כמו בפתרון הקודם.

17/11/

פרק 7

גיאומטריה של על־משטחים

7.1 הגדרה

הגדרה 7.1.1 $M\subset\mathbb{R}^{n+1}$ משטח רגולרי n־מימדי נקרא על־משטח (hypersurface).

נבחר פרמטריזציה רגולרית של M, $f:U\to\mathbb{R}^{n+1}$ עבור $U\subset\mathbb{R}^{n}$ פתוחה.

הערה 7.1.2 אז לכל $q\in U$, הדיפרנציאל $D_q f:T_q u\to T_{f(q)}M$ איזומורפיזם לינארי.
בפרט, מעביר את הבסיס הסטנדרטי: $e_1,\dots,e_n$ לבסיס: $D_q f\left(e_i\right)=\frac{\partial f}{\partial q_i}$ לכל $1\le i\le n$ של $T_{f(q)}M$.

7.2 וקטור נורמל

הגדרה 7.2.1 $A\in M$ וקטור הנורמל ל M ב A יסומן ע"י $\nu_A\in T_A\mathbb{R}^{n+1}$ ומוגדר ע"י:

- $|\nu_A|=1$.
- $\nu_a\perp T_A M$.
- $\det\left(\frac{\partial f}{\partial q_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial q_k},\nu_A\right)>0$.

תרגיל 7.2.2 : ν_A אינו תלוי בבחירת f.

דוגמה 7.2.3 : $M^2\subset\mathbb{R}^3$.

$$\nu_A=\frac{\left[\frac{\partial f}{\partial q_1}\left(q\right),\frac{\partial f}{\partial q_2}\left(q\right)\right]}{\left|\left[\frac{\partial f}{\partial q_1}\left(q\right),\frac{\partial f}{\partial q_2}\left(q\right)\right]\right|}$$

כאשר $A=f\left(q\right)$.

7.3 התבנית היסודית הראשונה והשניה

התבנית היסודית הראשונה על M היא המטריקה הרימנית המושרית על $T_A M$.

הגדרה 7.3.1 התבנית היסודית השנייה: התבנית היסודית השנייה היא תבנית בי לינארית, סימטרית: $B:T_A M\times T_A M\to\mathbb{R}$ המוגדרת באופן הבא:
נקח $\tilde{\xi},\tilde{\eta}\in T_A M$ ונבחר מסילה $\tilde{\gamma}\left(t\right)\in M$ כך ש $\tilde{\gamma}\left(0\right)=A$ ומתקיים $\dot{\tilde{\gamma}}\left(0\right)=\tilde{\xi}$, $\tilde{\gamma}\left(0\right)=A$.
$\tilde{\eta}\left(t\right)\in T_{\tilde{\gamma}(t)}M$ (חלקה) כך ש: $\tilde{\eta}\left(0\right)=\tilde{\eta}$. מגדירים:

$$B\left(\tilde{\xi},\tilde{\eta}\right)=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}\,\tilde{\eta}\left(t\right),\nu_A\right)$$

הערה 7.3.2 פורמילת $\tilde{\eta}(t)$ בכלל לא באותו מרחב לכל נקודה, אבל כל אחד מהם איזומורפי ל $\mathbb{R}^{n+1}$ באופן טבעי, לכן בתכלס אנחנו מסתכלים על השיכון ל $\mathbb{R}^{n+1}$.

משפט 7.3.3

1. $B\left(\tilde{\xi},\tilde{\eta}\right)$ אינו תלוי בבחירת $\tilde{\gamma}(t)$, $\tilde{\eta}(t)$.
2. B תבנית בילנארית סימטרית.

הוכחה: נבחר $\tilde{\gamma}(t)$ ו $\tilde{\eta}(t)$ כנ"ל. ונבחר פרמטריזציה רגולרית של M, $A=f(0)$. $f:U\to\mathbb{R}^{n+1}$.
נרשום $\tilde{\xi}=D_0 f(\xi)$ ו: $\tilde{\gamma}=f(\gamma(t))$, ו: $\tilde{\eta}=D_{\gamma(t)}f(\eta(t))$.
נרשום: $\xi=\sum\xi_i e_i$ ו: $\eta(t)=\sum\eta_j(t)e_j$. אז:

$$\begin{aligned}\tilde{\xi} &= \sum\xi_i\frac{\partial f}{\partial q_i}(0)\\ \tilde{\eta}(t) &= \sum\eta_j(t)\frac{\partial f}{\partial q_j}(\gamma(t))\\ \tilde{\eta} &= \tilde{\eta}(0)=\sum\eta_j(0)\frac{\partial f}{\partial q_j}(0)\end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{\eta}(t)=\sum\left[\eta_j(t)\sum\frac{\partial f^2}{\partial q_i\partial q_j}(\gamma(t))\dot{\gamma}_i(t)\right]+\sum\dot{\eta}_j(t)\frac{\partial}{\partial q_j}(\gamma(t))$$

נזכור ש: $\dot{\gamma}_i(0)=\xi_i$ לכן:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}\,\tilde{\eta}(t)=\sum_{i,j}\frac{\partial^2 f}{\partial q_i\partial q_j}(0)\,\xi_i\eta_j+\sum_j\dot{\eta}_j(0)\frac{\partial f}{\partial q_j}(0)$$

$$\begin{aligned}B\left(\tilde{\xi},\tilde{\eta}\right) &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}\,\tilde{\eta}(t),\nu_A\right)\\ &= \sum_{i,j}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial q_i\partial q_j}(0),\nu_A\right)\xi_i\eta_j+\sum_j\underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial q_j}(0),\nu_A\right)}_{0}\cdot\dot{\eta}_j(0)\end{aligned}$$

מכיוון ש $\frac{\partial f}{\partial q_j}(0)\in T_AM$ ו $\nu_A\perp T_AM$. נסמן $b_{i,j}=b_{j,i}$ כך ש:

$$b_{i,j}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial q_i\partial q_j}(0),\nu_A\right)$$

וקיבלנו כי:

$$B\left(\tilde{\xi},\tilde{\eta}\right)=\sum_{i,j}b_{i,j}\xi_i\eta_j$$

כלומר הביטוי הוא אכן תבנית בי לינארית סימטרית, והיא לא תלויה באף בחירה, כלומר קיבלנו את שתי הטענות של המשפט. ■

תזכורת מאלגברה לינארית: אם $(E,(\cdot,\cdot))$ מרחב מכפלה פנימית (סוף מימדי) ו $B:E\times E\to\mathbb{R}$ תבנית בילינארית סימטרית, אז $\exists!\,W:E\to E$ לינארית סיטמרית, $W^*=W$ כך ש:

$$B(u,v)=(Wu,v)\quad\forall u,v\in E$$

עבורנו: $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ על־משטח רגולרי, T_AM מרחב מכפלה פנימית על המכפלה הפנימית האוקלידית המושרית. B היא התבנית היסודית השניה, אז קיימת $\Omega : T_AM \to T_AM$ כך ש $W = W^*$ ומתקיים:

$$B(\xi,\eta) = (w\xi,\eta) \quad \forall \xi,\eta \in T_AM$$

העתקה W נקראת העתקת Weingarten. 23/11/

נזכר בהגדרה של התבנית היסודית השניה

הגדרה 7.3.4 יש לנו משטח רגולרי $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. לכל נקודה A על המשטח, יש לנו וקטור ν_A שהוא נורמל היחידה בנקודה A. אנו רוצים להגדיר תבנית בי־לינארית במרחב המשיק לנקודה A, T_AM. נקח שני וקטורים במרחב המשיק, $\tilde{\xi}$ ו $\tilde{\eta}$. נקח עקומה על המשטח γ כך ש $A = \gamma(0)$ וגם $\tilde{\xi} = \dot{\gamma}(0)$. כמו כן, נקח שדה וקטורי: $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}(0)$ ו: $\tilde{\eta}(t) \in T_{\gamma(t)}M$. נתבונן בתבנית הבילינארית: $B : T_AM \times T_AM \to \mathbb{R}$.

$$B\left(\tilde{\xi},\tilde{\eta}\right) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}\,\tilde{\eta}(t),\nu_A\right)$$

הערה 7.3.5 התבנית הנ"ל היא סימטרית, דהיינו: $B\left(\tilde{\xi},\tilde{\eta}\right) = B\left(\tilde{\eta},\tilde{\xi}\right)$.

הערה 7.3.6 ראינו בשיעור הקודם כי אין חשיבות לבחירת העקומה γ וגם לבחירת $\tilde{\eta}(t)$. כלומר $B\left(\tilde{\xi},\tilde{\eta}\right)$ לא תלוי כלל בבחירות, ולכן מוגדר היטב.

איך מוצאים את התבנית היסודית השניה? אנחנו בוחרים פרמטריזציה f מ $U \subset \mathbb{R}^n$ עם קורואדינטות $(q_1,\ldots,q_n)$ למשטח. דהיינו $f : U \to M$. עבור נקודה q, כך ש $f(q) = A$, נסמן:

$$\begin{aligned} D_qf\xi &= \tilde{\xi} \\ D_qf\eta &= \tilde{\eta} \end{aligned}$$

נקבל כי:

$$B\left(\tilde{\xi},\tilde{\eta}\right) = \sum b_{i,j}(q)\,\xi_i\eta_j$$

כאשר:

$$b_{i,j}(q) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_j}(q),\nu_A\right)$$

ונבחין כי: $b_{i,j} = b_{j,i}$ ולכן התבנית אכן סימטרית.

7.4 עקמומיות גאוס

נתבונן במרחב המשיק T_AM יחד עם המכפלה הסקלרית האוקלידית $(\cdot,\cdot)$. תהי B תבנית בילינארית סימטרית. מאלגברה לינארית אנו יודעים כי קיימת ביחידות העתקה $W : T_AM \to T_AM$ כך ש: $W^* = W$ ומתקיים:

$$B\left(\tilde{\xi},\tilde{\eta}\right) = \left(W\tilde{\xi},\tilde{\eta}\right)$$

(כלומר מכפלה סקלרית אוקלידית של $W\tilde{\xi}$ ו $\tilde{\eta}$).

נתבונן כעת ב T_qU ו B עם מכפלה סקלרית $(\cdot,\cdot)_q$ (המכפלה הסקלרית של המטריקה המושרית).

העתקה $W : T_qU \to T_qU$ נקראת העתקת Weingarten.

הגדרה 7.4.1 $K(A)=\det W(A)$ נקראת עקמומיות גאוס (Gauss).
$H(A)=\mathrm{tr}W(A)$ נקראת עקמומיות ממוצעת (mean curvature).

הערה 7.4.2 ברוב הספרים $H:=\frac{1}{n}\mathrm{tr}W$ כאשר $n=\dim M$, בקורס שלנו לא נוסיף את הפקטור $\frac{1}{n}$.

הערה 7.4.3 $K(A)$ ו $H(A)$, לא תלויים בפרמטריזציה של משטח, אבל כן יכולים להיות תלויים באוריאנטציה.

משפט 7.4.4 Gauss, Egregium

נניח ש $f:U^2\to\mathbb{R}^3$ משטח רגולרי. אז עקמומיות $Gauss$ מוגדרת באופן מלא ע"י מטריקה מושרית q על U.

כלומר נניח שאנחנו יודעים את $(g_{i,j}(q))$ ל $q\in U\in\mathbb{R}^2$ אז אנחנו יכולים לחשב את $K(q)$.

תרגיל 7.4.5 : נניח ש $f:\underbrace{U}_{\in\mathbb{R}^n}\to\underbrace{M}_{\in\mathbb{R}^{n+1}}$ משטח עם פרמטריזציה. ויש לנו $g_{i,j}(q)$ מטריקה מושרית, ו $b_{i,j}(q)$ התבנית היסודית השניה. זא:

$$W=(g_{i,j}(q))^{-1}(b_{i,j}(q))$$

דוגמה 7.4.6 : $M^2\subset\mathbb{R}^3$. נניח כי $f:U\to\mathbb{R}^3$ משטח הניתן ע"י העתקה: $(q_1,q_2)\mapsto(q_1,q_2,\varphi(q_1,q_2))$ כאשר $\varphi:U\to\mathbb{R}$ פונקציה חלקה.
אנחנו רוצים לחשב את העקמומיות בנקודה.
נניח ש $\varphi(0,0)=0$ וכי: $\frac{\partial\varphi}{\partial q_1}(0,0)=0$ וגם: $\frac{\partial\varphi}{\partial q_2}(0,0)=0$. כלומר הראשית היא נקודה קריטית.
נבחין כי T_0M= מישור q_1,q_2 עם מטריקה אוקלידית בקואודינטות q_1,q_2. וכי וקטור הנורמל בראשית הינו $\nu=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

$$b_{i,j}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial q_i\partial q_j}(0),\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_i\partial q_j}(0)$$

$$g_{i,j}(0)=\delta_{i,j}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

ונקבל כי:

$$W:=(b_{i,j}(0))=\begin{pmatrix}\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_1^2} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial q_1\partial q_2}\\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial q_1\partial q_2} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial q_2^2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}K(0) &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial q_1^2}(0)\cdot\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_2^2}(0)-\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_1\partial q_2}(0)\right)^2\\ H(0) &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial q_1^2}(0)+\frac{\partial^2\varphi}{\partial q_2^2}(0)=\Delta\varphi(0)\end{aligned}$$

(מכיוון ש: $(w_{i,j})=(g_{i,j})^{-1}(b_{i,j})$).

דוגמה 7.4.7 : $\varphi(q_1,q_2)=\alpha_1 q_1^2+\alpha_2 q_2^2$, נקבל כי:

$$W=\begin{pmatrix}2\alpha_1 & 0\\ 0 & 2\alpha_2\end{pmatrix}$$

וכי: $K=4\alpha_1\alpha_2$.
נבחין כי: $\alpha_1,\alpha_2>0$ נקבל כי: $K>0$. אבל גם עבור $\alpha_1,\alpha_2<0$ נקבל כי $K>0$. רק במקרים של אוכף, כאשר $\alpha_1<0$ אבל $\alpha_2>0$ (או להפך) נקבל כי $K<0$.

7.5 משטח הסיבוב (Surface of revolution)

נתבונן ב $\mathbb{R}^3$ ובעקומה: $\gamma=(f(u),g(u))$, γ עקומה רגולרית במישור (x,z). $f>0$. u פרמטר של γ. v ־ זווית:

$$a(u,v)\mapsto(f(u)\cos v,f(u)\sin(v),g(u))$$

המטריקה המושרית:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s^2 &= (\mathrm{d}(f(u)\cos v))^2+(\mathrm{d}(f(u)\sin v))^2+(\mathrm{d}(g(u)))^2\\
&= (f'(u)\cos v\mathrm{d}u-f(u)\sin v\mathrm{d}v)^2+(f'(u)\sin v\mathrm{d}u+f(u)\cos v\mathrm{d}v)^2+(g'(u)\mathrm{d}u)^2\\
&= \left(f'(u)^2\cos^2 v+f'(u)^2\sin^2 v+g'(u)^2\right)\mathrm{d}u^2+\cancel{(-2f'f\cos v\sin v+2f'f\sin v\cos v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v}\\
&\quad+\left(f^2(u)\sin^2 v+f^2(u)\cos^2 v\right)\mathrm{d}v^2\\
&= \left(f'(u)^2+g'(v)^2\right)\mathrm{d}u^2+f(u)^2\mathrm{d}v^2
\end{aligned}$$

כדי למצוא וקטור נורמל:

$$\nu=\frac{\frac{\partial a}{\partial u}\times\frac{\partial a}{\partial \nu}}{\left|\frac{\partial a}{\partial u}\times\frac{\partial a}{\partial \nu}\right|}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a}{\partial u} &= (f'(u)\cos v,f'(u)\sin v,g'(u))\\
\frac{\partial a}{\partial v} &= (-f(u)\sin v,f(u)\cos v,0)
\end{aligned}$$

ולכן:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial a}{\partial u}\times\frac{\partial a}{\partial v} &= \begin{vmatrix} i & j & k\\ f'(u)\cos v & f'(u)\sin v & g'(u)\\ -f(u)\sin v & f(u)\cos v & 0\end{vmatrix}\\
&= i(-g'(u)f(u)\cos(v))-j(g'(u)f(u)\sin v)+k\left(f(u)f'(u)\cos^2(v)+f(u)f'(u)\sin^2(v)\right)\\
&= (-g'(u)f(u)\cos v,-g'(u)f(u)\sin(v),f(u)f'(u))\\
&= f(u)\cdot(-g'(u)\cos v,-g'(u)\sin v,f'(u))
\end{aligned}$$

לכן:

$$\nu=\frac{1}{\sqrt{(f')^2+(g')^2}}(-g'\cos v,-g'\sin v,f')$$

נשתמש בתבנית היסודית השניה:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 a}{\partial u^2} &= \left(f''(u)\cos v, f''(u)\sin v, g''(u)\right)\\
b_{1,1} &= \left(\frac{\partial^2 a}{\partial u^2}, \nu\right) = \frac{-f''g' + g''f'}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}}\\
\frac{\partial^2 a}{\partial u \partial v} &= \left(-f'(u)\sin v, f'(u)\cos v, 0\right)\\
b_{1,2} &= \left(\frac{\partial^2 a}{\partial u \partial v}, \nu\right) = 0\\
\frac{\partial^2 a}{\partial \nu^2} &= \left(-f(u)\cos v, -f(u)\sin v, 0\right)\\
b_{2,2} &= \frac{fg'}{\sqrt{(f')^2 + (g')^2}}
\end{aligned}$$

המטריצה של מטריקה מושרית:

$$G = \begin{pmatrix} (f')^2 + (g')^2 & 0 \\ 0 & f^2 \end{pmatrix}$$

והתבנית היסודית השניה:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{g''f' - f''g'}{\sqrt{(f')^2+(g')^2}} & 0 \\ 0 & \frac{fg'}{\sqrt{(f')^2+(g')^2}} \end{pmatrix}$$

ולכן:

$$W = G^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{g''f' - f''g'}{\left((f')^2+(g')^2\right)^{3/2}} & 0 \\ 0 & \frac{g'/f}{\sqrt{(f')^2+(g')^2}} \end{pmatrix}$$

נבחין כי $w_{1,1}$ למעשה הוא העקמומיות של המסילה γ!

דוגמה 7.5.1 : נניח כי $f = R\cos u$ ו $g = R\sin u$. מדובר למעשה ב $S^2(R)$ (ספירה של רדיוס R).

$$W = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \end{pmatrix}$$

ונקבל כי:

$$K = \det W = \frac{1}{R^2}$$

כלומר $K = \text{const}$ וגם $K > 0$.

נבחין כי $K \equiv 1$ אז נקבל את המשטח: $S^2(1)$. עבור $K \equiv 0$ נקבל מישור. מה זה $K \equiv -1$? נראה כמו רמקול של גרמופון.

דוגמה 7.5.2 : משטח Beltrami:

$$\begin{aligned} f(u) &= u \\ g(u) &= -\sqrt{1-u^2} + \frac{1}{2}\log\frac{1+\sqrt{1-u^2}}{1-\sqrt{1-u^2}} \end{aligned}$$

✎ **תרגיל 7.5.3 :** $g'(u) = -\frac{\sqrt{1-u^2}}{u}$.

אבל איך הגיעו למשוואה המוזרה הזו? פתרו את המשוואה הדיפרנציאלית:

$$K = \frac{g''}{\left(1+(g')^2\right)^{3/2}} \cdot \frac{g'/u}{\left(1+(g')^2\right)^{1/2}} = \frac{(g''g')/u}{\left(1+(g')^2\right)^2}$$

$$\begin{aligned} P: &= (g')^2 \\ g''g' &= \frac{1}{2}P' \end{aligned}$$

$$K = \frac{P'/2u}{(1+P)^2}$$

והפתרון עבור $K=-1$ הוא:

$$P = \frac{1-u^2}{u^2} = \frac{1}{u^2} - 1$$

ולכן:

$$(P+1)^2 = u^{-4},\ P' = -2u^{-3}$$

$$K = \frac{-2u^{-3}/(2u)}{u^{-4}} = -1$$

24/11/

7.6 משמעות גיאומטרית של העתקת Weingarten

7.6.1 דיפרנציאל של העתקה בין משטחים

נניח שיש לנו שני משטחים $M^k \subset \mathbb{R}^m$ ו $N^l \subset \mathbb{R}^n$, ויש לנו העתקה ביניהם $F: M \to N$. אנחנו רוצים לדעת איך לגזור את F.
נתחיל מהגדרת פרמטריזציה. נבחר תחום $U \subset \mathbb{R}^k$ והעתקה $f: U \to M$, ותחום $V \subset \mathbb{R}^l$ ופרמטריזציה $g: V \to N^l$.
נגדיר העתקה חדשה: $\tilde{F}: U \to V$, באופן הבא: $\tilde{F} = g^{-1}Ff$.

הגדרה 7.6.1 נאמר ש F העתקה חלקה אם $\tilde{F}: U \to V$ העתקה חלקה.

✎ **תרגיל 7.6.2 :** חלקות של F לא תלויה בפרמטריזציות.

$$D_AF := (D_pg) \circ \left(D_q\tilde{F}\right) \circ (D_qf)^{-1}$$

תרגיל 7.6.3 : נקח עקומה $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ כך ש $\gamma(0) = A$ ונתבונן בעקומה $\alpha =: F \circ \gamma$.
אנו רוצים להוכיח כי:

$$(D_AF)(\dot{\gamma}(0)) = \dot{\alpha}(0)$$

מסקנה 7.6.4

D_AF לא תלוי בפרמטריזציה.

7.6.2 העתקת Gauss

נניח ש $M^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ על־משטח רגולרי. לכן, לכל נקודה רגולרית A, אנחנו יכולים לבחור את נורמל היחידה ν_A. נתבונן ב $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

אנחנו רוצים להגדיר את העתקת Gauss. אשר שולחת את הנקודה $A \in M$ ל $S^n \ni \nu_A$. כלומר:

$$\text{Gauss} : M \to S^n$$

תרגיל 7.6.5 : להוכיח שהעתקת Gauss היא העתקה חלקה.

$$D_A\text{Gauss} : T_AM \to T_{\nu(A)}S^n$$

כאשר $T_AM \perp \nu_A$ ו: $T_xS^n \perp x$ כלומר: $T_{\nu_A}S^n \perp \nu_A$ ולכן, אנחנו מקבלים ש: $T_AM" = "T_{\nu_A}S^n$.
כתוצאה מכך, אנחנו יכולים להתייחס לדיפרנציאל של טרנספורמציית גאוס כ:

$$D_A\text{Gauss} : T_AM \to T_AM$$

משפט 7.6.6

$$D_A\text{Gauss} = -W_A$$

הוכחה: נקח וקטור $\xi \in T_AM$ ו$\gamma(t)$ עקומה על M כך ש $\dot{\gamma}(0) = \xi$. על מנת לחשב את הדיפרנציאל של גאוס בנקודה A על וקטור ξ אנחנו צריכים לגזור באופן הבא:

$$\begin{aligned} D_A\text{Gauss}(\xi) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}\,\text{Gauss}(\gamma(t)) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}\,\nu(\gamma(t)) \in T_{\nu(A)}S^n \end{aligned}$$

נקח $\eta \in T_AM$, תהי $\eta(t) \in T_{\gamma(t)}M$ משפחה חלקה של וקטורים כך ש $\eta(0) = \eta$.
נבחין כי:

$$(\nu(\gamma(t)), \eta(t)) = 0$$

נגזור בנקודה $t=0$ ונקבל:

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mid_{t=0}\nu\left(\gamma\left(t\right)\right),\underbrace{\eta\left(0\right)}_{\eta}\right)+\left(\underbrace{\nu\left(\gamma\left(0\right)\right)}_{\nu_A},\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mid_{t=0}\eta\left(t\right)\right)=0$$

אבל נבחין כי הגורם השני הוא למעשה התבנית היסודית השניה, $B\left(\xi,\eta\right)$! ואילו הגורם הראשון הוא בדיוק $\left(D_A\mathrm{Gauss}\left(\xi\right),\eta\right)$. כלומר קיבלנו כי:

$$\left(D_A\mathrm{Gauss}\left(\xi\right),\eta\right)=-B\left(\xi,\eta\right)=-\left(W_A\xi,\eta\right)\Rightarrow D_A\mathrm{Gauss}=-W_A$$

■

דוגמה 7.6.7 : $S^2\left(R\right)\subset\mathbb{R}^3$. נבחין כי במקרה זה: $\nu\left(x\right)=\frac{x}{R}$. אז בעצם העתקה גאוס מוגדרת כ:

$$\mathrm{Gauss}:x\mapsto\frac{x}{R}$$

✎ **תרגיל 7.6.8 :** $D_X\mathrm{Gauss}=\frac{1}{R}\mathbb{1}$.
כלומר:

$$W=\begin{pmatrix}-\frac{1}{R} & 0\\ 0 & -\frac{1}{R}\end{pmatrix}$$

ומתקיים $K=\frac{1}{R^2}$.

נתונן ב $\mathbb{R}^2$ ומכפלה סקלרית $\left(\cdot,\cdot\right)$. נניח שיש לנו העתקה $P:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, מה המשמעות של $\det P$? המשמעות היא שינוי מרחק. ואם נתבונן במשטח $M^2\subseteq\mathbb{R}^3$ (כלומר עבור $n=2$) ניזכר כי: $K=\det W_*=\det D_*\mathrm{Gauss}$.

כלומר אם נסתכל על השטח באופן מקומי סביב A, נקבל שטח באופן מקומי על הספירה. לדוגמה, אם ניקח מדינה גדולה על כדור הארץ, נצטרך להתחשב בכך על מנת לחשב את שטחה (העקמומיות של כדור הארץ משנה את השטח, ולמדוד מרחקים באופן נאיבי לא יתן תוצאה מדוייקת).

טענה 7.6.9

בהינתן מטריקה מושרית מ $U\subset\mathbb{R}^2$ ל $M^2\subset\mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{d}s^2=A\mathrm{d}q_1^2+2B\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2+C\mathrm{d}q_2^2$$

כאשר $A,B,C|q_1,q_2$ נקבל כי:

$$K=\Phi\left(A,B,C,\frac{\partial A}{\partial q_1},\dots\right)$$

30/11/

פרק 8

נגזרת קוואריאנטית (Covariant derivative)

8.1 דיפרנציאל של פונקציה

הגדרה 8.1.1 נתבונן בתחום $U \subset \mathbb{R}^n$. ותהי $f : U \to \mathbb{R}$ פונקציה חלקה. הדיפרנציאל של f הינו: $\mathrm{d}_q f : T_q U \to \mathbb{R}$ ($D_q f : T_q U \to T_{f(q)} \mathbb{R} = \mathbb{R}$) המוגדר באופן הבא:

$$\mathrm{d} f(\xi) = \sum \frac{\partial f}{\partial q_j}(q)\, \xi_j$$

בהנתן מסילה $\gamma(t)$ כך ש $\gamma(0) = q$ ו $\dot{\gamma}(0) = \xi$ אז:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}_q f(\xi) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}\, f(\gamma(t)) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}\, f(\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)) \\ &= \sum \frac{\partial f}{\partial q_i}(q)\, \dot{\gamma}(0) \\ &= \sum \frac{\partial f}{\partial q_j}(q)\, \xi_j \end{aligned}$$

הערה 8.1.2 כדי למצוא את $\mathrm{d}_q f(\xi)$ מספיק לדעת את הערכדים של f על $\gamma(t)$.

8.2 שדה וקטורי (Vector Field)

נתבונן במרחב:

$$TU = \coprod_q T_q U = \{(q, \xi) \mid q \in U, \xi \in T_q U\} \cong U \times \mathbb{R}^n$$

שדה ווקטורי היא העתקה חלקה: $U \to TU$ כך ש: $q \mapsto (q, v(q))$. הדרישה של חלקות הינה:

$$v(q) = \sum v_i(q)\, e_i$$

כאשר הפונקציה $v_i : U \to \mathbb{R}$ פונקציה חלקה.

עבור $U \subset \mathbb{R}^n$ עם קוארדינטות $q_1, \ldots, q_n$ ב $T_q U$ נסמן: $e_i = \frac{\partial}{\partial q_i}$.

הערה 8.2.1 איך אנחנו חושבים על שדה וקטורי?
אנחנו חושבים בעצם על תחום, שמכל נקודה יוצאת וקטור עם הערך של השדה בנקודה.

דוגמה 8.2.2 : $f : U \to \mathbb{R}^n$ אז:

$$(\mathrm{d}_q f)\left(e_i = \frac{\partial f}{\partial q_i}(q)\right)$$

כמו כן נסמן: $\mathrm{Vect}(U)$ בתוך המרחב של כל השדות הוקטוריים על U. נבחין כי עבור $v, w \in \mathrm{Vect}(U)$ ו $a, b \in \mathbb{R}$ אז: $a \cdot v + b \cdot w \in \mathrm{Vect}(U)$.

תהי $\varphi : U \to \mathbb{R}$ פונקציה חלקה. $v \in \mathrm{Vect}(U)$, מגדירים שדה ווקטורי:

$$(\varphi \cdot v)(q) = \varphi(q) \cdot v(q)$$

8.3 נגזרת Lie

הגדרה 8.3.1 בהינתן V שדה וקטורי על U, ופונקציה $f : U \to \mathbb{R}$ חלקה. אנחנו מגדירים פונקציה חדשה:

$$(L_V f)(q) = \mathrm{d}_q f(V(q))$$

הערה 8.3.2 דהיינו בכל נקודה q אנחנו גוזרים את הפונקציה f בכיוון $v(q)$.

נבחין כי מדובר בטרנספורמציה לינארית:$L_V : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ כך ש: $f \mapsto L_V f$.

✎ **תרגיל 8.3.3 :** להוכיח את חוק Leibniz:

$$L_V(f \cdot g) = fL_V g + gL_V f$$

8.4 נגזרת קוואריאנטית

הגדרה 8.4.1 נגזרת קוואריאנטית היא העתקה בילינארית (מעל $\mathbb{R}$) $T_q U \times \mathrm{Vect}(U) \to T_q U$ אשר פועלת באופן הבא:

$$(x, Y) \mapsto \nabla_x Y$$

כך שמתקיים חוק Leibniz

$$\nabla_x(\varphi \cdot Y) = (\mathrm{d}\varphi)(x) Y + \varphi \nabla_x Y$$

עבור כל $\varphi \in C^\infty(U)$.

מה קורה בקואורדינטות? נניח ש $q_1, \ldots, q_n$ קורואדיטות ב $\mathbb{R}^n$ וכי $e_i = \frac{\partial}{\partial q_i}$. נתבונן בביטוי הבא לכל $q \in U$: $\nabla_{e_i} e_j$ (בעצם e_i ו e_j הינם בשדות וקטורים).

אז אנחנו נקבל מהביטוי הנ"ל וקטור חדש כך ש:

$$\nabla_{e_i} e_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{i,j}^k(q)\, e_k$$

ואנו דורשים כי $\Gamma_{i,j}^k(q)$ יהיו פונקציות חלקות. לפונקציה $\Gamma_{i,j}^k(q)$ יש שם, והן נקראות סימני Christoffel)

כעת, נניח כי:

$$V=\sum v_j\left(q\right)e_j$$

אז מלינאריות:

$$\begin{aligned}\nabla_{e_i}V &= \sum_j \nabla_{e_i}\left(v_j\left(q\right)e_j\right)\\ &= \sum_j \mathrm{d}v_j\left(e_i\right)\cdot e_j+v_j\nabla_{e_i}e_j\\ &= \sum_k \frac{\partial v_k}{\partial q_i}e_k+\sum_j v_j\sum_k \Gamma^k_{i,j}e_k\end{aligned}$$

כאשר המעבר השני הוא מכלל ליבניץ, ובעבר האחרון בין היתר החלפו את האינדקס מ j ל k. ולכן נקבל:

$$=\sum_k e_k\left\{\frac{\partial v_k}{\partial q_i}+\sum_j \Gamma^k_{i,j}v_j\right\}=\nabla_{e_i}V$$

נבחין כי אם יש לנו וקטור x כך ש: $x=\sum x_ie_i$ אז אנחנו יכולים לחשב:

$$\begin{aligned}\nabla_xV &= \sum x_i\nabla_{e_i}V\\ &= \sum_{k,i} x_i\left\{\frac{\partial v_k}{\partial q_i}+\sum_j \Gamma^k_{i,j}v_j\right\}e_k\end{aligned}$$

כלומר, כדי לגזור את x באופן קוואריאנטי, כל מה שאנחנו צריכים לדעת זה את סימני Christoffel.

8.4.1 תכונה חשובה של נגזרת קוואריאנטית

נניח ש: $\gamma:\left(-\varepsilon,\varepsilon\right)\to U$ מסילה וכי $\gamma\left(0\right)=q$ וגם: $\dot{\gamma}\left(0\right)=X\in T_qU$. נניח ש $Y\left(t\right)\in T_{\gamma(t)}U$ היא משפחה חלקה של וקטורים משיקים לאורך $\gamma\left(t\right)$ (כלומר אחנו מדברים על שדה וקטורי לאורך העקומה). אנחנו רוצים להגדיר ∇_XY, נרחיב את Y עד שדה וקטורי $\tilde{Y}\left(t\right)$ בסביבה של q.

הגדרה 8.4.2 $\nabla_xY=\nabla_x\tilde{Y}$.

טענה 8.4.3

$$\nabla_xY=\sum_k\left(\dot{Y}_k+\sum_{i,j}\Gamma^k_{i,j}X_iY_j\right)e_k$$

(כלומר, אנחנו א תלויים בהרחבה $\tilde{Y}$).

הוכחה: נבחין כי:

$$Y_k\left(t\right)=\tilde{Y}_k\left(\gamma_1\left(t\right),\ldots,\gamma_n\left(t\right)\right)$$

וכי:

$$\dot{Y}_k\left(0\right)=\sum\frac{\partial\tilde{Y}_k}{\partial q_i}\left(q\right)X_i$$

נרשום $X=\sum X_ie_i$ ונבחין כי:

$$\begin{aligned}\nabla_X\tilde{Y} &= \sum_i X_i\sum_k\left(\frac{\partial\tilde{Y}_k}{\partial q_i}+\sum_{i,j}\Gamma^k_{i,j}\tilde{Y}_j\right)e_k\\ &= \sum_k e_k\left\{\sum_i\frac{\partial\tilde{Y}_k}{\partial q_i}X_i+\sum_{i,j}\Gamma^k_{i,j}X_i\tilde{Y}_j\right\}\end{aligned}$$

נתבונן על הביטוי בסוגריים המסולסלים בנקודה q, נבחין כי הסכום הראשון הוא למעשה: $\sum_i\frac{\partial\tilde{Y}_k}{\partial q_i}X_i=\dot{Y}_k$ וגם כי על הנקודה q מתקיים כי $\tilde{Y}_j=Y_j$. ולכן, אנחנו מקבלים כי:

$$=\sum e_k\left(\dot{Y}_k+\sum_{i,j}\Gamma^k_{i,j}X_iY_j\right)$$

■

8.4.2 דוגמאות

דוגמה 8.4.4 נגזרת קוואריאנטית אוקלידית: $U\subset\mathbb{R}^n$ תחום.

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_xy &= \sum_{i=1}^n x_i\frac{\partial y_i}{\partial q_i}\\ \tilde{\nabla}_{e_i}y &= \frac{\partial x}{\partial q_i}\\ \tilde{\nabla}_{e_i}e_j &= 0\end{aligned}$$

ולכן:

$$\tilde{\Gamma}^k_{i,j}=0$$

כלומר, דוגמה זו לא ממש מעניינית, במקרה זה הנגזרת הקוואריאנטית פשוט זהה לנגזרת הרגילה.

דוגמה 8.4.5 נגזרת קוואריאנטית על על־משטח: נניח שיש לנו על משטח $M^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$, ויש לנו פרמטריזציה $f:U\to M^n$ כאשר $U\subset\mathbb{R}^n$.

הבעיה שלנו עם נגזרת במצב הזה היא שהמשטח עקום, ויש לנו מרחבים משיקים שונים ועלינו להתייחס אליהם בנגזרת. מקור הבעיה שאין לנו שום קשר בין שני מרחבים משיקים בין שני נקודות שונות.

מה שאנחנו מנסים לעשות היא למצוא דרך אינפיניטיסימלית עדיין לזהות את המרחקים האלה.

היינו רוצים להסתכל על הביטוי:

$$\lim_{\varepsilon\to0}\frac{Y(\varepsilon)-Y(0)}{\varepsilon}$$

ומתקיים כי כל $Y(t)\in T_{\gamma(t)}M$.

אנחנו נפתור את הבעיה הזו ע"י קודם לעשות משהו אינפיניטסימלי, כלומר בעזרת הנגזרת הקוואריאנטית ואז אח"כ נגיע באיזשהי דרך לזהות את המרחבים המשיקים.

אז מה בעצם מפריע לנו לזהות את המרחבים המשיקים בנקודות שונות? מפריע לנו שהמשטח הוא עקום. את המשטח היה שטוח (נגיד מישור $\mathbb{R}^3$) לא הייתה לנו בעיה.

אם יש לנו תחום U ומשטח עם הפרמטריזציה $f:U\to M$ אז עבור $\xi\in T_qU$ אנחנו מתאימים את הוקטור על המשטח $(D_qf)\,\xi$.

עבור $X\in\mathrm{Vect}(U)$ אנחנו מגדירים $(D.f)(X)$ משיק על M. המשמעות של הנקודה ב $D.$ היא בעצם: $\tilde{X}(f(q))=(D_qf)(X(q))$.

אם יש לנו פונקציה $\varphi:U\to\mathbb{R}$ אז: אנו יכולים להגדיר: $\varphi\circ f^{-1}:M\to\mathbb{R}$.

אם יש לנו נגזרת קוואריאנטית על U, ∇_xY אז אנחנו יכולים להגדיר: $\nabla^*_{(Df)(x)}(Df)(Y)$.

טענה 8.4.6

בהינתן $p:T_x\mathbb{R}^{n+1}\to T_xM$ הטלה אורתוגולית למשטח, אזי עבור $X\in T_xM$ ו $Y\in \text{Vect}\left(M\right)$ נגדיר:

$$\nabla_xY=p\left(\tilde{\nabla}_xY\right)$$

אז ∇ היא נגזרת קווריאנטית.

הוכחה: אנחנו צריכים לבדוק את חוק Leibniz. כלומר כי:

$$\begin{aligned}\nabla_x\left(\varphi Y\right) &= p\left(\tilde{\nabla}_x\left(\varphi Y\right)\right)\\ &= p\left(\mathrm{d}\varphi\left(x\right)Y+\varphi\tilde{\nabla}_x\left(Y\right)\right)\\ &= \mathrm{d}\varphi\left(X\right)\cdot\underbrace{p\left(Y\right)}_{Y}+\varphi\cdot\underbrace{p\left(\tilde{\nabla}_x\left(Y\right)\right)}_{\nabla_xY}\\ &= \mathrm{d}\varphi\left(x\right)Y+\varphi\nabla_xY\end{aligned}$$

נבחין כי המעברים הם מכיוון ש: $Y\in T_xM$ אזי $p\left(Y\right)=Y$. ולכן קיבלנו את כלל ליבניץ, ועל כן ∇ היא נגזרת קווריאנטית כנדרש. ■

נתבונן ב:

$$\nabla_xY=p\left(\tilde{\nabla}_xY\right)$$

חישוב של ∇: התבנית היסודית השניה אומרת כי:

$$B\left(x,y\right):=\left(\tilde{\nabla}_xy,\nu\right)$$

באופן כללי אנחנו יכולים לכתוב:

$$\tilde{\nabla}_xy=\underbrace{p\left(\tilde{\nabla}_xy\right)}_{\nabla_xy}+\underbrace{\left(\tilde{\nabla}_xy,\nu\right)\cdot\nu}_{B(x,y)\cdot\nu}$$

דהיינו:

$$\nabla_xy=\tilde{\nabla}_xY-B\left(x,y\right)\nu$$

01/12/

הערה 8.4.7 $\tilde{\nabla}_x$ היא הנגזרת האוקלידית. כלומר, אנחנו גוזרים באופן אוקלידי, ומטילים על המשטח.

8.5 איך הנגזרת הקווריאנטית נראית בפרמטריזציה?

נקח פרמטריזציה של משטח $a:U\to M$ כאשר $U\subset\mathbb{R}^2$ עם קואורדיטות q_1,q_2. בנקודה $q\in U$ נגדיר $e_1=\frac{\partial}{\partial q_1}$ ו: $e_2=\frac{\partial}{\partial q_2}$.
ובעזרת סימני Christoffel אנו מקבלים כי:

$$\nabla_{e_i}e_j=\sum\Gamma_{i,j}^k\left(q\right)e_k$$

אנחנו רוצים לבטא את e_1 על המשטח, נבחין כי:

$$e_1 = \frac{\partial a}{\partial q_1}$$
$$e_2 = \frac{\partial a}{\partial q_2}$$

כעת, יש לנו מטריקה רימנית מושרית g. ומקיים:

$$\mathrm{d}s^2 = g_{11}\mathrm{d}q_1^2 + 2g_{1,2}\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2 + g_{2,2}\mathrm{d}q_2^2$$

כאשר:

$$g_{i,j} = (e_i, e_j) = \left(\frac{\partial a}{\partial q_i}, \frac{\partial a}{\partial q_j}\right)$$

את התבנית היסודית השניהת אנחנו יכולים לייצג כך:

$$B = b_{1,1}\mathrm{d}q_1^2 + 2b_{1,2}\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2 + b_{2,2}\mathrm{d}q_2^2$$

כאשר:

$$b_{i,j} = \left(\frac{\partial^2 a}{\partial q_1 \partial q_j}, \nu\right)$$

כעת, אנחנו אומרים כי:

$$\tilde{\nabla}_{e_i} e_j = \nabla_{e_i} e_j + B\left(e_i, e_j\right)\nu$$

נבחין כי מחד גיסא:

$$\tilde{\nabla}_{e_i} e_j = \frac{\partial e_j}{\partial q_i}$$

ומאידך אנחנו יכולים לכתוב כי:

$$\nabla_{e_i} e_j + B\left(e_i, e_j\right)\nu = \Gamma_{i,j}^1 e_1 + \Gamma_{i,j}^2 e_2 + b_{i,j}\nu$$

8.5.1 חישוב סימני Christoffel

כעת, אנו רוצים לתת לi, j ערכים נומריים ולקבל מערכת משוואות.

$i = 1,\ j = 1$:

$$\frac{\partial e_1}{\partial q_1} = \Gamma_{1,1}^1 e_1 + \Gamma_{1,1}^2 e_2 + b_{1,1}\nu \quad (1)$$

$i = 2,\ j = 2$:

$$\frac{\partial e_2}{\partial q_2} = \Gamma_{2,2}^1 e_1 + \Gamma_{2,2}^2 e_2 + b_{2,2}\nu \quad (2)$$

$i=1,\ j=2$:

$$\frac{\partial e_2}{\partial q_1}=\Gamma^1_{1,2}e_1+\Gamma^2_{1,2}e_2+b_{1,2}\nu \qquad (3)$$

$i=2,\ j=1$:

$$\frac{\partial e_1}{\partial q_2}=\Gamma^1_{2,1}e_1+\Gamma^2_{2,1}e_2+b_{2,1}\nu \qquad (4)$$

כעת, מכיוון ש B סימטרית אזי: $b_{1,2}=b_{2,1}$ ונבחין גם כי:

$$\frac{\partial e_2}{\partial q_1}=\frac{\partial^2 a}{\partial q_1\partial q_2}=\frac{\partial^2 a}{\partial q_2\partial q_1}=\frac{\partial e_1}{\partial q_2}$$

ולכן, מהשתי משוואות האחרונות אנחנו מקבלים כי:

$$\begin{aligned}\Gamma^1_{1,2}&=\Gamma^1_{2,1}\\ \Gamma^2_{1,2}&=\Gamma^2_{2,1}\end{aligned}$$

נניח כי לכל q מתקיים: $g_{1,2}(q)=0$. אנחנו רוצים לחשב את $\Gamma^k_{i,j}$. נבחין כי ממשוואה (1) אנחנו נקבל כי:

$$\left(\frac{\partial e_1}{\partial q_1},e_1\right)=\Gamma^2_{1,1}\underbrace{(e_1,e_1)}_{g_{1,1}} \qquad ((1),e_1)$$

אבל גם:

$$\left(\frac{\partial e_1}{\partial q_1},e_1\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_1}\underbrace{(e_1,e_1)}_{g_{1,1}}=\frac{1}{2}\frac{\partial g_{q,q}}{\partial q_1}$$

הערה 8.5.1 מכיוון ש:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(v(s),v(s))=2\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}s},v\right)$$

ולכן, אנחנו יכולים לכתוב כי:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial g_{1,1}}{\partial q_1}=\Gamma^1_{1,1}g_{1,1}\Rightarrow\Gamma^1_{1,1}=\frac{1}{2g_{1,1}}\cdot\frac{\partial g_{1,1}}{\partial q_1}$$

ומשיקולי סימטריה נקבל כי:

$$\Gamma^2_{2,2}=\frac{1}{2g_{2,2}}\frac{\partial g_{2,2}}{\partial q_2}$$

כעת ממשוואה (3) נקבל:

$$\left(\frac{\partial e_2}{\partial q_1},e_2\right)=\Gamma^2_{1,2}(e_2,e_2)=\Gamma^2_{1,2}g_{2,2} \qquad ((3),e_2)$$

אבל שוב, אנו יודעים כי:

$$\left(\frac{\partial e_2}{\partial q_1}, e_2\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{2,2}}{\partial q_1}$$

ולכן, אנחנו מקבלים כי:

$$\Gamma^2_{1,2} = \frac{1}{2g_{2,2}}\frac{\partial g_{2,2}}{\partial q_1}$$

ומהסימטריה של סימני Christoffel אנחנו מצאנו גם את $\Gamma^2_{2,1} = \Gamma^2_{1,2}$ היות ו $\Gamma^k_{i,j} = \Gamma^k_{j,i}$.
ומשיקולי סימטריה, בין האינדקס הראשון לשני, אנחנו יכולים לכתוב כי:

$$\Gamma^1_{1,2} = \Gamma^1_{2,1} = \frac{1}{2g_{1,1}}\frac{\partial g_{1,1}}{\partial q_2}$$

מה שנשאר לנו זה למצוא את: $\Gamma^2_{1,1}$ ואת $\Gamma^1_{2,2}$. מהמשוואה הראשונה נקבל כי:

$$\left(\frac{\partial e_1}{\partial q_1}, e_2\right) = \Gamma^2_{1,1}\left(e_2, e_2\right) = \Gamma^2_{1,1} g_{2,2} \qquad \left(\left(1\right), e_2\right)$$

אבל אנחנו לא ממש יודעים מה לעשות עם זה, אנחנו צריכים להיות טיפה יותר יצירתיים. לשם כך, נקח את המשוואה השלישית:

$$\left(\frac{\partial e_2}{\partial q_1}, e_1\right) = \Gamma^1_{1,2}\left(e_1, e_1\right) = \Gamma^1_{1,2} g_{1,1} \qquad \left(\left(3\right), e_1\right)$$

נחבר את שתי המשוואות האחרונות שקיבלנו, ונקבל:

$$\underbrace{\left(\frac{\partial e_1}{\partial q_1}, e_2\right) + \left(\frac{\partial e_2}{\partial q_1}, e_1\right)}_{\frac{\partial}{\partial q_1}\left(e_1, e_2\right) = \frac{\partial}{\partial q_1} g_{1,2} = 0} = \Gamma^2_{1,1} g_{2,2} + \Gamma^1_{1,2} g_{1,1}$$

השיוויון לאפס הוא מההנחה ש $g_{1,2} = 0$. ולכן:

$$\Gamma^2_{1,1} = -\Gamma^1_{1,2} g_{1,1}$$

אבל את $\Gamma^1_{1,2}$ כבר מצאנו ולכן:

$$\Gamma^2_{1,1} = -\frac{1}{2\cancel{g_{1,1}}}\frac{\partial g_{1,1}}{\partial q_2}\cancel{g_{1,1}} g^{-1}_{2,2} = -\frac{1}{2g_{2,2}}\frac{\partial g_{1,1}}{\partial q_2}$$

ומשיקולי סימטריה:

$$\Gamma^1_{2,2} = -\frac{1}{2g_{1,1}}\frac{\partial g_{2,2}}{\partial q_1}$$

הערה 8.5.2 סימני Christoffel תלויים רק במטריקה רימנית מושרית.

לסיכום:

$$\Gamma_{1,1}^{1} = \frac{1}{2g_{1,1}}\cdot\frac{\partial g_{1,1}}{\partial q_1}$$
$$\Gamma_{2,2}^{1} = -\frac{1}{2g_{1,1}}\frac{\partial g_{2,2}}{\partial q_1}$$
$$\Gamma_{1,1}^{2} = -\frac{1}{2g_{2,2}}\frac{\partial g_{1,1}}{\partial q_2}$$
$$\Gamma_{2,2}^{2} = \frac{1}{2g_{2,2}}\cdot\frac{\partial g_{2,2}}{\partial q_2}$$
$$\Gamma_{1,2}^{1} = \Gamma_{2,1}^{1} = \frac{1}{2g_{1,1}}\frac{\partial g_{1,1}}{\partial q_2}$$
$$\Gamma_{1,2}^{2} = \Gamma_{2,1}^{2} = \frac{1}{2g_{2,2}}\frac{\partial g_{2,2}}{\partial q_1}$$

דוגמה 8.5.3 משטח סיבוב: נתבונן במשטח סיבוב של העקומה $(f(u), h(u))$, לשם הנוחות נניח כי היא ניתנת בפרמטריזציה טבעית, דהיינו: $f'(u)^2 + g'(u)^2 = 1$. משטח הסיבוב שלנו ניתן ע"י הפרמטריזציה הבאה:

$$a(u,v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, h(u))$$

בעבר ראינו את חישוב המטריקה, אשר נתן לנו:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}u^2 + f(u)^2\,\mathrm{d}v^2$$

נרצה לחשב את סימני Christoffel כאשר $q_1 = u$ ו $q_2 = v$. נקבל כי: $g_{1,1} = 1$ וכי $g_{1,2} = 0$ ולבסוף $g_{2,2} = f(u)^2$ (נבחין כי $g_{2,2}$ תלוי רק בu, כלומר ב q_1).
לכן, הנגזרת החלקית היחידה שלא מתאפסת הינה: $\frac{\partial g_{2,2}}{\partial q_1}$ והיא שווה ל: $\frac{\partial g_{2,2}}{\partial q_1} = 2ff'$. ולכן נקבל כי:

$$\Gamma_{1,2}^{2} = \Gamma_{2,1}^{2} = \frac{1}{2g_{2,2}}\cdot\frac{\partial g_{2,2}}{\partial q_1} = \frac{1}{2f^2}\cdot 2ff' = \frac{f'}{f}$$

ו:

$$\Gamma_{2,2}^{1} = -\frac{1}{2g_{1,1}}\frac{\partial g_{2,2}}{\partial q_1} = -\frac{1}{2}2ff' = -ff'$$

אחרת:

$$\Gamma_{i,j}^{k} = 0$$

לדוגמה, עבור ספירת היחידה, כאשר $f(u) = \cos(u)$ ו $h(u) = \sin(u)$ נקבל כי:

$$\Gamma_{1,2}^{2} = \Gamma_{2,1}^{2} = -\frac{\sin u}{\cos u}$$

וכי:

$$\Gamma_{2,2}^{1} = \sin u \cos u$$

הערה 8.5.4 פעולה אוקלידית:
כאשר אנחנו על מישור, אנחנו יכולים בקלות לאורך קו להעביר וקטורים במקביל זה לזה. אבל על הספירה פעולה זו קשה. על מנת שנוכל לעשות זאת נדרש ש $D_tX = 0$.

07/12/

8.6 מעבר\הזזה במקביל (Parallel Transport)

נתבונן ב$\mathbb{R}^n$ (אוקלידי), אנחנו יכולים להזיז וקטור שיהיה מקביל בין $T_p\mathbb{R}^n$ ל $T_q\mathbb{R}^n$ (שניהם איזומורפיים ל $\mathbb{R}^n$).

כעת נתבונן במשטח M, נבחין כי באופן כללי מתקיים $T_qM \neq T_pM$.

נניח כי $U \subset \mathbb{R}^m$ תחום, ו ∇ היא נגזרת קוווריאנטית על U. תהי $\gamma(t)$ מסילה. ונניח כ $Y(t)$ שדה וקטורי לאורך γ. דהיינו לכל t, $Y(t) \in T_{\gamma(t)}U$.

הגדרה 8.6.1 שדה וקטורי מקביל: $Y(t)$ נקרא שדה וקטורי מקביל לאורך γ אם $D_tY = 0$ לכל $y \in [0,1]$.

בקאורדינטות, לכל $t \in [0,1]$ ולכל $k \in \{1,\ldots,n\}$:

$$\dot{Y}_k(t) + \sum \Gamma_{i,j}^k(\gamma(t))\,\dot{\gamma}_j(t)\,Y_j(t) = 0$$

כלומר קיבלנו מערכת לינארית של משוואות דיפרנציאליות:

$$\dot{Y} + A(t)\,Y = 0$$

ממד"ר אנו מכירים את המשפט הבא:

משפט 8.6.2

לכל $Y_0 \in T_{\gamma(0)}U$ למערכת המשוואות $\dot{Y} + A(t)\,Y = 0$ יש פתרון יחיד $Y(t)$ עם תנאי התחלה $Y(0) = Y_0$.

כלומר, בהינתן התנאי התחלה $Y(0) = Y_0$, אנחנו יכולים להמשיך את השדה הוקטורי $Y(t)$ באופן יחיד לאורך המסילה.

יותר מזה, העתקה $Y_0 \mapsto Y(1)$, $T_{\gamma(0)}U \to T_{\gamma(1)}U$, היא לינארית ויותר מכך, היא איזומורפיזם.

נניח כעת כי $t \in [a,b]$, ו $\gamma(t)$ עקומה. לכל $t_1,t_2 \in [a,b]$ נגדיר: $P_{t_1}^{t_2} : T_{\gamma(t_1)}U \to T_{\gamma(t_2)}U$ העתקה של מעבר במקביל כך ש: $Y(t_1) = \xi$: $P_{t_1}^{t_2}\xi = Y(t_2)$.

איך לשחזר את ∇ ומ P? **טענה 8.6.3**

$\gamma(t)$ עקופה, $X(t)$ שדה וקטורי לאורך γ. אז:

$$D_tX\mid_{t=t_0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mid_{t=t0} P_t^{t_0}X(t)$$

היינו רוצים לחשב:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{X(t_0+\varepsilon) - X(t_0)}{\varepsilon}$$

אבל $X(T_0+\varepsilon) \in T_{\gamma(t_0+\varepsilon)}U$ ו: $X(t_0) \in T_{\gamma(t_0)}$, כלומר הם בכלל לא באותו מרחבים. אבל, $P_t^{T_0}X(t)$ כן. מכיוון ש $P_{t_0+\varepsilon}^{t_0}X(t_0+\varepsilon) \in T_{\gamma(t_0)} \ni X(t_0)$ ולכן:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\mid_{t=t0} P_t^{t_0}X(t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{P_{t_0+\varepsilon}^{t_0}X(t_0+\varepsilon) - X(t_0)}{\varepsilon}$$

מוגדר היטב. **הוכחה:** נבחר בסיס $E_1,\ldots,E_n \in T_{\gamma(t_0)}U$. נרשום:

$$E_i(t) = P_{t_0}^{t}E_i$$

נקבל $E_1(t),\ldots,E_n(t)$ בסיס ב $T_{\gamma(t)}U$. נרשום:

$$X(t) = \sum a_i(t)\,E_i(t)$$

נבחין כי מלינאריות מעל $\mathbb{R}$ וחוק Leibniz נקבל כי:

$$D_tX\left(t\right)=\sum\left(a_i\left(t\right)\cancelto{0}{D_tE_i\left(t\right)}+a_i'\left(t\right)E_i\left(t\right)\right)$$

הערה 8.6.4 $D_tE_i\left(t\right)=0$ כי הגדרנו את E_i להיות שדה וקטורי מקביל לאורך γ.

לכן קיבלנו כי:

$$D_tX\left(t\right)=\sum a_i'\left(t\right)E_i\left(t\right)$$

ולכן:

$$D_tX\left(t\right)|_{t=t_0}=\sum a_i'\left(t_0\right)E_i$$

כעת נחשב את אגף ימין:

$$\begin{aligned}P_t^{t_0}X\left(t\right)&=\sum a_i\left(t\right)P_t^{t_0}E_i\left(T\right)\\&=\sum a_i\left(t\right)E_i\end{aligned}$$

ולכן:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=t_0}P_t^{t_0}X\left(t\right)=\sum a_i'\left(t_0\right)E_i=D_tX\left(t\right)|_{t=t_0}$$

■

8.6.1 דוגמה על ספירה

נתבונן בספירה S^2. אנחנו יכולים להגדיר על הספירה:

$$\left(u,v\right)\mapsto\left(\cos\left(u\right)\cos\left(v\right),\cos\left(u\right)\sin\left(v\right),\sin\left(u\right)\right)$$

אנחנו יכולים לרשום קו רוחב על הספירה בתור: $\{u=u_0\}$. נרשום:

$$\gamma\left(v\right)=\left(\cos\left(u_0\right)\cos\left(v\right),\cos\left(u_0\right)\sin v,\sin u_0\right)$$

נרשום בקואורדינטות (u,v):

$$A=\left(u_0,0\right)=\left(\cos\left(u_0\right),0,\sin\left(u_0\right)\right)$$

$$Y_0=\dot{\gamma}\left(0\right)=\left(0,\cos u_0,0\right)$$

✎ **תרגיל 8.6.5 :** להעביר במקביל את Y_0 לאורך γ (ביחס לנגזרת קוואריאנטית טבעית על S^2).

נתבונן במישור $u=q_1$ ו $v=q_2$ וב $Y(v)$. בקאורדינטות אלו, נבחין כי $\gamma=(u_0,v)$ ו: $\dot{\gamma}=(0,1)$.

$$\dot{Y}_k+\sum_{i,j=1}^{2}\Gamma_{i,j}^{k}\dot{\gamma}_jY_j=0$$

עבור $k=1,2$. נבחין כי עבור המסילה שלנו מתקיים: $\dot{\gamma}_1=0$ ועבור $i=2$ נקבל: $\dot{\gamma}_2=1$.
ולכן נקבל את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases}\dot{Y}_1+\Gamma_{2,2}^{1}Y_2=0\\ \dot{Y}_2+\Gamma_{2,1}^{2}Y_1+\Gamma_{2,2}^{2}Y_2=0\end{cases}$$

אבל נזכר כי ראינו במקרה זה שמתקיים:

$$\Gamma_{2,1}^{2}=\Gamma_{1,2}^{2}=-\frac{\sin u}{\cos u}$$

וכי:

$$\Gamma_{2,2}^{1}=\sin u\cos u$$

וכל האחרים מתאפסים. ולכן נקבל את המערכת:

$$\begin{cases}\dot{Y}_1+\sin u_0\cos u_0Y_2=0\\ \dot{Y}_2-\frac{\sin y_0}{\cos y_0}Y_1=0\end{cases}$$

כעת נבצע את החישוב: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(Y(t),Y(t)\right)_g$. נזכר כי: $\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}u^2+\cos^2u\mathrm{d}v^2$ (המטריקה הרימנית המושרית בקאורודינטות u,v)
ולכן:

$$\left(Y(t),Y(t)\right)=Y_1^2+\cos^2u_0Y_2^2$$

ולכן:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(Y(t),Y(t)\right) &= 2\left(\dot{Y},Y\right)\\ &= 2\dot{Y}_1Y_1+2\cos^2u_0\dot{Y}_2Y_2\\ &= 2\left[-\sin u_0\cos u_0Y_2Y_1+\cos^2u_0\cdot\frac{\sin u_0}{\cos u_0}Y_1Y_2\right]\\ &= 0\end{aligned}$$

כלומר:

$$\left(Y(t),Y(t)\right)_g=\mathrm{const}=\left(Y(0),Y(0)\right)=\cos^2u_0$$

ולכן:

$$|Y(t)|=\cos u_0\qquad\forall t$$

נגזורת את המשוואות:

$$\begin{cases}\dot{Y}_1+\sin u_0\cos u_0 Y_2=0\\ \dot{Y}_2-\frac{\sin y_0}{\cos y_0}Y_1=0\end{cases}$$

נקבל כי:

$$\begin{cases}\ddot{Y}_1+\sin u_0\cos u_0\dot{Y}_2=0\Rightarrow\ddot{Y}_1+\sin u_0\cos u_0\frac{\sin u_0}{\cos u_0}Y_1=0\Rightarrow\ddot{Y}_1+\sin^2 u_0 Y_1=0\\ \ddot{Y}_2-\frac{\sin u_0}{\cos u_0}\dot{Y}_1=0\Rightarrow\ddot{Y}_2+\frac{\sin u_0}{\cos u_0}\sin u_0\cos u_0 Y_2=0\Rightarrow\ddot{Y}_2+\sin^2 u_0 Y_2=0\end{cases}$$

כלומר קיבלנו את המערכת משוואות:

$$\begin{cases}\ddot{Y}_1+\sin^2 u_0 Y_1=0\\ \ddot{Y}_2+\sin^2 u_0 Y_2=0\end{cases}$$

נבחין כי עבור: $\ddot{z}+\omega^2 z=0$ אנחנו יודעים כי הם מהבסיס: $\begin{cases}\sin\omega t\\ \cos\omega t\end{cases}$ כלומר: $z(t)=A\sin\omega t+B\cos\omega t$. כעת עבור: $Y(0)=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$, $\dot{Y}(0)=\begin{pmatrix}-\sin u_0\cos u_0\\0\end{pmatrix}$.
נקבל כי:

$$\begin{aligned}Y_1(v)&=-\sin(\sin u_0\cdot v)\cos u_0\\ Y_2(v)&=\cos(\sin u_0\cdot v)\end{aligned}$$

נגדיר:

$$\alpha(v)=\angle_g\left(y(v),\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$$

זווית בין $Y(v)$ לבין קוו רוחב על S^2.
נבחין כי:

$$\begin{aligned}\cos\alpha(v)&=\frac{\left(Y,\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)_g}{|Y|_g\left|\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right|_g}\\ &=\frac{\overbrace{\cancel{\cos^2 u_0}}^{\text{From the Remanian matrics}}\quad Y_2\cdot 1}{\cos\cancel{u_0\cos u_0}}\\ &=\cos(\sin u_0\cdot v)\end{aligned}$$

כלומר, זווית $\alpha(v)$ היא: $\alpha(v)=\sin u_0\cdot v$, דהיינו מסתובבת עם מהירות קבועה $\sin u_0$.
נבחין כי כאשר v מסיימת מעגלת, $\alpha(v)$ לא חוזרת לעצמה בהכרח! תכונה זו נובעת מכך שהספירה היא עקומה, ונראה בהמשך את הקשר לעקמומיות.

8.7 נגזרות קוואריאנטיות ומטריקה רימנית

הגדרה 8.7.1 בהינתן $U\subset\mathbb{R}^n$ תחום, g מטריקה רימנית על U ו ∇ נגזרת קוואריאנטית על U.
נאמר כי ∇ שומרת (Preserves) את g אם:

$$L_x\left((y,z)_g\right)=(\nabla_x y,z)_g+(y,\nabla_x z)_g$$

כאשר y,z הם שדות וקטורים ו x וקטור (ומכיוון שנכון לכל וקטור, אז בפרט לשדה וקטורי).

הערה 8.7.2 זהו סוג של "חוק Leibniz".

משפט 8.7.3

∇ שומרת g אמ"מ לכל עקומה, טרנספורמציות של הזזה במקביל $P_{t_1}^{t_2}:T_{\gamma(t_1)}U\to T_{\gamma(t_2)}U$ הן איזומטריות. דהיינו:

$$(\xi,\eta)_g=\left(P_{t_1}^{t_2}(\xi),P_{t_1}^{t_2}\eta\right)_g \qquad \forall\xi,\eta\in T_{\gamma(t_1)}U$$

08/12/

במקביל, אנחנו יכולים להגיד שבהינתן עקומה γ אז חוק לייבניץ מתורגם ל:

$$D_t\left((y,z)_g\right)=(D_ty,z)_g+(y,D_tz)_g$$

דוגמה 8.7.4 : נתבונן ב $\mathbb{R}^{n+1}$ וב $\tilde{\nabla}$ הנגזרת הקוואריאנטית האוקלידית.
g מטריקה אוקלידית.
נזכר שאם X,Y שדות וקטורים על $\mathbb{R}^{n+1}$ עם קואורדינטות $q_1,\ldots,q_{n+1}$ אז:

$$\tilde{\nabla}_x=\sum_{i=1}^{n+1}X_i\frac{\partial Y}{\partial q_i}$$

ו: $\Gamma_{i,j}^k=0$. לכן:

$$(D_tY)^k=\dot{Y}_k+\sum_{i,j}\Gamma_{i,j}^k\dot{\gamma}_iY_j\Rightarrow D_tY=\dot{Y}$$

נבדוק אץ חוק Leibniz:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(Y(t),Z(t)\right)=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Y(t),Z(t)\right)+\left(Y(t),\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Z(t)\right)$$

נבחין כי $D_t\left((y,z)_g\right)=(D_ty,z)_g+(y,D_tz)_g$ מתקיים. ולכן $\tilde{\nabla}$ שומרת את המטריקה האוקלידית.

דוגמה 8.7.5 : $M^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$ על־משטח. g היא המטריקה המושרית על המשטח. ∇ היא הנגזרת הקוואריאנטית הטבעית.
נבחין כי:

$$\begin{aligned}L_x(y,z)&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y,z)\\&=\left(\tilde{\nabla}_xy,z\right)+\left(y,\tilde{\nabla}_xz\right)\\&=\left(\nabla_xy+B(x,y)\nu,z\right)+\left(y,\nabla_xz+B(x,y)\right)\\&=(\nabla_xy,z)+(y,\nabla_xz)\end{aligned}$$

ה $B(x,y)\nu$ נעלם מכיוון ש $(\nu,z)=(\nu,y)=0$.
כלומר, גם כאן, ∇ שומרת את g.

טענה 8.7.6

∇ שומרת את g $\iff$ טרנספורמציות של הזזה במקביל לאורך כל עקומה - איזומטריות.

דהיינו, אם נתבונן ב: $P_{t_1}^{t_2}:T_{\gamma(t_1)}U\to T_{\gamma(t_2)}U$. אז לכל $\xi,\eta\in T_{\gamma(t_1)}U$ מתקיים:

$$\left(P_{t_1}^{t_2}\xi,P_{t_1}^{t_2}\eta\right)_g=(\xi,\eta)_g$$

הוכחה: נניח כי ∇ שומרת את g. מחוק Leibniz נקבל:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(P_{t_0}^tv,P_{t_0}^tw\right)=\left(\cancelto{0}{D_tP_{t_0}^tv},P_{t_0}^tw\right)+\left(P_{t_0}^tv,\cancelto{0}{D_tP_{t_0}^tw}\right)=0$$

ולכן:

$$\left(P_{t_0}^{t}v, P_{t_0}^{t}w\right) = \text{const} = \left(P_{t_0}^{t_0}v, P_{t_0}^{t_0}w\right) = (v, w)$$

כנדרש.

כעת נניח כי $P_{t_1}^{t_2}$ איזומטריות אז:

$$(y(t), z(t)) = \left(P_t^{t_0}y(t), P_t^{t_0}z(t)\right)$$

ולכן:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mid_{t=t_0}(y(t), z(t)) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mid_{t=t_0}\left(P_t^{t_0}y(t), P_t^{t_0}(z(t))\right)_g \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mid_{t=t_0}P_t^{t_0}y(t), P_t^{t_0}z(t)\right) + \left(P_t^{t_0}y(t), \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mid_{t=t_0}P_t^{t_0}z(t)\right)\end{aligned}$$

אבל נזכר כי ראינו בשיעור קודם כי:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mid_{t=t_0}P_t^{t_0}Y(t) = D_tY\mid_{t=t_0}$$

כלומר קיבלנו כי:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mid_{t=t_0}(y(t), z(t)) = (D_ty, z) + (y, D_t, z)$$

כלומר, מקיימת את תנאי Leibniz כנדרש. כלומר ∇ שומרת את g כנדרש. ■

$$L_x(y, z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(y, z)$$

כאשר (y, z) האחרון הוא מכפלה סקלרית אוקלידית.

הערה 8.7.7 E־ מרחב לינארי עם מכפלה סקלרית $(\cdot,\cdot)$, $v(t), w(t)$ משפחות חלקות של וקטורים . אז:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v(t), w(t)) = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}v, w\right) + \left(v, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}w\right)$$

הגדרה 8.7.8 יהי $U \subset \mathbb{R}^n$ תחום, g מטריקה רימנית ו ∇ נגזרת קוואריאנטית.
נגדיר את $Q : \mathrm{Vect}(U) \times \mathrm{Vect}(U) \times \mathrm{Vect}(U) \to C^\infty(U)$ באופן הבא:

$$Q(X, Y, Z) = L_x(Y, Z) - (\nabla_x Y, Z) - (Y, \nabla_x Z)$$

הערה 8.7.9 ∇ שומרת את g $\iff$ $Q \equiv 0$.

הערה 8.7.10 Q פולי־לינארית מעל $\mathbb{R}$, כלומר אם אנחנו מקבעים שני משתנים, אנחנו נקבל ביטוי לינארי בשלישי. דהיינו, לינארית לפי כל משתנה.

טענה 8.7.11

Q פולי־לינארית מעל $C^{\infty}(U)$. כלומר: $\forall\varphi,\psi,\theta\in C^{\infty}(U)$ מתקיים:

$$Q(\varphi X,\psi Y,\theta Z)=\varphi\psi\theta Q(X,Y,Z)$$

מסקנה 8.7.12

הערך של $Q(X,Y,Z)$ בנקודה q תלויה רק בערכים $X(q),Y(q),Z(q)$.

הוכחה: (של המסקנה)

נכתוב: $X=\sum x_i(q)\,e_i$ ו: $Y=\sum y_i(q)\,e_i$ ו: $Z=\sum z_i(q)\,e_i$. ואז נקבל מהלינאריות מעל $C^{\infty}(U)$ של Q כי:

$$Q(x,y,z)(q)=\sum x_i(q)\,y_j(q)\,z_k(q)\,Q(e_i,e_j,e_k)$$

אבל נבחין כי $Q(e_i,e_j,e_k)$ כלל לא תלוי ב x,y,z, זה תלוי רק ב g ו ∇ (נזכור כי $e_i=\frac{\partial}{\partial q_i}$). ■

כעת נוכיח את הטענה באופן חלקי: **הוכחה:** אנחנו רוצים לחשב את $Q(X,\psi Y,Z)$. נקבל כי:

$$\begin{aligned}Q(X,\psi Y,Z)&=L_x(\psi Y,Z)-(\nabla_x(\psi Y),Z)-(\psi Y,\nabla_x Z)\\&=L_x\psi\cdot(Y,Z)+\psi L_x(Y,Z)-(L_x\psi\cdot Y,Z)-\psi(\nabla_x Y,Z)-\psi(Y,\nabla_x Z)\\&=\cancel{L_x\psi\cdot(Y,Z)}+\psi L_x(Y,Z)-\cancel{L_x\psi(Y,Z)}-\psi(\nabla_x Y,Z)-\psi(Y,\nabla_x Z)\\&=\psi\left(L_x(Y,Z)-(\nabla_x Y,Z)-(Y,\nabla_x Z)\right)\\&=\psi Q(X,Y,Z)\end{aligned}$$

באופן דומה עבור מקדמים ל X ולZ. ■

14/12/

פרק 9

נגזרת קווריאנטית Levi-Civita

9.1 קומוטטור של שדות וקטוריים

קומוטטור (Commotator) היא איזשהי פעולה שלאו דווקא קשורה לגיאומטריה רימנית. נרצה להגדיר אותה.

נניח שיש לנו תחום $U \subset \mathbb{R}^n$, ויש לנו שדה וקטורי $X \in \text{Vect}(U)$ ונגזרת: $L_x : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ השולחת את $f \mapsto \mathrm{d}f(x) = \sum_{i=1}^n X_i(q) \frac{\partial f}{\partial q_i}(q)$ (מדובר באופרטור דיפרנציאלי מסדר ראשון).

כעת נניח שיש לנו זוג של שדות וקטוריים, $X, Y \in \text{Vect}(U)$ ונרצאה להתבונן בהרכבה של הנגזרת: $L_x L_y(f) = L_x(L_y f)$ נבחין כי מדובר באופרטור דיפרנציאלי מסדר שני (וכמו כן גם $L_y L_x(f)$ הינו אופרטור דיפרנציאלי מסדר שני.

משפט 9.1.1

עבור כל $X, Y \in \text{Vect}(U)$ קיים באופן יחיד שדה וקטורי $z \in \text{Vect}(U)$ כך ש: $L_x L_y - L_y L_x = L_z$.

הגדרה 9.1.2 תחת הגדרות המשפט, נסמן $Z = [X, Y]$, ונקרא לו הקומוטטור של X, Y.

הערה 9.1.3 A, B מטריצות $n \times n$, נגדיר את הקומוטטור של המטריצות להיות: $[A, B] = AB - BA$.

כעת נוכיח את המשפט: **הוכחה:** נחשב:

$$\begin{aligned} L_Y f &= \sum Y_j \frac{\partial f}{\partial q_j} \\ L_x L_y f &= \sum X_i \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum Y_j \frac{\partial f}{\partial q_j} \right) \\ &= \sum X_i Y_j \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_j} + \sum X_i \frac{\partial Y_j}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial q_j} \end{aligned}$$

כעת נחשב את $L_y L_x f$:

$$L_y L_x f = \sum Y_i X_j \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_j} + \sum Y_j \frac{\partial X_j}{\partial q_i} \frac{\partial f}{\partial q_j}$$

אבל מכיוון ש $\frac{\partial^2 f}{\partial q_j \partial q_i} = \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_j}$ נקבל כי: $\sum X_i Y_j \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_j} = \sum Y_i X_j \frac{\partial^2 f}{\partial q_i \partial q_j}$. ולכן:

$$(L_x L_y - L_y L_x) f = \sum_{j=1}^n \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n \left(X_i \frac{\partial Y_j}{\partial q_i} - Y_i \frac{\partial X_j}{\partial q_i} \right) \right)}_{Z_j} \frac{\partial f}{\partial q_j}$$

כלומר קיבלנו כי:

$$Z_j = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial X_j}{\partial q_i} - Y_i \frac{\partial X_j}{\partial q_i}$$

כלומר קיבלנו כי:

$$(L_x L_y - L_y L_x) f = \sum_{j=1}^{n} Z_j \frac{\partial f}{\partial q_j} = L_z f$$

עבור: $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \text{Vect}(U)$. ■

דוגמה 9.1.4 : נקח את התחום U עם קואורדינטות $q_1, \ldots, q_n$ ו: $i \to \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\partial}{\partial q_i} = e_i$. נבחין כי: $[e_i, e_j] = 0$.

לסיכום, קיבלנו כי הקומוטטור מוגדר באופן הבא:

$$\boxed{([X,Y])_j = \sum_{i=1}^{n} X_i \frac{\partial Y_j}{\partial q_i} - Y_i \frac{\partial X_j}{\partial q_i}}$$

✎ **תרגיל 9.1.5 :**

1. $[\cdot, \cdot] : \text{Vect}(U) \times \text{Vect}(U) \to \text{Vect}(U)$ לינארית מעל $\mathbb{R}$.
2. $[X,Y] = -[Y,X]$.
3. חוק יעקובי: $\forall X, Y, Z \in \text{Vect}(U)$ מתקיים:

$$[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$$

9.2 נגזרת קווריאנטית סימטרית

דוגמה 9.2.1 : נבתונן בתחום $U \subset \mathbb{R}^n$ עם קואורדינטות $q_1, \ldots, q_n$. ובנגזרת הקווריאנטית האוקלידית: $\tilde{\nabla}$.
אז:

$$[X,Y] = \tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X$$

הוכחה:

$$\tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X = \sum X_i \frac{\partial Y}{\partial q_i} - Y_i \frac{\partial X}{\partial q_j}$$

(אנחנו מסתמכים כאל על כך ש: $\tilde{\nabla}_{e_i} X = \frac{\partial X}{\partial q_i}$). ■

הגדרה 9.2.2 נגזרת קווריאנטית ∇ נקראת סימטרית אם לכל $X, Y \in \text{Vect}(U)$ $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$.

טענה 9.2.3

∇ היא סימטרית אמ"מ $\Gamma^k_{i,j} = \Gamma^k_{j,i}$.

הערה 9.2.4 אם ∇ היא סימטרית אז פיתול של $\nabla = 0$ (torsion-free).

הוכחה: נניח כי ∇ סימטרית אז:

$$\nabla_{e_i}e_j - \nabla_{e_j}e_i = [e_i, e_j] = 0$$

ולכן:

$$\begin{array}{ccc} \nabla_{e_i}e_j & = & \nabla_{e_j}e_i \\ \| & & \| \\ \sum \Gamma_{i,j}^k e_k & = & \sum \Gamma_{j,i}^k e_k \end{array}$$

כלומר $\Gamma_{i,j}^k = \Gamma_{j,i}^k$ כנדרש.

כעת בכיוון ההפוך, נתו כי $\forall i, j, l$ מתקיים $\Gamma_{i,j}^k = \Gamma_{j,i}^k$ אז נקבל כי:

$$\nabla_{e_i}e_j = \nabla_{e_j}e_i$$

באופן דומה לכיוון השני.

אנחנו צריכים להוכיח כי: $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$ לכל X, Y. נבחין כי:

$$\begin{cases} X = \sum X_i e_i \\ Y = \sum Y_j e_j \end{cases}$$

כעת:

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \sum X_i \nabla_{e_i}\left(\sum Y_j e_j\right) \\ &= \sum X_i \frac{\partial Y_i}{\partial q_i} e_j + \sum X_i Y_j \nabla_{e_i} e_j \end{aligned}$$

וכמו כן:

$$\nabla_Y X = \sum Y \frac{\partial X_j}{\partial q_i} e_j + \sum Y_i X_j \nabla_{e_j} e_i$$

אבל נבחין כי:

$$\sum X_i Y_j \nabla_{e_i} e_j = \sum Y_i X_j \nabla_{e_j} e_i$$

(ממה שראינו בהתחלה) ולכן:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_i \left(X_i \frac{\partial Y_j}{\partial q_i} - Y_i \frac{\partial X_j}{\partial q_i}\right)\right) e_j = [X, Y]$$

כנדרש. ■

תרגיל 9.2.5 : נניח כי $X, Y \in \mathrm{Vect}(U)$ ונניח ∇ נגזרת קוואריאנטית. נגדיר:

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

הוכיחו כי: $T(X, Y)(q)$ תלוי רק בערכים של X, Y בנקודה q.

רמז: הוכיחו כי $T(\varphi X, \psi Y) = \varphi\psi T(X, Y)$ לכל $\varphi, \psi \in C^\infty(U)$.

הערה 9.2.6 ל T הנ"ל יש שם מיוחד: Torsion tensor.

טענה 9.2.7

$M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ על־משטח. ∇ נגזרת קווריאנטית טבעית. אז ∇ היא סימטרית.

הוכחה: נבחין כי:

$$\nabla_X Y = \tilde{\nabla}_X Y - B(X,Y)\,\nu$$

וכמו כן כי:

$$\nabla_Y X = \tilde{\nabla}_Y X - B(Y,X)\,\nu$$

מכיוון ש B סימטרית אז: $B(X,Y) = B(Y,X)$ ולכן:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = \tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X = [X,Y]$$

כנדרש. ∎

9.3 משפט Levi-Civita

משפט 9.3.1 Levi-Civita

אם $U \subset \mathbb{R}^n$ תחום, וg מטריקה רימנית. אז קיימת ויחידה, נגזרת קווריאנטית ∇ על U כך ש:

1. ∇ שומרת את g.
2. ∇־סימטרית.

הוכחה: ראשית נתחיל בכמה סימונים:

$$\begin{aligned} e_i &= \frac{\partial}{\partial q_i} \\ g &= (g_{i,j}(q)) \\ g^{-1} &= \left(g^{ij}\right) \\ g_{i,j} &= (e_i, e_j)_g = (e_i, e_j) \end{aligned}$$

נזכור כי: ∇ סימטרית $\Longleftrightarrow$ $\Gamma^k_{i,j} = \Gamma^k_{j,i}$. ו ∇ שומרת את g אומר כי:

$$\underbrace{L_{e_k} \underbrace{(e_i, e_j)}_{g_{i,j}}}_{\frac{\partial g_{i,j}}{\partial q_k}} = \underbrace{(\nabla_{e_k} e_i, e_j)}_{\sum \Gamma^\alpha_{k,i} e_\alpha} + \underbrace{(e_i, \nabla_{e_k} e_j)}_{\sum \Gamma^\alpha_{k,j} e_\alpha}$$

כלומר:

$$\frac{\partial g_{i,j}}{\partial q_k} = \sum_\alpha \Gamma^\alpha_{k,i} \overbrace{(e_\alpha, e_j)}^{g_{\alpha,j}} + \sum \Gamma^\alpha_{k,j} \overbrace{(e_\alpha, e_i)}^{g_{\alpha,i}}$$

ולכן:

$$\boxed{\frac{\partial g_{i,j}}{\partial q_k} = \sum_\alpha \Gamma^\alpha_{k,i} g_{\alpha,j} + \Gamma^\alpha_{k,j} g_{\alpha,i} \qquad \forall i,j,k}$$

נגדיר: $\sum_\alpha g_{\alpha,j}\Gamma^\alpha_{k,i} =: \Gamma_{j,k,i}$. בגלל הסימטריות של ∇ נקבל כי: $\Gamma_{j,k,i}=\Gamma_{j,i,k}$. ולכן נקבל כי:

$$\frac{\partial g_{i,j}}{\partial q_k}=\Gamma_{j,k,i}+\Gamma_{i,k,j}$$

ובאופן דומה, עם שינויים על האינדקסים נקבל כי:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g_{k,i}}{\partial q_j} &= \Gamma_{i,j,k}+\Gamma_{k,j,i}\\ \frac{\partial g_{j,k}}{\partial q_i} &= \Gamma_{k,i,j}+\Gamma_{j,i,k}\end{aligned}$$

כעת, נחבר את השניים הראשונות ונחסר את השלישית ונקבל:

$$\frac{\partial g_{i,j}}{\partial q_k}+\frac{\partial g_{k.i}}{\partial q_j}-\frac{\partial g_{j,k}}{\partial q_i}=\cancel{\Gamma_{j,k,i}}+\Gamma_{i,k,j}+\Gamma_{i,j,k}+\cancel{\Gamma_{k,j,i}}-\cancel{\Gamma_{k,i,j}}-\cancel{\Gamma_{j,i,k}}$$

צמצומים בגלל הסימטריה. בסה"כ קיבלנו כי:

$$\frac{\partial g_{i,j}}{\partial q_k}+\frac{\partial g_{k.i}}{\partial q_j}-\frac{\partial g_{j,k}}{\partial q_i}=2\Gamma_{i,j,k}$$

ולכן:

$$\Gamma_{i,j,k}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{i,j}}{\partial q_k}+\frac{\partial g_{k.i}}{\partial q_j}-\frac{\partial g_{j,k}}{\partial q_i}\right)$$

כעת, אנחנו רוצים לחזור לסימני Christoffel הרגילים. נזכור כי: $\Gamma_{i,j,k}=\sum g_{\alpha,i}\Gamma^\alpha_{j,k}$. לכן:

$$\sum_i g^{p,i}\Gamma_{i,j,k}=\sum_\alpha \underbrace{g^{p,i}g_{\alpha,i}}_{\delta_{a,p}}\Gamma^\alpha_{j,k}=\Gamma^p_{j,k}$$

דהיינו:

$$\Gamma^p_{j,k}=\frac{1}{2}\sum_i g^{p,i}\left(\frac{\partial g_{i,j}}{\partial q_k}+\frac{\partial g_{k,i}}{\partial q_j}-\frac{\partial g_{j,k}}{\partial q_i}\right)$$

כלומר מצאנו את סימני Christoffel, וכעת אנחנו יכולים בקלות לבדוק שה∇ אכן משמרת את g. נבחין כי מההנחות שהיא סימטרית ושומרת את g קיבלנו הגדרה מדוייקת של סימני Christoffel ולכן היא גם יחידה. ■

דוגמה 9.3.2 משטח סיבוב: נזכור כי:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}u^2 + f\left(u\right)^2 \mathrm{d}v^2$$

כאשר $u = q_1$ ו $v = q_2$, קיבלנו כי: $g_{1,1} = 1,\ g_{1,2} = 0,\ g_{2,2} = f^2$ וכמו כן:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f^2 \end{pmatrix}, \quad g^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{f^2} \end{pmatrix}$$

לכן:

$$g^{11} = 1,\ g^{1,2} = 0,\ g^{2,2} = \frac{1}{f^2}$$

אנחנו רוצים לחשב את $\Gamma^p_{j,k}$.נבחין כי במקרה שלנו, הנגזרת החלקית היחידה $\frac{\partial g_{i,j}}{\partial q_k}$ ששונה מ0 היא: $\frac{\partial g_{2,2}}{\partial q_1} = 2ff'$ (מכיוון ש f היא פונקציה רק של u והיתר קבועים).

$g^{1,2} = 0$ בנוסחה: $\Gamma^p_{j,k} = \frac{1}{2}\sum_i g^{p,i}\left(\frac{\partial g_{i,j}}{\partial q_k} + \frac{\partial g_{k,i}}{\partial q_j} - \frac{\partial g_{j,k}}{\partial q_i}\right)$. לכן נשארנו רק עם $p = i$. נקבל את המקרים:

1. $p = i = 2,\ j = 2,\ k = 1$:

$$\Gamma^2_{2,1} = \frac{1}{2}\left(g^{2,2}\cdot\frac{\partial g_{2,2}}{\partial q_1}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{f^2}\left(2ff'\right) = \frac{f'}{f}$$

ומסימטריה אנחנו יודעים גם כי:

$$\Gamma^2_{1,2} = \frac{f'}{f}$$

2. **כתרגיל, לחשב את $\Gamma^1_{2,2}$.**

פרק 10

עקמומיות של ∇

10.1 הגדרות

הגדרה 10.1.1 לכל $X,Y,Z\in\text{Vect}\left(U\right)$, נגדיר:

$$R\left(X,Y\right)Z:=\nabla_{X}\nabla_{Y}Z-\nabla_{Y}\nabla_{X}Z-\nabla_{\left[X,Y\right]}Z$$

נבחין כי מדובר בפעולה:

$$\text{Vect}\left(U\right)\times\text{Vect}\left(U\right)\times\text{Vect}\left(U\right)\to\text{Vect}\left(U\right)$$

טענה 10.1.2

$\left(R\left(X,Y\right)Z\right)\left(q\right)$ תלוי רק בערכים של X,Y,Z בנקודה q.

נבחין כי $R\left(x,y\right)$ נותן לנו העתקה: $R\left(x,y\right):T_{q}U\to T_{q}U$ כאשר: $z\mapsto R\left(x,y\right)z$.
$R\left(x,y\right)$ היא למעשה העתקה בילינארית:

$$T_{q}U\times T_{q}U\to\text{End}\left(T_{q}U\right)$$

(כאשר $\text{End}\left(T_{q}U\right)$ הם כל האופרטורים הלינאריים). ונקראת: אופרטור של עקמומיות.

תרגיל 10.1.3 : אופרטור עקמומיות עבור מטריקה אוקלידית.

פתרון: g אוקלידית, לכן, נגזרת Levi-Civita היא $\tilde{\nabla}$ ולכן עבור X,Y,Z נקבל:

$$\tilde{\nabla}_Y Z=\sum Y_i\frac{\partial Z}{\partial q_i}\Rightarrow\left(\tilde{\nabla}_Y Z_j\right)=L_Y Z_j$$

ולכן:

$$\begin{aligned}\left(\tilde{\nabla}_X\tilde{\nabla}_Y Z-\tilde{\nabla}_Y\tilde{\nabla}_X Z\right)_j &= \left(L_X L_Y-L_Y L_X\right)Z_j\\ &= L_{[X,Y]}Z_j\\ &= \tilde{\nabla}_{[X,Y]}Z_j\end{aligned}$$

ולכן:

$$\tilde{\nabla}_X\tilde{\nabla}_Y Z-\tilde{\nabla}_Y\tilde{\nabla}_X Z-\tilde{\nabla}_{[X,Y]}Z=0$$

כלומר קיבלנו כי $R\left(X,Y\right)Z=0$ עבור $\tilde{\nabla}$.

15/12/

נרצה כעת להוכיח את הטענה: **הוכחה:** אנחנו רוצים להוכיח את הלמה הבאה:

למה 10.1.4

$\forall\varphi,\psi,\theta\in C^{\infty}\left(U\right)$ מתקיים:

$$R\left(\varphi X,\psi Y\right)\left(\theta Z\right)=\varphi\psi\theta R\left(X,Y,Z\right)$$

המסקנה מהלמה מניבה כי $\left(R\left(X,Y\right)Z\right)\left(q\right)$ תלוי רק ב: $X\left(q\right),Y\left(q\right),Z\left(q\right)$. (כתרגיל).

נוכיח את הלמה: **הוכחה:** נבחין כי לכל $X,Y\in T_qU$ אופרטור העקמומיות $R\left(X,Y\right):T_qU\to T_qU$ הוא אופרטור לינארי. אנחנו רוצים לשאול האם:

$$R\left(X,Y\right)\left(\varphi Z\right)=\varphi R\left(X,Y\right)Z$$

לכל $\varphi\in C^{\infty}\left(U\right)$. נבחין כי:

$$\begin{aligned}\nabla_X\nabla_Y\left(\varphi Z\right) &= \nabla_X\left[\varphi\nabla_Y Z+L_Y\varphi\cdot Z\right]\\ &= \varphi\nabla_X\nabla_Y Z+\underbrace{\left[L_x\varphi\nabla_Y Z+L_Y\varphi\nabla_X Z\right]}_{I}+L_X L_Y\varphi\cdot Z\end{aligned}$$

נבחין כי הביטוי בסוגריים מרובעים $\left(I\right)$ סימטרי ביחס ל X,Y. דהיינו אם נכתוב:

$$\nabla_Y\nabla_X\left(\varphi Z\right)=\varphi\nabla_Y\nabla_X Z+I+L_Y L_X\varphi Z$$

ולכן:

$$\begin{aligned}R\left(X,Y\right)\left(\varphi Z\right) &= \nabla_X\nabla_Y\left(\varphi Z\right)-\nabla_Y\nabla_X\left(\varphi Z\right)-\nabla_{[X,Y]}\left(\varphi Z\right)\\ &= \varphi\nabla_X\nabla_Y Z+\cancel{I}+\cancel{L_X L_Y\varphi\cdot Z}-\varphi\nabla_Y\nabla_X Z-\cancel{I}-\cancel{L_Y L_X\varphi\cdot Z}-\cancel{L_{[X,Y]}\varphi\cdot Z}-\varphi\nabla_{[X,Y]}Z\\ &= \varphi\left[\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z\right]\\ &= \varphi\left(R\left(X,Y\right)Z\right)\end{aligned}$$

מכיוון ש $L_{[X,Y]}\varphi\cdot Z=L_X L_Y\varphi\cdot Z-L_Y L_X\varphi\cdot Z$. ■

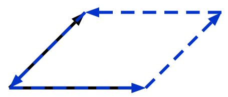
תרגיל 10.1.5 : לסיים את ההוכחה. $R(\varphi X,Y)Z=\varphi(R(X,Y)Z)$.

רמז: למה שווה הקומוטטור $[\varphi X,Y]$ כאשר $\varphi\in C^{\infty}(U)$ ו X,Y שדות וקטורים?

■

10.2 משמעות גאומטרית של אופרטור העקמומיות

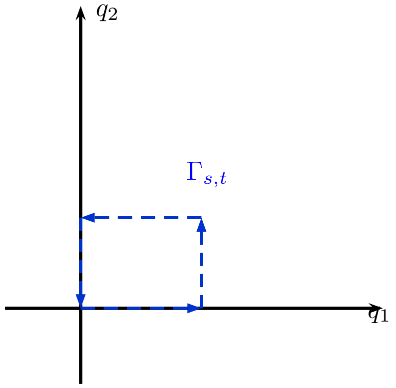
יהי $U\in\mathbb{R}^{n}$ תחום ו ∇ נגזרת קוואריאנטית. נקח וקטורים u,v בלתי תלויים ב T_qU. אנחנו בונים מקבילית בין שני הוקטורים. ואז עושים מסלול של ללכת את u ואז ללכת בכיוון של v (רק כעת אנחנו מתילים מהנקודה $q+u$), ואז ללכת את $-u$ ואז את $-v$.



בגאומטריה אוקלידית, אנחנו נחזור לאותה נקודה. אבל האם תמיד? (התשובה היא לא).

בוחרים קורואדינטות $q_1,\ldots,q_n$ ב U כך ש $u=\frac{\partial}{\partial q_1},\ v=\frac{\partial}{\partial q_2}$.

נניח כי $q_3=q_4=\ldots=q_n=0$.



כאשר $s,t>0$ אנחנו מבצעים $P_{s,t}:T_0U\to T_0U$ הזזה במקביל לאורך $\Gamma_{s,t}$.

משפט 10.2.1

$R(u,v)=-\lim_{s,t\to0}\frac{1}{st}(P_{s,t}-\mathbb{1})$.

לשם הוכחת המשפט נצטרך תכונות עזר:

למה 10.2.2

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}P_t^a x(t)=P_t^a D_tX(t)$$

הוכחה: נבחין כי:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}P_t^aX(t) &= \lim_{\delta\to0}\frac{1}{\delta}\left[P_{t+\delta}^aX(t+\delta)-P_t^aX(t)\right]\\ &= \lim_{\delta\to0}P_t^a\left(\frac{1}{\delta}\left(P_{t+\delta}^tX(t+\delta)-X(t)\right)\right)\\ &= P_t^a\lim_{\delta\to0}\underbrace{\left(\frac{P_{t+\delta}^tX(t+\delta)-X(t)}{\delta}\right)}_{D_tX}\\ &= P_t^aD_tX\end{aligned}$$

■

מסקנה 10.2.3 נוסחת Newton-Leibniz עבור נגזרת קוווריאנטית

קיבלנו את *Newton-Leibniz*:

$$\left(P_b^a X(b)\right) - X(a) = \int_a^b \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(P_t^a X(t)\right)}_{P_t^a D_t(X)} \mathrm{d}t = \int_a^b P_t^a D_t X \mathrm{d}t$$

למה 10.2.4 הלמה של Hadamard

φ פונקציה חלקה בסביבה של $0 \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(0) = 0$. אז קיימות פונקציות חלקות $g_1(x), \ldots, g_n(x)$ כך ש: $\varphi(x) = \sum x_i g_i(x)$ ויותר מכך: $g_i(0) = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(0)$.

הוכחה: נתבונן ב:

$$\begin{aligned}
\varphi(x) - \varphi(0) &= \int_0^1 \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(tx)}_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(tx_1,\ldots,tx_n) = \sum \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(tx)x_i} \mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \sum x_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(tx_1, \ldots, tx_n)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum x_i \underbrace{\int_0^1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(tx)\,\mathrm{d}t}_{g_i(x)} \\
&= \sum x_i g_i(x)
\end{aligned}$$

ונבחין כי:

$$g_i(0) = \int_0^1 \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(0)\,\mathrm{d}t = \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(0)$$

■

מסקנה 10.2.5

אם יש לנו עקומה $\gamma(t)$ ושדה וקטורי $X(t)$ לאורך γ. נניח כי $X(0) = 0$. אז קיים שדה וקטורי $Y(t)$ לאורך γ עם התכונה: $X(t) = tY(t)$ ו: $Y(0) = D_t X\,|_{t=0}$.

הוכחה: נקח בסיס $E_1, \ldots, E_n$ לאורך γ: $D_t E_i = 0$. אז אנחנו יכולים לרשום: $X = \sum X_i(t) E_i(t)$. אנחנו יודעים כי: $X_i(0) = 0$ וכעת בעזרת הלמה של Hadamard נמצא: $X_i(t) = tY_i(t)$, ונקבל:

$$\begin{aligned}
D_t X\,|_{t=0} &= D_t\left(\sum X_i(t) E_i(t)\right)|_{t=0} \\
&= \sum X_i'(0) E_i(0) = Y(0)
\end{aligned}$$

■

22/12/

כעת אנחנו רוצים להוכיח את משפט 10.2.1. **הוכחה:** עבור $n = 2$:

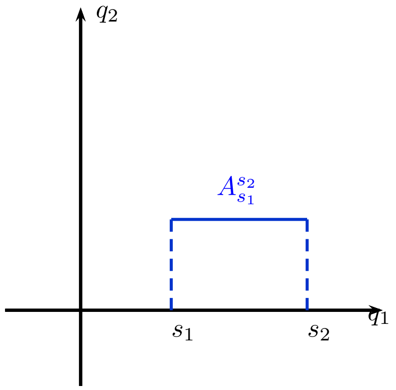
נבחר וקטור w ונעביר אותו במקביל לאורך ציר q_1. כעת נגדיר קווים מקבילים לציר q_2 ועבור הקו $x = s$, נעביר במקביל את הוקטור אשר קיבלנו מהעברה במקביל לאורך ציר q_1 לאורך הקו.

בכך אנחנו מקבלים למעשה העברה של הוקטור לכל אורך המישור, כלומר קיבלנו שדה וקטורי $Z(s,t)$ כך ש: $Z(0) = w$ ו:

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_1} Z(q_1, 0) &= 0 \\
\nabla_{e_2} Z(q_1, q_2) &= 0
\end{aligned}$$

לכל q_1, q_2.

כעת נסמן את העברה במקביל לאורך מסילה אשר לא מתלכדת עם הראשית בקו האופקי ע"י $A_{s_1}^{s_2}$:



(למעשה אנחנו צריכים לסמן עבור כל ערך של q_2, אבל אנחנו לא עושים את זה על מנת לא לזבל את הסימון יותר מידי.

באופן דומה על מסילה המקבילה ל q_2 בין t_1 ל t_2 נסמן ב $B_{t_1}^{t_2}$.

אנחנו מקבלים כי:

$$Z(s,t) = B_0^t A_0^s w$$

אנחנו כעת צריכים לחשב:

$$\begin{aligned} P_{s,t}w - w &= B_t^0 A_s^0 \underbrace{B_0^t A_0^s w}_{Z(s,t)} - w \\ &= B_t^0 A_s^0 Z(s,t) - w \end{aligned}$$

ומתקיים:

$$w = Z(0,0) = B_t^0 Z(0,t)$$

ולכן נקבל כי:

$$\begin{aligned} P_{s,t}w - w &= B_t^0 A_s^0 Z(s,t) - B_t^0 Z(0,t) \\ &= B_t^0 \left[A_s^0 Z(s,t) - Z(0,t)\right] \end{aligned}$$

מNewton-Leibniz נקבל כי:

$$A_s^0 Z(s,t) - Z(0,t) = \int_0^s A_\sigma^0 \nabla_{e_1} Z(\sigma,t)\, \mathrm{d}\sigma$$

אבל $\nabla_{e_1} Z(q_1,0) = 0$ לכן אנחנו מקבלים מHadamard כי קיימת Y כך ש:

$$\nabla_{e_1} Z(\sigma,t) = t \cdot Y(\sigma,t)$$

ומתקיים:

$$Y(\sigma,0) = \nabla_{e_2} \nabla_{e_1} Z(\sigma,0)$$

ואז אנחנו מקבלים כי:

$$\begin{aligned} P_{s,t}w-w &= B_t^0\int_0^s A_\sigma^0\left(tY\left(\sigma,t\right)\right)\mathrm{d}\sigma \\ &= tB_t^0\int_0^s A_\sigma^0 Y\left(\sigma,t\right)\mathrm{d}\sigma \end{aligned}$$

ולכן:

$$\frac{1}{st}\left(P_{s,t}w-w\right)=\frac{\cancel{t}}{s\cancel{t}}\int_0^s B_t^0 A_\sigma^0 Y\left(\sigma,t\right)\mathrm{d}\sigma$$

נבחין כי $A_0^0=\mathbb{1}=B_0^0$. ולכן כאשר $s,t\to 0$ אנחנו ומקבלים כי האינטגרל שווה ל:

$$\underset{s,t\to 0}{\longrightarrow} B_0^0 A_0^0 Y\left(0,0\right)=Y\left(0,0\right)=\nabla_{e_2}\nabla_{e_1}Z\left(0,0\right)=\lim_{s,t\to 0}\frac{P_{s,t}w-w}{st}$$

הערה 10.2.6 אנחנו משתמשים כאן בכך ש:

$$\frac{1}{s}\int_0^s F\left(\sigma\right)\mathrm{d}\sigma=F\left(0\right)$$

זה נכון מכיוון שF שלנו היא חלקה.

כעת אנחנו רוצים לחשב את $R\left(u,v\right)w$ כאשר $v=\underbrace{\frac{\partial}{\partial q_2}}_{e_2},\ u=\underbrace{\frac{\partial}{\partial q_1}}_{e_1}$.

Z הרחבה של w ולכן:

$$\begin{aligned} R\left(u,v\right)w &= \nabla_{e_1}\underbrace{\cancelto{0}{\nabla_{e_2}Z}}-\nabla_{e_2}\nabla_{e_1}Z-\cancelto{0}{\nabla_{\left[e_1,e_2\right]}Z} \\ &= -\nabla_{e_2}\nabla_{e_1}Z\left(0\right) \\ &= -\lim_{s,t\to 0}\frac{P_{s,t}w-w}{st} \end{aligned}$$

כנדרש. ■

הערה 10.2.7 נבחין כי $\nabla_{e_2}Z=0$ בכל קואורדינטה, מהבניה שהעברנו במקביל את הוקטורים מהראשית בכל נקודה, לעומת זאת $\nabla_{e_1}Z=0$ רק לאורך ציר q_1! על כן הוא אינו מתאפס. כמו כן $\left[e_1,e_2\right]=0$ ולכן הנ"ל נכון.

10.3 תכנות אלגבריות של אופרטור עקמומיות

$$R:T_qU\times T_qU\to\mathrm{End}\left(T_qU\right)$$

למה 10.3.1 תכונה 1

$$R\left(X,Y\right)Z=-R\left(Y,X\right)Z$$

דהיינו R אנטי־סימטרית לפי X,Y.

הוכחה: זאת מכיוון ש:

$$R\left(X,Y\right)Z=\nabla_{X}\nabla_{Y}Z-\nabla_{Y}\nabla_{X}Z-\nabla_{\left[X,Y\right]}Z$$

ואילו:

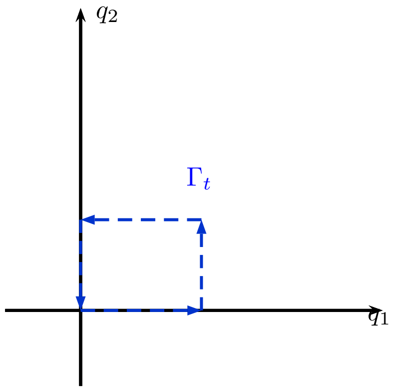
$$R\left(Y,X\right)Z=\nabla_{Y}\nabla_{X}Z-\nabla_{X}\nabla_{Y}-\nabla_{\left[Y,X\right]}Z$$

כלומר השני גורמים הראשונים אכן החליפו סימן, ונבחין כי אנחנו יודעים ש: $\left[X,Y\right]=-\left[Y,X\right]$ ולכן הלמה נכונה. ■

למה 10.3.2 תכונה 3

נניח כי ∇ שומרת את המטריקה, אז האופרטור $R\left(X,Y\right):T_{q}\left(U\right)\to T_{q}\left(U\right)$ (עבור X,Y קבועים) הוא אנטי סימטרי. דהיינו: $R\left(X,Y\right)^{*}=-R\left(X,Y\right)$.

הוכחה: נתבונן שוב בציור:



כאשר האורך של כל צלע היא $\sqrt{t}$ ו P_t הזזה לאורך Γ_t . אנחנו יודעים כי:

$$R\left(X,Y\right)=-\lim_{t\to0}\frac{P_{t}-\mathbb{1}}{t}=-\dot{P}_{t}\left(0\right)$$

(מכיוון ש $P_0=\mathbb{1}$!). P_t איזומטריה (אורתוגונלית) ולכן: $P_tP_t^*=\mathbb{1}$ ו $P_0=\mathbb{1}$. נגזור ונקבל:

$$\dot{P}_{t}P_{t}^{*}+P_{t}\dot{P}_{t}^{*}=0$$

עבור $t=0$ נקבל:

$$P_{0}=P_{0}^{*}=\mathbb{1}$$

ואז אנו מקבלים כי:

$$\dot{P}_{0}+\dot{P}_{0}^{*}=0$$

כלומר $\dot{P}_0$ היא אנטי־סימטרית כלומר: $\dot{P}_0^*=-\dot{P}_0$ ולכן:

$$R\left(X,Y\right)^{*}=-R\left(X,Y\right)$$

כנדרש. ■

28/12/

למה 10.3.3 תכונה 2

נניח ש ∇-סימטרית, אז $\forall X,Y,Z$ מתקיים:

$$R(X,Y)Z+R(Y,Z)X+R(Z,X)Y=0$$

הוכחה: מספיק להוכיח את השיוויון הנ"ל עבור: $e_i=\frac{\partial}{\partial q_i}=X$, $Y=e_j$, $Z=e_k$ כאשר $[e_i,e_j]=0$. זאת מכיוון ש R היא פולילינארית. נבחין כי:

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z+R(Y,Z)X+R(Z,X)Y &= \underbrace{\nabla_{e_i}\nabla_{e_j}e_k-\nabla_{e_j}\nabla_{e_i}e_k}_{R(e_i,e_j)e_k}+\nabla_{e_j}\nabla_{e_k}e_i-\nabla_{e_k}\nabla_{e_j}e_i+\nabla_{e_k}\nabla_{e_i}e_j-\nabla_{e_i}\nabla_{e_k}e_j \\ &= \nabla_{e_i}\left(\nabla_{e_j}e_k-\nabla_{e_k}e_j\right)+\nabla e_j\left(\nabla_{e_k}e_i-\nabla_{e_i}e_k\right)+\nabla e_k\left(\nabla_{e_i}e_j-\nabla_{e_j}e_i\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

(כל אחד מהסוגריים בשורה השנייה מסומן בחץ ל-0.)

הערה 10.3.4 איפה הקומוטטור נעלם ב $R(e_i,e_j)e_k$? הוא נעלם מכיוון ש $[e_i,e_j]=0$.
ובחלק השני הם מתאפסים מההנחה ש ∇ סימטרית.

■

10.4 טנזור עקמומיות

נניח כי ∇ היא נגזרת קווריאנטית Levi-Civita שקשורה למטריקה רימנית g (דהיינו ∇ גם סימטרית וגם שומרת את g).
טנזור העקמומיות:

$$\begin{array}{ccc} T_qU\times T_qU\times T_qU\times T_qU & \to & \mathbb{R} \\ X \quad\; Y \quad\; Z \quad\; W & \mapsto & (R(x,y)Z,W) \end{array}$$

נבחין כי מהתכונה הראשונה שראינו בחלק הקודם אנו יודעים כי:

$$R(X,Y,Z,W)=-R(Y,X,Z,W)$$

ומהתכונה השלישית אנו מקבלים כי:

$$R(X,Y,Z,W)=-R(X,Y,W,Z)$$

למה 10.4.1 תכונה 4

$$R(X,Y,Z,W)=R(Z,W,X,Y)$$

נבחין כי זה קצת מוזר, מכיוון ש X,Y ו Z,W משחקים תפקידים ממש שונים, אין למרצה הסבר אינטואיטיבי לזה, אבל נוכיח את זה. **הוכחה:** נגדיר:

$$S(X,Y,Z,W)=(R(X,Y)Z,W)+(R(Y,Z)X,W)+(R(Z,X)Y,W)$$

נבחין כי מהתכונה השניה, אנו מקבלים כי:

$$S(X,Y,Z,W)=0$$

כעת נכתוב:

$$S(X,Y,Z,W)+S(Y,Z,W,X)-S(Z,W,X,Y)-S(W,X,Y,Z)=0$$

מכיוון שכל אחד מהם שווה לאפס, אבל אנחנו יכולים גם לכתוב כי:

$$\begin{aligned}S(X,Y,Z,W)+S(Y,Z,W,X)-S(Z,W,X,Y)-S(W,X,Y,Z)=\\ R(X,Y,Z,W)+R(Y,Z,X,W)+R(Z,X,Y,W)+\\ +R(Y,Z,W,X)+R(Z,W,Y,X)+R(W,Y,Z,X)-\\ -R(Z,W,X,Y)-R(W,X,Z,Y)-R(X,Z,W,Y)-\\ -R(W,X,Y,Z)-R(X,Y,W,Z)-R(Y,W,X,Z)\end{aligned}$$

כעת נבחין כי כתבנו

$$\begin{aligned}S(X,Y,Z,W)+S(Y,Z,W,X)-S(Z,W,X,Y)-S(W,X,Y,Z)=\\ \boxed{R(X,Y,Z,W)}+R(Y,Z,X,W)+R(Z,X,Y,W)+\\ +R(Y,Z,W,X)+R(Z,W,Y,X)+R(W,Y,Z,X)-\\ -R(Z,W,X,Y)-R(W,X,Z,Y)-R(X,Z,W,Y)-\\ -R(W,X,Y,Z)-\boxed{R(X,Y,W,Z)}-R(Y,W,X,Z)\end{aligned}$$

המסומנים נותנים לנו:

$$R(X,Y,Z,W)-R(X,Y,W,Z)=2R(X,Y,Z,W)$$

כמו כן:

$$\begin{aligned}S(X,Y,Z,W)+S(Y,Z,W,X)-S(Z,W,X,Y)-S(W,X,Y,Z)=\\ R(X,Y,Z,W)+\boxed{R(Y,Z,X,W)}+R(Z,X,Y,W)+\\ +\boxed{R(Y,Z,W,X)}+R(Z,W,Y,X)+R(W,Y,Z,X)-\\ -R(Z,W,X,Y)-R(W,X,Z,Y)-R(X,Z,W,Y)-\\ -R(W,X,Y,Z)-R(X,Y,W,Z)-R(Y,W,X,Z)\end{aligned}$$

המסומנים הנ"ל מתבטלים לפי תכונה שראינו ולכן הם מצטמצמים.
כמו כן:

$$\begin{aligned}S(X,Y,Z,W)+S(Y,Z,W,X)-S(Z,W,X,Y)-S(W,X,Y,Z)=\\ R(X,Y,Z,W)+\cancel{R(Y,Z,X,W)}+\boxed{R(Z,X,Y,W)}+\\ +\cancel{R(Y,Z,W,X)}+R(Z,W,Y,X)+R(W,Y,Z,X)-\\ -R(Z,W,X,Y)-R(W,X,Z,Y)-\boxed{R(X,Z,W,Y)}-\\ -R(W,X,Y,Z)-R(X,Y,W,Z)-R(Y,W,X,Z)\end{aligned}$$

נבחין כי הם מתחלפים פעמיים ולכן הם גם מתבטלים ומצטמצמים לאפס. בדומה ל:

$$
\begin{aligned}
S(X,Y,Z,W)+S(Y,Z,W,X)-S(Z,W,X,Y)-S(W,X,Y,Z) &= \\
&R(X,Y,Z,W)+\cancel{R(Y,Z,X,W)}+\cancel{R(Z,X,Y,W)}+ \\
&+\cancel{R(Y,Z,W,X)}+R(Z,W,Y,X)+\boxed{R(W,Y,Z,X)}- \\
&-R(Z,W,X,Y)-R(W,X,Z,Y)-\cancel{R(X,Z,W,Y)}- \\
&-R(W,X,Y,Z)-R(X,Y,W,Z)-\boxed{R(Y,W,X,Z)}
\end{aligned}
$$

וגם כמובן שהנ"ל מתבטלים:

$$
\begin{aligned}
S(X,Y,Z,W)+S(Y,Z,W,X)-S(Z,W,X,Y)-S(W,X,Y,Z) &= \\
&R(X,Y,Z,W)+\cancel{R(Y,Z,X,W)}+\cancel{R(Z,X,Y,W)}+ \\
&+\cancel{R(Y,Z,W,X)}+R(Z,W,Y,X)+\cancel{R(W,Y,Z,X)}- \\
&-R(Z,W,X,Y)-\boxed{R(W,X,Z,Y)}-\cancel{R(X,Z,W,Y)}- \\
&-\boxed{R(W,X,Y,Z)}-R(X,Y,W,Z)-\cancel{R(Y,W,X,Z)}
\end{aligned}
$$

ולבסוף, נסתכל על הזוגות שנשארו:

$$
\begin{aligned}
S(X,Y,Z,W)+S(Y,Z,W,X)-S(Z,W,X,Y)-S(W,X,Y,Z) &= \\
&\boxed{R(X,Y,Z,W)}+\cancel{R(Y,Z,X,W)}+\cancel{R(Z,X,Y,W)}+ \\
&+\cancel{R(Y,Z,W,X)}+\boxed{\boxed{R(Z,W,Y,X)}}+\cancel{R(W,Y,Z,X)}- \\
&-\boxed{\boxed{R(Z,W,X,Y)}}-\cancel{R(W,X,Z,Y)}-\cancel{R(X,Z,W,Y)}- \\
&-\cancel{R(W,X,Y,Z)}-\boxed{R(X,Y,W,Z)}-\cancel{R(Y,W,X,Z)}
\end{aligned}
$$

כלומר קיבלנו כי:

$$
\begin{aligned}
0 &\overset{!}{=} S(X,Y,Z,W)+S(Y,Z,W,X)-S(Z,W,X,Y)-S(W,X,Y,Z) \\
&= 2R(X,Y,Z,W)-2R(Z,W,X,Y)
\end{aligned}
$$

כלומר:

$$R(X,Y,Z,W)=R(Z,W,X,Y)$$

כנדרש. ■

משפט 10.4.2

יהיו $x,y\in T_qU$ וקטורים בלתי תלויים. נגדיר:

$$K(\alpha):=K(x,y):=\frac{R(x,y,y,x)}{|x|^2|y|^2-(x,y)^2}$$

אז $K(x,y)$ תלוי רק במישור דו מימדי: $\alpha=\text{span}_{\mathbb{R}}(x,y)$ (כאשר $\alpha\subset T_qU$ ומתקיים $\dim_\alpha=2$).

הערה 10.4.3 $K(\alpha)$ הנ"ל נקראת עקמומיות חתך (sectional curvature).

לפני שנגש למשפט נתחיל מהלמה:

למה 10.4.4

תהי $\phi(x,y,z,w)$ תבנית פולי־לינארית כך ש $\phi(x,y,z,w)=-\phi(y,x,z,w)$, ו: $\phi(x,y,z,w)=-\phi(x,y,w,z)$ (כלומר היא אנטי סימטרית ב x,y וב z,w בנפרד).

ונגדיר: $\psi(x,y)=\phi(x,y,y,x)$, $\alpha=\text{span}(x,y)$, ו $A:\alpha\to\alpha$ טרנספורמציה לינארית.

אז:

$$\psi(Ax,Ay)=(\det A)^2\,\psi(x,y)$$

הוכחה: נניח ש:

$$\begin{aligned}Ax&=ax+by\\Ay&=cx+dy\end{aligned}$$

עבור $a,b,c,d\in\mathbb{R}$. נחשב:

$$\psi(ax+by,cx+dy)=\phi(ax+by,cx+dy,cx+dy,ax+by)$$

נבחין כי אם היה לנו $\phi(x,x,\cdot,\cdot)$ היינו מקבלים כי זה מתאפס מאנטי סימטריות. כעת נבחין כי אנחנו יכולים לקבל מהסימטריה (עד כדי סימן) את האפשרויות הבאות:

$$\begin{array}{ccc}\phi(x,y,y,x) & \oplus & a^2d^2\\ \phi(x,y,x,y) & \ominus & adcb\\ \phi(y,x,y,x) & \ominus & bcda\\ \phi(y,x,x,y) & \oplus & b^2c^2\end{array}$$

כלומר, אם נבנה את $\phi(ax+by,cx+dy,cx+dy,ax+by)$ מהסכימה של איברים מהצורה הנ"ל נקבל:

$$\begin{aligned}\psi(ax+by,cx+dy)&=\phi(ax+by,cx+dy,cx+dy,ax+by)\\&=\underbrace{\left(a^2d^2-2adbc+b^2c^2\right)}_{(ad-bc)^2=(\det A)^2}\phi(x,y,y,x)\\&=(\det A)^2\,\psi(x,y)\end{aligned}$$

■

תרגיל 10.4.5 : נגדיר:

$$S(x,y,z,w)=(y,z)(x,w)-(x,z)(y,w)$$

S אנטיסימטרית לפי x,y וגם לפי z,w.

כעת נוכיח את המשפט: **הוכחה:** נגדיר:

$$\begin{aligned}\phi_1(x,y,z,w)&=R(x,y,z,w)\\\psi_1(x,y)&=R(x,y,y,x)\\\phi_2(x,y,z,w)&=S(x,y,z,w)\\\psi_2(x,y)&=S(x,y,y,x)\end{aligned}$$

(כאשר מדובר בS מהתרגיל הנ"ל).

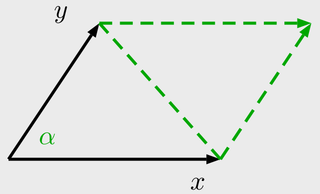
הערה 10.4.6 $K\left(x,y\right)=\frac{\psi_{1}\left(x,y\right)}{\psi_{2}\left(x,y\right)}$.

כעת, לוקחים $A:\alpha\to\alpha$ לינארית, ואנו רואים כי:

$$K\left(Ax,Ay\right)=\frac{\psi_{1}\left(Ax,Ay\right)}{\psi_{2}\left(Ax,Ay\right)}=\frac{\cancel{\left(\det A\right)^{2}}\psi_{1}\left(x,y\right)}{\cancel{\left(\det A\right)^{2}}\psi_{2}\left(x,y\right)}=K\left(x,y\right)$$

כאשר המעבר הוא מהלמה. ונבחין כי קיבלנו מכך את המשפט, $K\left(x,y\right)$ תלויה רק במישור. ∎

הערה 10.4.7 משמעות גאומטרית של $\psi_{2}\left(x,y\right)=\left|x\right|^{2}\left|y\right|^{2}-\left(x,y\right)^{2}$: אנחנו לוקחים שני וקטורים x,y ובונים מהם מקבילית:



נבחין כי חילקנו את המקבילית לשני משולשים זהים $\triangle$.

מה השטח של המקבילית? נזכור כי: $\cos\alpha=\frac{\left(x,y\right)}{\left|x\right|\left|y\right|}$ ולכן שטח המקבילית הוא:

$$\begin{aligned}\text{Area}\left(\square\right) & = 2\text{Area}\left(\triangle\right)\\
 & = 2\frac{1}{2}\left|x\right|\left|y\right|\sin\alpha\\
 & = \left|x\right|\left|y\right|\sqrt{1-\cos^{2}\alpha}
\end{aligned}$$

ולכן:

$$\begin{aligned}\text{Area}\left(\square\right)^{2} & = \left|x\right|^{2}\left|y\right|^{2}\left(1-\cos^{2}\alpha\right)\\
 & = \left|x\right|^{2}\left|y\right|^{2}-\left(x,y\right)^{2}
\end{aligned}$$

סיכום: עבור $U\subset\mathbb{R}^{n}$ תחום ו-g מטריקה רימנית. בונים את נגזרת Levi-Civita מקבלים את טנזור העקמומיות, וממנה את עקמומיות החתך, $\alpha\subset T_{q}U$, $K\left(\alpha\right)$ כאשר α מישור ממימד 2.

עבור $M^{n}\subset\mathbb{R}^{n+1}$ על משטח הגדרנו:

- $\tilde{\nabla}$ - נזרת קווריאנטית אוקלידית.
- ∇ - נגזרת Levi-Civita (מושרית).
- B - התבנית היסודית השניה של M:

$$\nabla_{a}b=\tilde{\nabla}_{a}b-B\left(a,b\right)\nu$$

- R - טנזור\אופרטור עקמומיות של ∇.

משפט 10.4.8

$$R\left(x,y,y,x\right)=B\left(y,y\right)B\left(x,x\right)-B\left(x,y\right)^{2}$$

הערה 10.4.9 $\tilde{R}$ - אופרטור העקמומיות של מטריקה אוקלידית: $\tilde{R}=0$.

הוכחה: יהיו $x,y,z\in\mathrm{Vect}\left(M\right)$. נחשב:

$$\begin{aligned}\nabla_x\nabla_y z &= \nabla_x\left(\tilde{\nabla}_y z - B\left(y,z\right)\nu\right)\\ &= p\left(\tilde{\nabla}_x\left(\tilde{\nabla}_y z - B\left(y,z\right)\nu\right)\right)\\ &= p\left(\tilde{\nabla}_x\tilde{\nabla}_y z - \overbrace{L_x B\left(y,z\right)\nu}^{\parallel\nu} - B\left(y,z\right)\tilde{\nabla}_x\nu\right)\\ &= p\left(\tilde{\nabla}_x\tilde{\nabla}_y z\right) - B\left(y,z\right)p\left(\tilde{\nabla}_x\nu\right)\end{aligned}$$

הערה 10.4.10 נבחין כי

$$p\left(L_x B\left(y,z\right)\nu\right)=0$$

היות ו $p\left(\nu\right)=0$.

כעת, באופן דומה:

$$\nabla_y\nabla_x z = p\left(\tilde{\nabla}_y\tilde{\nabla}_x z\right) - B\left(x,z\right)p\left(\tilde{\nabla}_y\nu\right)$$

וכמו כן:

$$\nabla_{[x,y]}z = p\left(\tilde{\nabla}_{[x,y]}z\right)$$

נחשב:

$$\begin{aligned}R\left(x,y\right)z &= \nabla_x\nabla_y z - \nabla_y\nabla_x z - \nabla_{[x,y]}z\\ &= p\left(\tilde{\nabla}_x\tilde{\nabla}_y z - \tilde{\nabla}_y\tilde{\nabla}_x z - \tilde{\nabla}_{[x,y]}z\right) - B\left(y,z\right)p\left(\tilde{\nabla}_x\nu\right) + B\left(x,z\right)p\left(\tilde{\nabla}_y\nu\right)\\ &= p\left(\cancelto{0}{\tilde{R}\left(x,y,z\right)}\right) - B\left(y,z\right)p\left(\tilde{\nabla}_x\nu\right) + B\left(x,z\right)p\left(\tilde{\nabla}_y\nu\right)\\ &= -B\left(y,z\right)p\left(\tilde{\nabla}_x\nu\right) + B\left(x,z\right)p\left(\tilde{\nabla}_y\nu\right)\end{aligned}$$

כעת:

$$\begin{aligned}R\left(x,y,z,w\right) &= \left(R\left(x,y\right)z,w\right)\\ &= -B\left(y,z\right)\left(p\left(\tilde{\nabla}_x\nu\right),w\right) + B\left(x,z\right)\left(p\left(\tilde{\nabla}_y\nu\right),w\right)\\ &= -B\left(y,z\right)\left(\tilde{\nabla}_x\nu,w\right) + B\left(x,z\right)\left(\tilde{\nabla}_y\nu,w\right)\end{aligned}$$

הערה 10.4.11 המעבר השני מכיוון ש $w\in T_AM$ ואילו $p\left(\tilde{\nabla}_x\nu\right)=\tilde{\nabla}_x\nu-\xi\nu$ עבור ξ כלשהו. ומתקיים $\left(\nu,w\right)=0$.

כעת אנו יודעים מחוק Leibniz ומכיוון ש $\left(\nu,w\right)=0$ אנו מקבלים:

$$0\overset{!}{=}L_x\left(\nu,w\right)=\left(\tilde{\nabla}_x\nu,w\right)+\overbrace{\left(\nu,\tilde{\nabla}_x w\right)}^{B(x,w)}\Rightarrow\left(\tilde{\nabla}_x\nu,w\right)=-B\left(x,w\right)$$

ולכן נציב בביטוי של $R\left(x,y,z,w\right)$ שקיבלנו ונקבל:

$$R\left(x,y,z,w\right)=B\left(x,w\right)B\left(y,z\right)-B\left(x,z\right)B\left(y,w\right)$$

ולכן נקבל עבור:

$$R\left(x,y,y,x\right)=B\left(x,x\right)B\left(y,y\right)-B\left(x,y\right)^{2}$$

■

מקרה פרטי: עבור המקרה של $M^{2}\subset\mathbb{R}^{3}$.

הגדרה 10.4.12 עבור תחום $U\subset\mathbb{R}^{2}$, או משטח $M^{2}\subset\mathbb{R}^{3}$ אנו מגדירים:

$$K_{\text{Riemann}}=\begin{cases}K\left(T_{q}U\right)\\ K\left(T_{A}M\right)\end{cases}$$

משפט 10.4.13 Egregium

$K_{\text{Riemann}}=K_{\text{Gauss}}$.

הוכחה: אנחנו בוחרים וקטורים x,y כך ש x,y הם בסיס אורתונורמלי (דהיינו $|x|=|y|=1$ ו: $(x,y)=0$).
נבחין כי:

$$\begin{aligned}K_{\text{Riemann}} &= K\left(T_{A}M\right)\\ &= \frac{R\left(x,y,y,x\right)}{\left|x\right|^{2}\left|y\right|^{2}-\left(x,y\right)^{2}}\\ &= \frac{B\left(x,x\right)B\left(y,y\right)-B\left(x,y\right)^{2}}{1\cdot1-0}\end{aligned}$$

(כאשר המעבר האחרון הוא מהמשפט שהוכחנו זה עתה).
כמו כן, בבסיס אורתונורמלי x,y, אנו יודעים כי התבנית היסודית השנייה ניתנת ע"י מטריצה (או לחילופין טרנספורמציית Weingarten):

$$\hat{B}=\begin{pmatrix}B\left(x,x\right) & B\left(x,y\right)\\ B\left(x,y\right) & B\left(y,y\right)\end{pmatrix}$$

ונקבל כי:

$$\begin{aligned}K_{\text{Gauss}} &\overset{\text{def}}{=} \det\hat{B}\\ &= B\left(x,x\right)B\left(y,y\right)-B\left(x,y\right)^{2}\\ &= K_{\text{Riemann}}\end{aligned}$$

כנדרש. ■

10.5 שימוש של עקמומיות

משפט 10.5.1

לא קיימת איזומטריה מקומית בין S^{2} ל $\mathbb{R}^{2}$.

על מה מדובר? נניח שיש לנו תחום U עם מטריקה g ותחום V עם מטריקה h כך ש $U, V \subset \mathbb{R}^n$. ונקודות $A \in U$ ו $B \in V$. מה זה איזומטריה מקומית? אנחנו לוקחים סביבת של A שנסמנה U_A וסביבה של B שנסמנה V_B . איזומטריה מקומית היא דיפאומורפיזם איזומטרי: $f : U_A \to V_B$.

כלומר, המשפט אומר שאפילו באופן מקומי אין איזומטריה בין התחומים. **הוכחה:** נניח ש $f : U \to V$ איזומטריה, נניח ש $\dim U = \dim V = 2$. אז:

$$K_{\text{Riemann}} \left(f\left(A\right)\right)_h = K_{\text{Riemann}} \left(A\right)_g$$

כעת, K_{Reimann} של מישור אוקלידי הוא 0 לכל A ואילו: K_{Reimann} של ספירה ברדיוס 1 הוא 1 לכל B. ולכן מהנוסחה הנ"ל נובע שלא קיימת איזומטריה. ■

29/12/

פרק 11

קווים גאודסיים (גאודסיות, Geodesics) וחשבון וריאציות

11.1 מבוא

מה המטרה שלנו בחלק זה? יש לנו תחום עם מטריקה רימנית, למשל משטח שנמצא ב$\mathbb{R}^3$, ויש לנו שתי נקודות A, B ואנחנו רוצים להגיע מ A ל B בדרך הכי קצרה. אנחנו יודעים למדוד את אורך העקומה, אנחנו רוצים למצוא את ה $\inf \text{length}(\gamma)$ כאשר γ עקומה מ A ל B ו $\gamma \subset M$.

לחליופין, יש לנו תחום $U \subset \mathbb{R}^2$ ונקודות $p, q \in U$, אנחנו רוצים למצוא עקומה α כך ש $\inf \text{length}_g(\alpha)$ היא הכי קצרה ו α מסילה מ p ל q (כלומר אנחנו מחפשים מסילה בתחום שמועתק למשטח).

נגדיר את Ω להיות אוסף העקומות מ q ל p. ונגדיר $L : \Omega \to \mathbb{R}$ כך ש $\alpha :\mapsto \text{length}_g(\alpha)$. אנחנו בעצם רוצים לשאול מה הן הנקודות הקריטיות של פונקציונל L?

הנקודות הנ"ל הן למעשה הקווים הגאודסיים, ואנחנו נרצה להגדיר אותם בפרק זה.

נתבונן בתחום $\mathbb{R}^n$ עם המטריקה האוקלידית, ונקודות A, B, ברור לנו כי הדרך הכי קצרה בין הנקודות היא הקו הישר המחבר אותם, נסמן את העקומה הזו ב γ, ונניח כי $\dot{\gamma}(t) = \text{const}$. כלומר, $\ddot{\gamma}(t) = 0$. נבחין כי עם נגזרת קוואריאנטית אנו בעצם דורשים כי: $\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$, כלומר $\dot{\gamma}$ לא משתנה לאורך העקומה, דהיינו העברנו אותה במקביל לאורך העקומה.

11.2 עקמומיות גאודסית

הגדרה 11.2.1 U, g תחום עם מטריקה רימנית. $\gamma(t)$ היא עקומה רגולרית. γ גאודסית אם $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$ כאשר ∇ היא נגזרת Levi-Civita.

הגדרה 11.2.2 $\gamma(t)$ היא עקומה עם פרמטריזציה טבעית אז:

$$k(t) := \left|\nabla_{\dot{\gamma}(t)}\dot{\gamma}(t)\right|$$

נקראת העקמומיות הגאודסית של γ.

כלומר, אם γ גאודסית ורגולרית, אז $k = 0$, אנו נחזור לזה בהמשך, יש משהו קטן שצריך לחדד כאן.

דוגמה 11.2.3 : $\mathbb{R}^{n+1}$, $\tilde{\nabla}$ נגזרת קוואריאנטית אוקלידית.

$$\tilde{k}(t) := \left|\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}\right| = |\ddot{\gamma}|$$

(עקמומעות רגילה, בלי סימן).
$\tilde{k} = 0$ אם"ם $\gamma(t)$ היא קו ישר.

דוגמה 11.2.4 : $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, ו $\gamma \subset M$. $\tilde{k}$ עקמומיות של γ אוקלידית (במובן של $\tilde{\nabla}$). k עקמומיות גאודסית במובן של מטריקה מושרת על M.

$$\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = \underbrace{\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}}_{\perp\nu,\, \in TM,\, |\nu|=1} + B\left(\dot{\gamma},\dot{\gamma}\right)\nu$$

ולכן:

$$\begin{aligned}\tilde{k}^2 &= \left|\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}\right|^2 \\ &= \left|\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}\right|^2 + B\left(\dot{\gamma},\dot{\gamma}\right)^2 \\ &= k^2 + B\left(\dot{\gamma},\dot{\gamma}\right)^2\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו כי:

$$\boxed{\tilde{k}^2 = k^2 + B\left(\dot{\gamma},\dot{\gamma}\right)^2}$$

דהיינו אם $\tilde{k} = 0$ אז $k = 0$.

קודם ציינו שאם γ גאודסית ורגולרית, אז $k = 0$. אנחנו רוצים כעת לחדד את זה:

טענה 11.2.5

תהי γ עקומה רגולרית. $|\dot{\gamma}(t)| = \text{const} > 0$ ו $k = 0$ אס"ם γ גאודסית.

הוכחה: נתחיל מהכיוון $\Leftarrow$:

נניח ש $|\dot{\gamma}(t)| = c > 0$ לכל t. נגדיר: $\overline{\gamma}(t) = \gamma\left(\frac{t}{c}\right)$, נבחין כי זוהי מסילה בפרמטריזציה טבעית כי מתקיים: $\dot{\overline{\gamma}}(t) = \frac{1}{c}\underbrace{\left|\dot{\gamma}\left(\frac{t}{c}\right)\right|}_{c} =$

1.

כעת:

$$\nabla_{\dot{\overline{\gamma}}}\dot{\overline{\gamma}} = 0$$

מכיוון ש:

$$\begin{aligned}\nabla_{\dot{\overline{\gamma}}}\dot{\overline{\gamma}} &= \nabla_{\frac{1}{c}\dot{\gamma}}\left(\frac{1}{c}\dot{\gamma}\right) \\ &= \frac{1}{c^2}\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0\end{aligned}$$

כאשר המעבר האחרון נתון. לכן, אם $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$ אנו מקבלים כי γ גאודסית.

כיוון שני $\Rightarrow$:

נתון כי $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$. אז $\dot{\gamma}(t)$ שדה וקטורי מקביל לעצמו לאורך γוזה גורר כי: $|\dot{\gamma}(t)| = \text{const}$.

כעת נשאר להראות כי $k = 0$, כלומר:

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0 \overset{?}{\Rightarrow} k = 0 \iff \nabla_{\dot{\overline{\gamma}}}\dot{\overline{\gamma}} = 0$$

אבל זה מושאר כתרגיל. רמז: להשתמש בחלק הראשון של ההוכחה. ■

נניח כי $\gamma(t) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ היא עקומה עם פרמטריזציה טבעית. ונניח כי $\tilde{k} = |\ddot{\gamma}(t)| \neq 0\ \forall t$.

נקח את הנורמל ל γ:

$$N(t)=\frac{\ddot{\gamma}(t)}{|\ddot{\gamma}(t)|}$$

נבחין כי מתקיים: $\ddot{\gamma}=\tilde{k}N$.

הערה 11.2.6 כמו כן, אנחנו יכולים להסתכל על $M^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$ ומסילה על המשטח.

נתון כי $\gamma(t)$ עם פרמטריזציה טבעית וכי $\tilde{k}\neq 0$.

טענה 11.2.7

γגאודסית (על M) אס"ס $N=\pm\nu$ (כלומר $N\|\nu$).

הוכחה: נתון כי $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}=0$ ולכן:

$$\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}=\cancelto{0}{\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}}+B(\dot{\gamma},\dot{\gamma})\,\nu$$

וגם:

$$\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}=\ddot{\gamma}=\tilde{k}N=B(\dot{\gamma},\dot{\gamma})\,\nu$$

דהיינו: $N\|\nu$ כנדרש.

כעת, נניח ש $N\|\nu$, אז:

$$\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}=\tilde{k}N\quad\|\nu$$

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}=p\underbrace{\left(\tilde{\nabla}_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}\right)}_{\|\nu}=0$$

ולכן γ גאודסית. ∎

דוגמה 11.2.8 : $M^2\subset\mathbb{R}^3$. ונניח כי $l\subset\mathbb{R}^3$ מישור דו־מיימדי.
נניח כי $l\cap M\neq\varnothing$ ו $l\perp M$ בכל נקודת חיתוך.

טענה 11.2.9

עקומה $\gamma=l\cap M$ היא גאודסית.

הערה 11.2.10 החיתוך לא חייבת להיות בכלל קשיר, הטענה היא מקומית,לכל רכיב קשירות של החתך).

עקומה γ נקראת חתך נורמלי. **הוכחה:** אם המשטח שלנו מאונך ל l, אז $\nu\in l$, וגם אנו יודעים כי $\gamma\subset l$ וזאת אומרת ש $N\subset l$.
אבל ב l יש קו יחיד שניצב לעקומה, וזה אומר כי $N\|\nu$.
כתרגיל, להשלים את הפרטים של ההוכחה. ∎

דוגמה 11.2.11 : נתבונן ב S^2 וניקח מישור l העובר דרך המרכז. לחיתוך $l\cap S^2$ יש שם, והוא נקרא מעגל גדול. לכל $l\perp T_AS^2$ $A\in\gamma=l\cap S^2$.
כלומר, מהטענה הקודמת, מעגלים גדולים על S^2 הם קווים גאודסיים.

04/01/

11.3 גאודסיות וחשבון וריאציות

יהי $U\subset\mathbb{R}^n$ תחום ו g מטריקה רימנית. נתבונן ב $\Omega=\{\gamma:[0,c]\to U\mid\quad\gamma\text{is regular}\}$ וב: $L:\Omega\to\mathbb{R}$ אשר שולחת את $\gamma\mapsto\text{length}_g(\gamma)$, כלומר $L(\gamma)=\int\limits_0^c|\dot{\gamma}|_g\,\mathrm{d}s$.

γ_0 היא נקודה קריטית של L אס"ם γ_0 היא גאודסית. נתייחס ל γ_0 בפרמטריזציה טבעית.

הערה 11.3.1 $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציה חלקה, x נקודה קריטית של F אם: $\frac{\partial F}{\partial x_1}(x)=\ldots=\frac{\partial F}{\partial x_n}=0$.$\mathrm{d}F=0$.

הבעיה היא שבמקרה שלנו המימד הוא אינסופי. נניח α עקומה חלקה. נצמצם את F על α, כלומר: $\varphi(t)=F(\alpha(t))$ (או $F\mid_\alpha$) אז:

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}=\sum\frac{\partial F}{\partial x_i}(x)\frac{\mathrm{d}\alpha_i}{\mathrm{d}t}=0\quad\forall\alpha\qquad\Longleftrightarrow\qquad\frac{\partial F}{\partial x_i}(x)=0$$

הגדרה 11.3.2 וריאציה של γ_0 היא העתקה חלקה $\gamma:\underset{s}{[0,c]}\times\underset{t}{(-\varepsilon,\varepsilon)}\to U$ כך ש: $\forall t\quad\gamma(0,t)=A$ ו: $\forall t\quad\gamma(c,t)=B$ וגם: $\forall s\;(s,0)=\gamma_0(s)$.

הערה 11.3.3 כלומר עקומה של עקומות.

הגדרה 11.3.4 אנחנו אומרים ש γ_0 היא נקודה קריטית של L אם לכל וריאציה γ של עקומה γ_0: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mid_{t=0}L(\gamma_t)=0$ כאשר: $\gamma_t(s):=\gamma(s,t)$.

משפט 11.3.5

γ_0 נקודה קריטית של L אס"ם γ_0 גאודסית (כלומר $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}=0$).

הוכחה: נסמן ב D_t את הנגזרת הקוואריאנטית (Levi-Civita) לאורך $\gamma(s_0,t)$. D_s היא הנגזרת (Levi-Civita) לאורך $\gamma(s,t_0)$.

טענה 11.3.6

$$D_s\frac{\partial\gamma}{\partial t}=D_t\frac{\partial\gamma}{\partial s}$$

הוכחה: $q_1,\ldots q_n$ קואורדינטות ב U, $e_i=\frac{\partial}{\partial q_i}$ ו $\Gamma_{i,j}^k$ סימני כריסטופל.

$$D_s\frac{\partial\gamma}{\partial t}=\sum_k\left(\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right)+\sum_{i,j}\Gamma_{i,j}^k\frac{\partial\gamma_i}{\partial s}\frac{\partial\gamma_j}{\partial t}\right)e_k$$

וכמו כן:

$$D_t\frac{\partial\gamma}{\partial s}=\sum_k\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial s}\right)+\sum_{i,j}\Gamma_{i,j}^k\frac{\partial\gamma_i}{\partial t}\frac{\partial\gamma_j}{\partial s}\right)e_k$$

נבחין כי האיבר הראשון בסוגריים שווה בשתי המשוואות, ואילו עבור האיבר השני אנו יודעים כי: $\Gamma_{i,j}^k=\Gamma_{j,i}^k$ ולכן אנחנו מקבלים כי גם האיבר השני שווה, כלומר:

$$D_s\frac{\partial\gamma}{\partial t}=D_t\frac{\partial\gamma}{\partial s}$$

■

נגדיר $v(s)=\frac{\partial\gamma}{\partial t}(s,0)$ שדה וקטורי לאורך רγ_0.

הערה 11.3.7 "$v\in T_{\gamma_0}\Omega$".

טענה 11.3.8

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0} L(\gamma_t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0} \mathrm{length}_g(\gamma_t)\\ &= -\int_0^c (v, D_s\dot{\gamma}_0)_g \,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

מסקנה 11.3.9

אבל $D_s\dot{\gamma}_0 = \nabla_{\dot{\gamma}_0}\dot{\gamma}_0$, לכן אם γ_0 גאודסית אז $\nabla_{\dot{\gamma}_0}\dot{\gamma}_0 = 0$, ואז $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0} L(\gamma_t) = 0$ לכל וריאציה.

נוכיח את הטענה: **הוכחה:** נסמן: $\dot{\gamma}_t = \frac{\partial}{\partial s}\gamma_t(s,t)$. נתחיל עם החישוב הבא:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0} |\dot{\gamma}_t| &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0} \sqrt{\left(\frac{\partial\gamma}{\partial s}, \frac{\partial\gamma}{\partial s}\right)}\\ &= \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial s}, \frac{\partial\gamma}{\partial s}\right)}{2\sqrt{\left(\frac{\partial\gamma}{\partial s}, \frac{\partial\gamma}{\partial s}\right)}}\end{aligned}$$

מכיוון ש γ בפרמטריזציה טבעית, נקבל כי: $1 = \left(\frac{\partial\gamma}{\partial s}, \frac{\partial\gamma}{\partial s}\right)$ ברגע $t=0$ ולכן המכנה הופך לחצי, כלומר:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0} |\dot{\gamma}_t| &= \frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}\left(\frac{\partial\gamma}{\partial s}, \frac{\partial\gamma}{\partial s}\right)}{2}\\ &= \frac{\cancel{2}\left(D_t\frac{\partial\gamma}{\partial s}, \frac{\partial\gamma}{\partial s}\right)|_{t=0}}{\cancel{2}}\\ &= \left(D_t\frac{\partial\gamma}{\partial s}, \frac{\partial\gamma}{\partial s}\right)|_{t=0}\\ &= \left(D_s\underbrace{\frac{\partial\gamma}{\partial t}}_{v}, \underbrace{\frac{\partial\gamma}{\partial s}}_{\dot{\gamma}_0}\right)|_{t=0}\\ &= (D_s v, \dot{\gamma}_0)\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(v, \dot{\gamma}_0) - (v, D_s\dot{\gamma}_0)\end{aligned}$$

כעת, אנחנו יככולים לכתוב:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0} L(\gamma_t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^c |\dot{\gamma}_t|\,\mathrm{d}s\\ &= \int_0^c \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0} |\dot{\gamma}_t|\,\mathrm{d}s\\ &= \int_0^c \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(v, \dot{\gamma}_0)\,\mathrm{d}s - \int_0^c (v, D_s\dot{\gamma}_0)\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

אבל נבחין כי הגורם הראשון הוא נגזרת ואינטרגל לפי אותו משתנה, לכן מניוטון־לייבניץ אנחנו מקבלים כי:

$$\int_0^c \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(v, \dot{\gamma}_0)\,\mathrm{d}s = (v(c), \dot{\gamma}_0(c)) - (v(0), \dot{\gamma}_0(0))$$

אבל בנקודה c נבחין כי $v(c)=v(0)=0$ (כי γ קבועה ב t בנקודות קצה) ולכן הביטוי מתאפס ואנחנו מקבלים:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}\, L(\gamma_t) = -\int_0^c (v, D_s\dot{\gamma}_0)\,\mathrm{d}s$$

■

ומהמסקנה לטענה אנחנו מקבלים כיוון אחד של המשפט. אם γ_0 גאודסית אז הנגזרת מתאפסת. נניח כעת ש γ_0 לא גאודסית, כלומר $D_s\dot{\gamma}_0 \neq 0$. כלומר: $\exists s_0 \mid D_s\dot{\gamma}_0(s_0) \neq 0$. אז אנחנו רוצים להראות כי γ_0 היא לא נקודה קריטית של פונקציונל האורך L. לשם כך נגדיר וריאציה שבה הנגזרת לא מתאפס. נגדיר: $a(s) = |D_s\dot{\gamma}_0(s)|$, $a:[0,c]\to[0,+\infty)$, $a \not\equiv 0$ מההנחה.

אז $\exists\,[\alpha,\beta]$ כך ש $a(s)>0$ לכל $s\in[\alpha,\beta]$ (מכיוון ש $D_s\dot{\gamma}_0(s)$ חלקה, ולכן a רציפה). נבחר פונקציה חלקה: $\varphi:[0,c]\to\mathbb{R}$ כך ש:

$$\begin{cases}\varphi(r)>0 & r\in(\alpha,\beta)\\ \varphi(r)=0 & r\notin(\alpha,\beta)\end{cases}$$

תרגיל 11.3.10 : φ קיימת.

נגדיר:

$$\gamma(s,t) = \gamma_0(s) + \varphi(s)\,tD_s\dot{\gamma}_0(s)$$

אנחנו רוצים להראות כי זו וריאציה לגיטימית. נבחין כי:

$$\begin{aligned}\gamma(s,0) &= \gamma_0(s)\\ \gamma(0,t) &= A + 0\cdot\ldots = A\\ \gamma(c,t) &= B + 0\cdot\cdots = B\end{aligned}$$

והיא חלקה כמובן. ולכן היא וריאציה. כעת:

$$v(s) = \frac{\partial\gamma}{\partial t}(s,0) = \varphi(s)\cdot D_s\dot{\gamma}_0(s)$$

כעת, מ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}\, L(\gamma_t) = -\int_0^c (v, D_s\dot{\gamma}_0)\,\mathrm{d}s$ אנו מקבלים:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}\, L(\gamma_t) &= -\int_0^c \left(\varphi(s)\,D_s\dot{\gamma}_0(s),\, D_s\dot{\gamma}_0\right)\mathrm{d}s\\ &= -\int_0^c \varphi(s)\left(D_s\dot{\gamma}_0, D_s\dot{\gamma}_0\right)\mathrm{d}s\\ &= -\int_0^c \varphi(s)\,a^2(s)\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

אבל הפונקציה φ מתאפסת מחוץ לקטע (α,β) אז אנחנו יכולים לשנות את תחומי האינטגרציה ונקבל:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}\, L(\gamma_t) = -\int_\alpha^\beta \varphi(s)\,a^2(s)\,\mathrm{d}s$$

אבל בקטע הזה $0 < \varphi(s)$ וגם $a^2 > 0$ בקטע הזה, ולכן אנחנו מקבלים כי:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0} L(\gamma_t) = -\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(s) a^2(s) \, \mathrm{d}s < 0$$

וזהו סוף ההוכחה. קיבלנו כי γ_0 גאודסים אם"ם γ_0 נקודה קריטית. ■

הערה 11.3.11 אנחנו יכולים באותו אופן לחשב גם את הנגזרת השניה, כלומר קיימת נוסחה לוריאציה השניה. וטענה לא קלה, אומרת שאנחנו לפעמים יכולים להגיד שעקומה היא מינימום מקומי.

הערה 11.3.12 אף אחד לא אמר בכלל שקיים אקסטרימום. התחושה אומר היא למה לא?
נקח את $\mathbb{R}^2$ עם מטריקה אוקלידית. אחנו יודעים שהמרחק הכי קצר בין A לB הוא הקו הישר ביניהם.
כעת, נקח תחום U ונקודות A, B כך שהישר לא מוכל בהן. נקח תחום פתוח בצורת C והנקודות בקצוות של הC. אז נקבל כי האקסטרימום במקרה הזה לא קיים. או באופן דומה נקודות על ציר ה X ונקודה באמצע שלא קיימת, ואז אנחנו חייבים להקיף אותה, ובמצב הזה שוב, לא נקבל את האקסטרימום.

הערה 11.3.13 יש משפט שאומר, שנניח שיש לנו משפט קומפקטי וסגור, אם נקח על המשטח הזה מטריקה רימנית, בין כל 2 נקודות קיימת עקומה עם מרחק מינימלי (לא בהכרח יחידה).

הערה 11.3.14 עבדנו עם γ_0 כך ש $|\dot{\gamma}_0(s)| = 1$. אבל אנחנו יודעים כי אורך של מסילה לא משתנה כאשר אנחנו משנים את הפרמטריזציה לפרמטריזציה פרופורציונלית.
על הבחירה של פרמטריזציה טבעית שילמנו את המחיר שעבדנו עם עקומות שמוגדרות על קטע $\gamma_0 : [0, c] \to U$ כאשר c לא ידוע מכיוון שc הוא למעשה האורך.
באותו מידה יכולנו לעבוד עם עקומות: $\gamma_0 : [0, 1] \to U$ ו: $|\dot{\gamma}_0(s)| = c$.

11.4 חישוב קווים גאודסיים

נניח כי $U \subset \mathbb{R}^n$ תחום ו g מטריקה רימנית. אנחנויודעים את המוושאה של קווים גאודסיים:

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 0$$

נניח כי $\Gamma_{i,j}^k$ סימני כריסטופל של נגזרת Levi-Civita ו$q_1, \ldots, q_n$ קואורדינטות ב U ו: $e_i = \frac{\partial}{\partial q_i}$. אז אנחנו יכולים לבצע את החישוב הבא:

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t))$$

ו:

$$\dot{\gamma} = \sum \dot{\gamma}_i e_i$$

ו:

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = \sum_k \left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \dot{\gamma}}_{\ddot{\gamma}_k} + \sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k \dot{\gamma}_i \dot{\gamma}_j \right) e_k = 0$$

אבל נזכור כי גם $\Gamma_{i,j}^k(\gamma(t))$, כלומר גם הסימני כריסטופל תלויים ב γ. ולכן אנחנו מקבלים כי לכל k ($k = 1, \ldots, n$):

$$\ddot{\gamma}_k + \sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k (\gamma(t)) \dot{\gamma}_i \dot{\gamma}_j = 0$$

לצערנו ברוב המקרים אי אפשר לפתור את המערכת הזו במקרה הכללי בצורה אנליטית. אבל עדיין אנחנו יכולים להגיד משהו על המשוואה הזו.

אנחנו יכולים לנסח משפט של קיום ויחידות:

משפט 11.4.1 ממד"ר, בלי הוכחה

לכל $q\in U$ ולכל $\xi\in T_qU\backslash\{0\}$, קיים $\varepsilon>0$ וקיימת גאודסית $\gamma:[0,\varepsilon]\to U$ כך ש $\gamma(0)=q$ ו $\dot{\gamma}(0)=\xi$. ויותר מכך, אם $\gamma_i:[0,\varepsilon_i]\to U$ כאשר $i=1,2$ הן שתי גאודסיות כאלה אז $\gamma_1=\gamma_2$ על $[0,\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)]$.

הערה 11.4.2 $|\dot{\gamma}(t)|=|\xi|$

05/01/

11.5 קווים גאודסיים על משטח סיבוב

נתונה לנו עקומה $(f(u),g(u))$ ואנחנו מסתכלים על משטח הסיבוב $a(u,v)=(f(u)\cos v,f(u)\sin v,g(u))$ כאשר v היא הזווית. ואנו דורשים $f'(u)^2+g'(u)^2=1$.

המשוואה של קווים גאודסיים נותנת לנו:

$$\ddot{\gamma}_k+\sum_{i,j}\Gamma_{i,j}^k\dot{\gamma}_i\dot{\gamma}_j=0\qquad k=1,2$$

כאשר במקרה של משטח סיבוב אנו יודעים כי: $\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}u^2+f(u)^2\,\mathrm{d}v^2$ וכי סימני כריסטופל שלנו הינםף

$$\begin{aligned}\Gamma_{1,2}^2&=\Gamma_{2,1}^2=\frac{f'}{f}\\ \Gamma_{2,2}^1&=-ff'\end{aligned}$$

והאחרים מתאפסים.

ולכן אנחנו מקבלים את המשוואות:

$$\ddot{\gamma}_1+\Gamma_{2,2}^1\dot{\gamma}_2^2=0$$

$$\boxed{\ddot{\gamma}_1-ff'\dot{\gamma}_2^2=0}$$

והמשוואה השניה:

$$\ddot{\gamma}_2+2\Gamma_{2,1}^2\dot{\gamma}_2\dot{\gamma}_1=0$$

$$\boxed{\ddot{\gamma}_2+2\frac{f'}{f}\dot{\gamma}_1\dot{\gamma}_2=0}$$

ולכן אנחנו צריכים לפתור את ערכת המשוואות:

$$\begin{cases}\ddot{\gamma}_1-ff'\dot{\gamma}_2^2=0\\ \ddot{\gamma}_2+2\frac{f'}{f}\dot{\gamma}_1\dot{\gamma}_2=0\end{cases}$$

כאשר $f=f(\gamma_1)$.

לפתור את מערכת המשוואות הנ"ל יכול להיות קצת מורכב, אבל יש לנו שיטה למצוא את הקווים הגאודסיים.

אנחנו הולכים להשתמש באינטגרל של משוואה דיפרנציאלית (לא אינגטגרל במובן הקלאסי). אנחנו הולכים להשתמש בגודל שהוא נשמר (בהשוואה לאנרגיה לתלמידי הפיסיקה).

11.5.1 משפט Clairaut

נניח ש $M \supset \gamma(t)$ עקומה רגולרית עם פרמטריזציה טבעית. $\psi(t)$ היא הזווית בין γ לבין מרידיאן ($v = \mathrm{const}$) (כלומר הזווית בין המסילה γ על המשטח לעקומה אשר יצרה את המשטח).

הערה 11.5.1 $f(\gamma_1(t))$ הוא המרחק בין $\gamma(t)$ עד ציר z.

הגדרה 11.5.2 אינטגרל Clairaut:

$$I(t) = f(\gamma_1(t)) \sin\psi(t)$$

משפט 11.5.3 Clairaut

$M \supset \gamma(t)$ עקומה עם פרמטריזציה טבעית.

1. אם $\gamma(t)$ גאודסית אז $I(t) = \mathrm{const}$.
2. אם $\dot{\gamma}_1 \neq 0$ ו: $I(t) = \mathrm{const}$ אז γ היא גאודסית.

הוכחה: אנחנו יודעים כי γ עם פרמטריזציה טבעית, לכן:

$$\dot{\gamma}_1^2 + f^2\dot{\gamma}_2^2 = 1$$

נבחין כי:

$$\begin{aligned}\cos\psi(t) &= \cos\left(\angle\left(\dot{\gamma}, \frac{\partial}{\partial u}\right)\right)\\ &= \frac{\left(\dot{\gamma}, \frac{\partial}{\partial u}\right)}{|\dot{\gamma}|\left|\frac{\partial}{\partial u}\right|}\\ &= \frac{\dot{\gamma}_1 \cdot 1}{1 \cdot 1}\\ &= \dot{\gamma}_1\end{aligned}$$

ולכן:

$$\begin{aligned}\sin\psi(t) &= \sqrt{1-\cos^2(\psi(t))}\\ &= \sqrt{1-\dot{\gamma}_1^2}\\ &= f^2\dot{\gamma}_2^2\end{aligned}$$

כלומר, אינטגרל Clairaut הינו:

$$I = ff\dot{\gamma}_2 = f^2(\gamma_1(t))\,\dot{\gamma}_2(t)$$

כעת:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} &= 2ff'\dot{\gamma}_1\dot{\gamma}_2 + f^2\ddot{\gamma}_2\\ &= f^2\underbrace{\left(\ddot{\gamma}_2 + \frac{2f'}{f}\dot{\gamma}_1\dot{\gamma}_2\right)}_{0}\\ &= 0\end{aligned}$$

כאשר אנחנו משתמשים בעובדה ש γ גאודסית ולכן: $\ddot{\gamma}_2+\frac{2f'}{f}\dot{\gamma}_1\dot{\gamma}_2=0$. כלומר קיבלנו את חלק 1 של המשפט.

אנחנו כעת רוצים לראות את חלק השני, נתון לנו כי $\dot{\gamma}_1\neq 0$ ושמתקיים $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=0$. מהחישוב של $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$ אנחנו מקבלים $\ddot{\gamma}_2+\frac{2f'}{f}\dot{\gamma}_1\dot{\gamma}_2=0$ מכיוון ש f היא פונקציה חיובית. נשאר לנו לקבל את המשוואה הנוספת (הראשונה) על מנת לקבל כי γ גאודסית. כלומר עלינו להראות: $\ddot{\gamma}_1-ff'\dot{\gamma}_2^2=0$. מכך שהפרמטריזציה טבעית אנחנו יודעים כי: $\dot{\gamma}_1^2+f^2\dot{\gamma}_2^2=1$. נגזור את המשוואה ונקבל:

$$\cancel{2}\dot{\gamma}_1\ddot{\gamma}_1+\cancel{2}ff'\dot{\gamma}_1\dot{\gamma}_2^2+\cancel{2}f^2\dot{\gamma}_2\ddot{\gamma}_2=0$$

אבל נבחין כי אנחנו יכולים לכתוב את $\ddot{\gamma}_2=-\frac{2f'}{f}\dot{\gamma}_1\dot{\gamma}_2$ (מהמשוואה השניה שהראנו כי היא נכונה כאשר $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=0$) ולכן אנחנו נקבל:

$$\begin{aligned}\dot{\gamma}_1\ddot{\gamma}_1+ff'\dot{\gamma}_1\dot{\gamma}_2^2-2f'f\dot{\gamma}_1\dot{\gamma}_2^2 &= 0\\ \dot{\gamma}_1\ddot{\gamma}_1-ff'\dot{\gamma}_1\dot{\gamma}_2^2 &= 0\\ \dot{\gamma}_1\left(\ddot{\gamma}_1-ff'\dot{\gamma}_2^2\right) &= 0\end{aligned}$$

אבל מההנחה $\dot{\gamma}_1\neq 0$ לכן קיבלנו כי:

$$\ddot{\gamma}_1-ff'\dot{\gamma}_2^2=0$$

■

הערה 11.5.4 $I=c_1=f^2\dot{\gamma}_2$ אז אנחנו מקבלים כי $\dot{\gamma}_2={}^{c_1}/_{f^2(\gamma_1)}=F_1(\gamma_1)$. וכמו כן מתקיים: $\dot{\gamma}_1^2+f\dot{\gamma}_2^2=c_2$ אז נקבל כי: $\dot{\gamma}_1^2=F_2(\gamma_1)$ ונקבל כי:

$$\frac{\dot{\gamma}_2}{\dot{\gamma}_1}=\frac{\mathrm{d}\gamma_2}{\mathrm{d}\gamma_1}=F_3(\gamma_1)\Rightarrow\gamma_2\|\gamma_1$$

הערה 11.5.5 נניח ש $\gamma = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ וכי $\dot{\gamma}_1 \equiv 0$, דהיינו: $\gamma_1(t) = u_0$ אז נקבל:

$$\overset{0}{\cancel{\dot{\gamma}_1^2}} + f^2(u_0)\,\dot{\gamma}_2^2 = 1$$

ולכן

$$\dot{\gamma}_2 = \frac{1}{f(u_0)}$$

ואז נקבל כי אינטגרל Clairaut הינו:

$$I = f^2(\gamma_1(t))\,\dot{\gamma}_2(t) = \frac{f^2(u_0)}{f(u_0)} = f(u_0)$$

דהיינו הוא קבוע. מתי העקומה שלנו היא גאודסית? נתבונן במשוואה השניה, נבחין כי $\ddot{\gamma}_2 = 0$ היות ו $\dot{\gamma}_2$ היא קבוע, וגם $\dot{\gamma}_1 = 0$ ולכן אנחנו מקבלים:

$$\ddot{\gamma}_2 + 2\frac{f'}{f}\dot{\gamma}_1\dot{\gamma}_2 = 0$$

כלומר המשוואה השניה אכן מתקיימת, אבל האם גם הראשונה? נבחין כי: $\ddot{\gamma}_1 = 0$ מכיוון ש $\dot{\gamma}_1 = 0$ אז כדי שהמשוואה הראשונה תתקיים נדרש כי:

$$-ff'\dot{\gamma}_2^2 = 0$$

דהיינו:

$$\begin{aligned} -f(u_0)\,f'(u_0)\,\frac{1}{f^2(u_0)} &= 0 \\ \frac{f'(u_0)}{f(u_0)} &= 0 \\ f'(u_0) &= 0 \end{aligned}$$

דהיינו, זו תהיה עקומה גאודסית אם"ם $f'(u_0) = 0$.

מסקנה 11.5.6

γ עם $\gamma_1 \equiv u_0$ היא גאודסית אם"ם $f'(u_0) = 0$.

תרגיל 11.5.7 : הוכיחו שגאודסיות כאלה הן "חתכים נורמליים".

11/01/

פרק 12

שטח ונפח בגיאומטריה רימנית

12.1 מוטיבציה

נניח כי יש לנו משטח $M^2 \subset \mathbb{R}^3$, אנחנו רוצים לשאול את השאלה:

האם ניתן לחשב את השטח של המשטח בעזרת מטריקה נתונה?

לשם כך עלינו לפתח שפה של תבניות דיפרנציאליות.

12.2 תבניות דיפרנציאליות

תחילה, מעט אלגברה לינארית:
יהי V מרחב לינארי מעל $\mathbb{R}$ כך ש $\dim V = n$.

הגדרה 12.2.1 העתקה $\alpha : \underbrace{V \times \ldots \times V}_{k\text{times}} \to \mathbb{R}$ נקראת פולי־לינארית, אנטי סימטרית אם: α לינארית לפי כל משתנה, ובקרה של חילוף של זוג משתנים:

$$\alpha\left(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_n\right) = -\alpha\left(v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_i, \ldots v_n\right)$$

במקרה זה, k נקראת הדרגה של α.

נסמן ב $\bigwedge^k(V)$ את מרחב כל התבניות מדרגה k.

דוגמה 12.2.2 : $k=1$, $\alpha : V \to \mathbb{R}$ אז $\bigwedge^1(V) = V^*$ (המרחב הדואלי).

דוגמה 12.2.3 : $k=n$, לדוגמה $V = \mathbb{R}^n$. $\det \in \bigwedge^n(\mathbb{R}^n)$ (וזו פחות או יותר הדוגמה היחידה שיש):

✎ **תרגיל 12.2.4 :** $A = \left(a_{i,j}\right)_{n\times n}$ מטריצה $n \times n$, $v_1, \ldots, v_n \in V$. צריך להוכיח כי לכל $\alpha \in \bigwedge^n(V)$ מתקיים:

$$\alpha\left(a_1v_1 + \ldots + a_1v_n, \ldots, a_nv_1 + \ldots + a_{n,n}v_n\right) = \det(A)\,\alpha\left(v_1, \ldots, v_n\right)$$

פתרון עבור $n=2$: $v, w \in V$ אז:

$$\begin{aligned}
\alpha\left(av+bw, cv+dw\right) &= \alpha\left(av, cv\right) + \alpha\left(bw, cv\right) + \alpha\left(av, dw\right) + \alpha\left(bw, dw\right) \\
&= ac\cancelto{0}{\alpha\left(v,v\right)} + bc\underbrace{\alpha\left(w,v\right)}_{-\alpha(v,w)} + ad\alpha\left(v,w\right) + bd\cancelto{0}{\alpha\left(w,w\right)} \\
&= \underbrace{\left(ad-bc\right)}_{\det A}\alpha\left(v,w\right)
\end{aligned}$$

הערה 12.2.5 $\alpha(v,v)=0$ מכיוון שα היא אנטי־סימטרית.

מסקנה 12.2.6

$\dim\bigwedge^n(V)=1$ ($\dim V=n$)

הוכחה: בה"כ, $V=\mathbb{R}^n$ (כל המרחבים ב $\mathbb{R}^n$ איזומורפיים אחד לשני). יהי $e_1,\ldots,e_n$ בסיס סטנדרטי ב $\mathbb{R}^n$. α תבנית מדרגה n . $v_1,\ldots,v_n\in\mathbb{R}^n$.

$$\begin{aligned}\alpha(v_1,\ldots,v_n) &= \alpha(v_{1,1}e_1+\ldots+v_{1,n}e_n.\ldots,v_{n,1}e_1+\ldots+v_{n,n}e_n)\\ &= \det\begin{pmatrix}| & & |\\ v_1 & \ldots & v_n\\ | & & |\end{pmatrix}\alpha(e_1,\ldots,e_n)\end{aligned}$$

דהיינו:

$$\alpha=\alpha(e_1,\ldots,e_n)\cdot\det$$

■

הגדרה 12.2.7 כל תבנית $0\neq\alpha\in\bigwedge^n(V)$ נקראת תבנית נפח על V.

הערה 12.2.8 $\bigwedge^k(V)=0$ כמרחב לינארי לכל $k>n$.

הגדרה 12.2.9 אם α_1,α_2 תבניות נפח, אז $\alpha_1\sim\alpha_2$ אם קיים $c>0$ כך ש $\alpha_1=\alpha_2\cdot c$ (או בצורה שקולה, אם $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}>0$).

תזכורת 12.2.10 אורינטציה של Vהיא מחלקת שקילות של בסיסים $e_1,\ldots,e_n$, $(f)\sim(e)$ כאשר $\det(\text{Transformation Matrix})>0$.

הגדרה 12.2.11 $[\alpha]$ (תבנית שפועלת על וקטורים) מכבדת אורינטציה אם: $\alpha(e_1,\ldots,e_n)>0$ (בסיס חיובי במובן של אורינטציה).

תרגיל 12.2.12 : להראות שההגדרה הנ"ל מוגדרת היטב.

הערה 12.2.13 לאחר הוכחת התרגיל ניתן לראות את האורינטציה כמחלקת שקילות של תבניות נפח במקום מחלקת שקילות של בסיסים.

12.2.1 תבנית נפח קנונית על מרחב עם מכפלה סקלרית ואורינטציה

יהי V מרחב עם אורינטציה ומכפלה סקלרית.

תרגיל 12.2.14 :

טענה 12.2.15

קיימת באופן יחיד תבנית נפח α כך ש $\alpha(e_1,\ldots,e_n)=1$ לכל בסיס אורתונורמלי חיובי $e_1,\ldots,e_n$.

רמז: מטריצת המעבר בין בסיסית אורתונורמלית יכולה להיות בדטרמיננטה ±1 אבל בגלל שזה בסיס חיובי נותרים רק עם דטרמיננטה 1.

טענה 12.2.16

V עם אורינטציה ו $(\ ,\ )$. α תבנית נפח קנונית. אז לכל בסיס חיובי $v_1,\ldots,v_n$ ב V מתקיים:

$$\alpha(v_1,\ldots,v_n)=\sqrt{\det((v_i,v_j))}$$

(כלומר השורש של הדטרמיננטה של מטריצת גרם).

הוכחה: (עבור $\mathbb{R}^n$ עם מכפלה סקלרית אוקלידית ואורינטציה סטנדרטית)

$$A^TA=\begin{pmatrix}- & v_1 & -\\ & \vdots & \\ - & v_n & -\end{pmatrix}\begin{pmatrix}| & & |\\ v_1 & \dots & v_n\\ | & & |\end{pmatrix}=((v_i,v_j))$$

$$\underbrace{\det\left(A^TA\right)}_{=(\det A)^2}=\det\left(v_i,v_j\right)$$

ולכן:

$$\det A=\sqrt{\det\left((v_i,v_j)\right)}$$

(רק סימן פלוס אפשרי מכיוון ש $\det A>0$). ■

12.2.2 תבניות דיפרנציאליות על $U\subseteq\mathbb{R}^n$

תבנית דיפרציאלית מדרגה k על U זאת משפחה חלקה (ב q) של תבניות מדרגה k על מרחב משיק T_qU.
(כלומר, לכל מרחב משיק T_qU קיימת תבנית שתלויה באופן חלק בנקודה q).

סימונים: $q_1,\dots,q_n$ קואוקרדינטות ב $\mathbb{R}^n$.

דוגמה 12.2.17 : תבנית $\mathrm{d}q_i$ מדרגה 1:

$$\mathrm{d}q_i\left(\frac{\partial}{\partial q_j}\right)=\delta_{i,j}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$$

או באופן שקול:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}q_i:T_qU &\to \mathbb{R}\\ \begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix} &\mapsto \xi_i\end{aligned}$$

ו:

$$\underbrace{\mathrm{d}q_1\wedge\mathrm{d}q_2\wedge\dots\wedge\mathrm{d}q_n}_{\in\bigwedge^n}\left(\xi^{(1)},\dots,\xi^{(n)}\right)=\det\begin{pmatrix}| & & |\\ \xi^{(1)} & \dots & \xi^{(n)}\\ | & & |\end{pmatrix}$$

תבנית α_q מדרגה 1 ניתן לרשום באופן הבא:

$$\alpha=\sum\alpha_i\left(q\right)\mathrm{d}q_i$$

כאשר $\alpha_i\left(q\right)$ הן פונקציות חלקות (בעצם זה מה שאומר ש"משפחה חלקה").

דוגמה 12.2.18 : תבנית מדרגה n:

$$\alpha=f\left(q\right)\mathrm{d}q_1\wedge\dots\wedge\mathrm{d}q_n$$

כאשר $f\left(q\right)$ פונקציה חלקה ב q.

הגדרה 12.2.19 יהי $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ו $V \subseteq \mathbb{R}^m$, ונניח כי $\varphi : U \to V$ העתקה חלקה. α תבנית מדרגה k על V.
נגדיר את הפעולה של העתקות חלקות על תבניות $\varphi^*\alpha$ - תבנית של דרגה k, pull back על U. באופן הבא:

$$\varphi * \alpha (\eta_1, \ldots, \eta_k) = \alpha ((D\varphi) \eta_1, \ldots, (D\varphi) \eta_k)$$

12.2.3 אינטגרציה של תבניות

הגדרה 12.2.20 תהי α תבנית מדרגה n על $U \subseteq \mathbb{R}^n$ עם אורינטציה סטנדרטית.
אז:

$$\int_U \alpha := \int_\alpha a(q) \, \mathrm{d}q_1 \ldots \mathrm{d}q_n$$

כאשר $\alpha = a(q) \, \mathrm{d}q_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}q_n$.

טענה 12.2.21

$U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ תחומים קשירים. $f : U \to V$ דיפאומורפיזם. α תבנית מדרגה n על V אז:

$$\int_U f * \alpha = \varepsilon(f) \int_V \alpha$$

כאשר $\varepsilon(f) = 1$ אם f שומרת אוריינטציה ו -1 אם היא הופכת.

הערה 12.2.22 משפט זה למעשה אומר כי האינטגרל לא תלוי בבחירה של הקואורדינטות כאשר בחירה זו מכבדת אורינטציה.

הוכחה: נסמן את הבסיס הסטנדרטי ב $e_1, \ldots, e_n$ כאשר $e_i = \frac{\partial}{\partial q_i}$. לפי ההגדרה:

$$\begin{aligned} f * \alpha \underbrace{(e_1, \ldots, e_n)}_{\in T_q U} &= \alpha \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial q} e_1, \ldots, \frac{\partial f}{\partial q} e_n \right)}_{\in T_{f(q)} V} \\ &= \det \left(\frac{\partial f}{\partial q} \right) \underbrace{\alpha (e_1, \ldots, e_n)}_{a(f(q))} = a(f(q)) \det \left(\frac{\partial f}{\partial q} \right) \end{aligned}$$

דהיינו:

$$f * \alpha = a(f(q)) \det \left(\frac{\partial f}{\partial q} \right) \mathrm{d}q_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}q_n$$

ולכן:

$$\begin{aligned} \int_U f^* \alpha &= \int_U a(f(q)) \underbrace{\det \left(\frac{\partial f}{\partial q} \right)}_{\varepsilon(f) \left| \frac{\partial f}{\partial q} \right|} \mathrm{d}q_1 \ldots \mathrm{d}q_n \\ &= \varepsilon(f) \int_U a(f(q)) \left| \det \frac{\partial f}{\partial q} \right| \mathrm{d}q_1 \ldots \mathrm{d}q_n \end{aligned}$$

ומהחלפת משתנים נקבל כי:

$$= \varepsilon(f) \int_V a(q) \, \mathrm{d}q_1 \ldots \mathrm{d}q_n = \varepsilon(f) \int_V \alpha$$

■

12.3 נפח בגיאומטריה רימנית

יהי $U\subseteq\mathbb{R}^n$ ו g מטריקה רימנית. נניח כי האוריינטציה סנדרטית.

הגדרה 12.3.1 תבנית נפח רימני α על U היא תבנית מדרגה n כך שלכל $q\in U$, αעל T_qU היא תבנית קנונית ביחס לאוריינטציה ומכפלה סקלרית $(\ ,\ )_g$.

$\xi_1,\ldots,\xi_n\in T_qU$ בסיס אורתונורמלי, $\alpha\left(\xi_1,\ldots,\xi_n\right)=1$.

דוגמה 12.3.2 : $q_1,\ldots,q_n$ קואורדינטות על U. g: $\mathrm{d}s^2=\sum g_{i,j}\left(q\right)\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_j$.

תבנית נפח: $\alpha=?\left(q\right)\mathrm{d}q_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}q_n$. נגדיר $e_i=\frac{\partial}{\partial q_i}$ ואז

$$?=\alpha\left(e_1,\ldots,e_n\right)=\sqrt{\det\left(\underbrace{\left(e_i,e_j\right)_g}_{g_{i,j}}\right)}=\sqrt{\det\left(g_{i,j}\left(q\right)\right)}$$

סיכום:

$$\alpha=\sqrt{\det\left(g_{i,j}\left(q\right)\right)}\mathrm{d}q_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}q_n$$

הגדרה 12.3.3 עבור תחום $W\subset U$:

$$\mathrm{Vol}_g\left(W\right)=\int_W\alpha=\int_W\sqrt{\det\left(g_{i,j}\left(q\right)\right)}\mathrm{d}q_1\ldots\mathrm{d}q_n$$

(וכך למעשה מחשבים נפח בעזרת מטריקה).

12.4 דוגמאות קונקרטיות

דוגמה 12.4.1 : $\mathbb{R}^n$, $\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}q_1^2+\ldots+\mathrm{d}q_n^2$ ואז: $g_{i,j}\left(q\right)=\delta_{i,j}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases}$. נקבל כי:

$$\sqrt{\det\left(g_{i,j}\right)}=1\Rightarrow\mathrm{Vol}_g\left(W\right)=\int_W\mathrm{d}q_1\ldots\mathrm{d}q_n$$

כפי שהיינו מצפים.

דוגמה 12.4.2 : יהי $M^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ על משטח. מהו הנפח הרימני במובן של המטריקה המושרית?

תיאור ראשון: בפרמטריזציה רגולרית: $f:\underbrace{U}_{\subset\mathbb{R}^n}\to\mathbb{R}^{n+1}$.

המטריקה המושרית: $g_{i,j}=\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}(q),\frac{\partial f}{\partial q_j}(q)\right)$, ולכן תבנית הנפח היא:

$$\alpha_q=\sqrt{\det\left(\left(\frac{\partial f}{\partial q_i},\frac{\partial}{\partial q_j}\right)\right)}\mathrm{d}q_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}q_n$$

תיאור שני: בהינתן אורינטציה: $E_1,\ldots,E_n$ בסיס חיובי ב T_AM אם"ם $E_1,\ldots,E_n,\nu$ בסיס חיובי ב $\mathbb{R}^{n+1}$.
נגדיר $\sigma=\mathrm{d}x_1\wedge\ldots\wedge\mathrm{d}x_{n+1}$ תבנית נפח אוקלידי על $\mathbb{R}^{n+1}$.

טענה 12.4.3

תבנית נפח רימני α על M ניתנת ע"י: $\alpha(\xi_1,\ldots,\xi_n):=\sigma(\xi_1,\ldots,\xi_n,\nu)$.

הוכחה: לפי הגדרה, α היא התבנית היחידה כך ש $\alpha(E_1,\ldots,E_n)=1$ לכל בסיס ארותונורמלי חיובי על T_AM אבל $E_1,\ldots,E_n,\nu$ בסיס אורתונורמלי חיובי ב $T_A\mathbb{R}^{n+1}$ אם"ם $E_1,\ldots,E_n$ בסיס אורתונורמלי חיובי ב T_AM. ואז:

$$\alpha(E_1,\ldots,E_n)=\sigma(E_1,\ldots,E_n,\nu)=1$$

(כי σ תבנית נפח סטנדרטית אקולידית). ■

12/01/

12.5 משפט Gauss-Bonnet

משפט 12.5.1

בהינתן $U\subseteq\mathbb{R}^2$, g מטריקה רימנית, γ עדומה עם פרמטריזציה טבעית, $N(t)$ נורמל היחידה ל γ $(\dot\gamma,N)$ בסיס חיובי ו $k(t):=$ $(\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma,N)$ עקמומיות גאודסית עם סימן.
נניח γ עקומה סגורה ולא חותכת את עצמה: $\gamma:[0,L]\to U$, t פרמטר טבעי. $\gamma=\partial V$ עבור תחום V כלשהו. K עקמומיות רימן של g אז:

$$\int_0^L k(t)\,\mathrm{d}t=2\pi-\int_V K\cdot\omega_g$$

כאשר ω_g תבנית שטח של g.

דוגמה 12.5.2 : $\mathbb{R}^2$ עם המטריקה האוקלידית $\Leftarrow\int k(t)\,\mathrm{d}t=2\pi$.

דוגמה 12.5.3 : ספירה ברדיוס R.
V חצי ספירה , γ מעגל גדול. אזי $K=\frac{1}{R^2}$ ו: $k\equiv 0$ (כי זה קו גאודסי) ואז:

$$0=2\pi-\underbrace{\int_V\frac{1}{R^2}\mathrm{dArea}}_{\frac{1}{R^2}\cdot\mathrm{Area}(V)=\frac{4\pi R^2}{2}}$$

מסקנה 12.5.4

אם g מטריקה כלשהי כך ש γ היא גאודסית אז: $\int K\omega_g=2\pi$.

12.5.1 חזרה לתבניות דיפרציאליות

$\Omega^k(U)$ - אוסף של כל התבניות הדיפרציאליות על U מדרגה k, $\dim U = 2$, $\left(\Omega^1(u), \Omega^2(u)\right)$. $\Omega^1(u) \to \Omega^2(u)$ (דיפרנציאל).

נזכר שעבור $U \ni q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$ ו $\alpha \in \Omega^1(u)$: $\alpha = a_1(q)\,\mathrm{d}q_1 + a_2(q)\,\mathrm{d}q_2$

הגדרה 12.5.5

$$\mathrm{d}\alpha := \left(\frac{\partial a_2}{\partial q_1} - \frac{\partial a_1}{\partial q_2}\right)\mathrm{d}q_1 \wedge \mathrm{d}q_2$$

הערה 12.5.6 הגדרה זו תלויה באופן דרמטי בקואורדינטות!

טענה 12.5.7

$$\mathrm{d}\alpha(X,Y) = L_X(\alpha(Y)) - L_Y(\alpha(X)) - \alpha([X,Y])$$

לכל $x, y \in \mathrm{Vect}(U)$.

הוכחה: $\alpha = \sum_{i=1}^2 a_i(q)\,\mathrm{d}q_i$, $\alpha(Y): U \to \mathbb{R}$ מוגדרת באופן הבא: $q \mapsto \alpha_1(Y(q)) \Leftarrow \alpha(Y) = \sum a_i(q) Y_i(q)$.

$$\begin{aligned} L_X(\alpha(Y)) &= \sum_{i,j} X_j \frac{\partial}{\partial q_j}\left(a_i(q) Y_i(q)\right) \\ &\underbrace{=}_{\text{Leibniz}} \sum_{i,j} \frac{\partial a_i}{\partial q_j} X_j Y_i + \sum_{i,j} a_i X_j \frac{\partial Y_i}{\partial q_j} \end{aligned}$$

ובאותו אפן:

$$L_Y(\alpha(X)) = \sum_{i,j} \frac{\partial a_i}{\partial q_j} Y_i X_j + \sum_{i,j} a_i Y_j \frac{\partial X_i}{\partial q_j}$$

נחסר בין מה שקיבלנו:

$$L_X(\alpha(Y)) - L_Y(\alpha(X)) = \underbrace{\sum_{i,j} \frac{\partial a_i}{\partial q_j}\left(X_j Y_i - Y_j X_i\right)}_{i=j \Rightarrow X_j Y_i - Y_i X_j = 0} + \underbrace{\sum_i a_i \underbrace{\left(\sum_j X_j \frac{\partial Y_i}{\partial q_j} - Y_j \frac{\partial X_i}{\partial q_j}\right)}_{z_i}}_{\sum a_i z_i = \alpha(z)}$$

$z = [X,Y]$ ולכן קיבלנו כי:

$$\begin{aligned} L_X(\alpha(Y)) - L_Y(\alpha(X)) &= \frac{\partial a_1}{\partial q_2}\left(X_2 Y_1 - Y_2 X_1\right) + \frac{\partial a_2}{\partial q_1}\left(X_1 Y_2 - Y_1 X_2\right) + \alpha([X,Y]) \\ &= \left(\frac{\partial a_2}{\partial q_1} - \frac{\partial a_1}{\partial q_2}\right) \underbrace{\det\begin{pmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{pmatrix}}_{\mathrm{d}q_1 \wedge \mathrm{d}q_2(x,y)} + \alpha([X,Y]) \\ &= \left(\frac{\partial a_2}{\partial q_1} - \frac{\partial a_1}{\partial q_2}\right)\mathrm{d}q_1 \wedge \mathrm{d}q_2(X,Y) + \alpha(X,Y) = \mathrm{d}\alpha(X,Y) + \alpha([X,Y]) \end{aligned}$$

כנדרש. ■

יהי (U,g) תחום רימני כך ש $U \subset \mathbb{R}^2$. יהיו E_1 ו E_2 שדות וקטורים על U כך ש:

- לכל q: $|E_1(q)| = |E_2(q)| = 1$.
- לכל q: $(E_1(q), E_2(q)) = 0$.
- E_1, E_2 בסיס חיובי.

נגדיר תבנית:

$$\alpha(X) = (E_1, \nabla_X E_2)$$

כאשר ∇ היא נגזרת Levi-Civita של g.
נגזור (מכיוון ש $E_1, E_2 = 0$) נקבל:

$$\alpha(X) = -(\nabla_X E_1, E_2)$$

טענה 12.5.8

$K = d\alpha(E_1, E_2)$ (עקמומיות רימן). ניסוח אחר: $\omega_g(E_1, E_2) = 1$ (שטח) מכיוון ש $d\alpha = K\omega_g$.

הוכחה:

$$K = (R(E_1, E_2) E_2, E_1) = \left(\nabla_{E_1}\nabla_{E_2}E_2 - \nabla_{E_2}\nabla_{E_1}E_2 - \nabla_{[E_1,E_2]}, E_2, E_1\right)$$

נשים לב שעבור וקטור X:

$$\nabla_X E_1 = \cancelto{0}{(\nabla_X E_1, E_1)} E_1 + \underbrace{(\nabla_X E_1, E_2)}_{-\alpha(X)} E_2$$

$(\nabla_X E_1, E_1) = 0$ כי גוזרים את $(E_1, E_1) = 1$. ולכן:

$$\nabla_X E_1 = -\alpha(x) E_2$$

ובאופן דומה:

$$\nabla_X E_2 = \alpha(X) E_1$$

לכן:

$$\begin{aligned} K &= \left(\nabla_{E_1}(\alpha(E_2)E_1) - \nabla_{E_2}(\alpha(E_1)E_1) - \nabla_{[E_1,E_2]}E_2, E_1\right) \\ &= (\nabla_{E_1}(\alpha(E_2)E_1) - \nabla_{E_2}(\alpha(E_1)E_1), E_1) - \underbrace{\left(\nabla_{[E_1,E_2]}E_2, E_1\right)}_{\alpha[E_1,E_2]} \end{aligned}$$

אבל:

$$\nabla_{E_1}(\alpha(E_2)E_1) = \underbrace{L_{E_1}(\alpha(E_2))E_1 + \alpha(E_2)\nabla_{E_1}E_1}_{d\alpha(E_1,E_1)}$$

ובאופן דומה:

$$\nabla_{E_2}(\alpha(E_1)E_1) = L_{E_2}\alpha(E_1) + \alpha(E_1)\nabla_{E_2}E_1$$

משהו חסר כאן, אבל בשורה התחתונה:

$$K = d\alpha(E_1, E_2)$$

■

18/01/

לא נוכיח את המשפט הבא, אבל אנחנו זקוקים לו על מנת להוכיח את Gauss-Bonnet.

משפט 12.5.9 נוסחת Green

יהי $\gamma:[0,L]\to\mathbb{R}^2$ מסילה פשוטה וסגורה ב $\mathbb{R}^2$ ו$\alpha\in\Omega^1(V)$.

$$\int_\gamma\alpha:=\int_0^L\alpha(\dot\gamma(t))\,\mathrm{d}t=\int_V\mathrm{d}\alpha$$

כמו כן, אנחנו זקוקים לעובדה הבאה (גם אותה לא נוכיח כאן):

משפט 12.5.10

נניח ש $X\in\mathrm{Vect}(U)$ וכי $X(q)\neq0$ לכל q. ונניח כי יש לנו עקומה פשוטה וסגורה γ. נגדיר: $\theta(t)=\angle(\dot\gamma(t),X(\gamma(t)))$.
אז קיים ענף רציף של הזווית θ כך ש $\theta(L)-\theta(0)=2\pi$.

כעת, יש לנו E_1 ו E_2 אורתונורמליים ו $\dot\gamma$, נסמן ב θ את הזווית בין E_1 ל $\dot\gamma$. אנחנו יכולים לכתוב:

$$\begin{aligned}\dot\gamma&=\cos\theta E_1+\sin\theta E_2\\N&=-\sin\theta E_1+\cos\theta E_2\end{aligned}$$

טענה 12.5.11

$k(t)=\dot\theta(t)-\alpha(\dot\gamma(t))$.

הוכחה:

$$\begin{aligned}\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma&=D_t\dot\gamma\\&=D_t(cos\theta E_1+\sin\theta E_2)\\&=-\dot\theta\sin\theta E_1+\cos\theta\nabla_{\dot\gamma}E_1+\dot\theta\cos\theta E_2+\sin\theta\nabla_{\dot\gamma}E_2\\&=\dot\theta(-\sin\theta E_1+\cos\theta E_2)+\cos\theta\nabla_{\dot\gamma}E_1+\sin\theta\nabla_{\dot\gamma}E_2\\&=\dot\theta N+\cos\theta\nabla_{\dot\gamma}E_1+\sin\theta\nabla_{\dot\gamma}E_2\end{aligned}$$

כעת, נחשב את k:

$$\begin{aligned}k&=(\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma,N)\\&=\left(\left(\dot\theta N+\cos\theta\nabla_{\dot\gamma}E_1+\sin\theta\nabla_{\dot\gamma}E_2\right),N\right)\\&\underbrace{=}_{(N,N)=1}\dot\theta+\cos\theta(\nabla_{\dot\gamma}E_1,N)+\sin\theta(\nabla_{\dot\gamma}E_2,N)\\&=\dot\theta+\cos\theta(\nabla_{\dot\gamma}E_1)(-\sin\theta E_1+\cos\theta E_2)+\sin\theta(\nabla_{\dot\gamma}E_2)(-\sin\theta E_1+\cos\theta E_2)\\&=\dot\theta-\cos\theta\sin\theta\underbrace{(\nabla_{\dot\gamma}E_1,E_1)}_{0}+\cos^2\theta\overbrace{(\nabla_{\dot\gamma}E_1,E_2)}^{-\alpha(\dot\gamma)}+\sin\theta\cos\theta(\nabla_{\dot\gamma}E_2,E_2)-\sin^2\theta\underbrace{(\nabla_{\dot\gamma}E_2,E_1)}_{\alpha(\dot\gamma)}\\&=\dot\theta-\alpha(\dot\gamma)\left(\cos^2\theta+\sin^2\theta\right)\\&=\dot\theta-\alpha(\dot\gamma)\end{aligned}$$

מכיוון ש $(E_1,E_1)=1=(E_2,E_2)$ אז: $(\nabla_{\dot\gamma}E_1,E_1)=0=(\nabla_{\dot\gamma}E_2,E_2)$. ■

12.5.2 הוכחה של Gauss Bonnet

כעת אנחנו יכולים להוכיח את Gauss Bonnet: **הוכחה:** מהטענה אנחנו יודעים כי: $\mathrm{d}\alpha = K\omega_g$.

$$\begin{aligned}\int_0^L k(t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^L \dot{\theta} - \alpha(\dot{\gamma})\,\mathrm{d}t \\ &= \underbrace{(\theta(L) - \theta(0))}_{2\pi} - \int_0^L \alpha(\dot{\gamma})\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

כאשר התשמשנו בעובדה הטופולוגית. כעת מנוסחת גרין:

$$= 2\pi - \int_V \mathrm{d}\alpha$$

אבל $\mathrm{d}\alpha = K\omega_g$ לכן:

$$= 2\pi - \int_V K\omega_g$$

כנדרש. ■

12.5.3 משטח בלי שפה קומפקטית

משטח (יריעה ממימד 2) בלי שפה קומפקטית , אוריאנטבילית.

נבחין כי הטורוס למעשה הומאומורפי לספירה עם ידית. וצורה של 8 הומאומורפית לספירה עם שתי ידיות, וכן הלאה. נסמן ב h את כמות הידיות.

נקח על הספירה. נגדיר g מטריקה רימנית על $\sum_h \mathrm{d}\gamma$. K עקומומיות רימן. ו ω_g תבנית שטח. אז:

$$\int_{\sum_h} K\omega_g = 4\pi(1-h)$$

דוגמה 12.5.12 : S^2 אז $K=1$ ו $\text{Area} = 4\pi$. $\int K\omega_g = 4\pi = 4\pi(1-0)$.

דוגמה 12.5.13 : $\mathbb{T}^2$ אז: $\int_{\mathbb{T}^2} K\omega_g = 4\pi(1-1) = 0$.
באמת על $\mathbb{T}^2$ קיימת מטריקה אוקלידית. $\mathbb{T}^2 = {}^{\mathbb{R}^2}/_{\mathbb{Z}^2}$. אנחנו למעשה מחלקים את המישור לריבועים בגודל 1. ואז מדביקים את הצלעות כדי לקבל טורוס (את התחתונה עם העליונה ואת הימנית עם השמאלית).
ולכן יש לנו מטריקה מושרית מהמטריקה האוקלידית על הריבוע הקטן.
כלומר כאן קיימת מטריקה עם עקמומיות 0.

דוגמה 12.5.14 : עבור $h \geq 2$. אנחנו מקבלים כי:

$$\int_{\sum_h} K\omega_g = 4\pi(1-h) < 0$$

אנחנו יכולים לראות כי על משטח הזה לא קיימת מטריקה עם עקמומיות חיובית.
השאלה היא האם קיימת מטריקה עם עקמומיות -1?
התשובה היא שכן. נקח את המישור ההיפרבולי: $\mathbb{H} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\right\}$. ואז $q = \frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}{y^2}$ ראינו בתרגול כי $K=-1$ ואז $\Gamma \rightsquigarrow \mathbb{Z}^2$ של איזומטריות של $\mathbb{H}$. ${}^{\mathbb{H}}/_{\Gamma} = \sum_h$.

פרק 13

תולדות הגאומטריה דיפרנציאלית

פרק זה לא מדוייק, ולאוניד לא מומחה של תולדות המתמטיקה, אבל לתת לנו טעם.

המושג של גאומטריה דיפרנציאלית (Differential Geometry) הופיע בערך ב 1894 ע"י Luigi Bianchi (1856-1928). את העקמומיות של עקומות במישור ידע כבר Newton ב1671 אבל זה פורסם רק ב 1736.

עקומות במרחב: הנוטציה של עקומות במרחב היא יותר מודרנית, ואחד השחקנים המובילים היה Clairaute (1713-1765).

בשנים מאוחרות יותר, Leonard Euler (1707-1783) ו Lanoret הגדירו את העקמומיות ופיתול. ו(1826) Cauchy הגדיר את נוסחאות Fernet (שאח"כ שופרו ב 1852 ע"י Serre & Fernet).

משטחים: בשנת $1733/39$ Clairaut חקר משטחי סיבוב ומצא את אינטגרל Clairaut. ו בשנת 1760, Euler מצא $N\|\nu$.

וב1827 Gauss הגדיר את עקמומיות Gauss, התבנית היסודית השניה ומשפט egregium והוכיח גרסה של Gauss-Bonnet (לא למשטחים אלא למשולשים).

עקמומיות ממוצעת: המתמטיקאית Sophie Germain קיבלה את המסקנה שהיא רוצה לעסוק במתמטיקה מהמוות של ארכימדס שהיה שקוע במחשבות על מתמטיקה בזמן שחייל רומאי התקרב ורצח אותו. היא התכתבה עם גאוס תחת השם M. Le Blanc כדי לא לחשוף את היותה אישה. והיא זו שהגדירה את העקמומיות הממוצעת.

אדם חשוב נוסף הוא Richard Riemann (1826-1866)הוא הגדיר את המושג של $U \subset \mathbb{R}^n$ מאיקה רימנית כללית, הוא גם הגדיר גאודסיות ועקמומיות Riemann. מה שמשונה היא שבאותה תקופה לא הייתה ההגדרה של נגזרת קווריאנטית, אז איך הוא הגדיר את עקמומיות רימן? הוא הסתכל על התחום $\dim \alpha = 2 \subset T_qU$ ולקח את כל המשיקים בנקודה והעביר קווים גאודסים.

ועוד אדם שווצרי מפורסם: E.B. Christoffel (1829-1900) הגדיר ב 1869 את סימני כריסטופל $\Gamma^k_{i,j}$ בזמן שניסה להבין את העבודות של רימן.

במאה ה19, Minding מצא את משטח Beltrami, וBeltrami בעצמו יותר מאוחר (1866) מצא קשר עם גאומטריה היפרבולית.

נגזרת קוריאנטית: הגדיר אותה Ricci (1853-1925) בשנת 1914. (שזה קצת מוזר כי כריסטופל הגדיר את הסימנים שלו לפני, ככל הנראה הוא השתמש בהם רק כדי להבין את המשוואות של רימן, אבל לא הגדיר אותם).

וכמובן Tulio-Levi-Civita (1873-1941) הגדיר את נגזרת Levi-Civita והזזה במקביל.

ובסביבות 1917

חלק II

תרגולים

פרק 14

תרגול ראשון - 27.10.2014 - מסילות ב $\mathbb{R}^n$

14.1 מנהלות

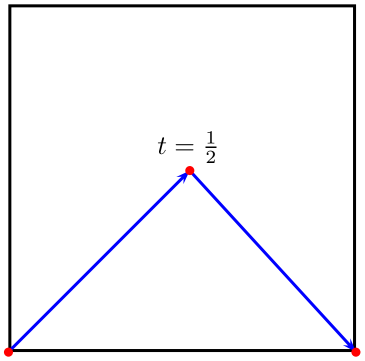
המתרגל: דניאל רוזן danielr6@post.tau.ac.il
אתר הקורס: http://sites.google.com/site/polterov ולהכנס ל Teaching Fall 2014
שעת קבלה: יום ד' בין השעות 9:00-10:00 בתיאום במייל. אופן ספייס, מרתף שרייבר.

14.2 תזכורת הגדרות

$(\mathbb{R}^n, |\cdot|)$ כאשר $|\cdot|$ היא נורמה אוקלידית.
מסילה (או עקומה) היא העתקה חלקה $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$.
משיק למסילה: $\dot{\gamma} = (\dot{\gamma}_1, \ldots, \dot{\gamma}_n)$.
אורך מסילה מוגדר להיות: $\text{length}(\gamma) = \int_a^b |\dot{\gamma}(t)| \, dt$.

14.3 עקום Peano

עקום Peano הינו דוגמה למסילה רציפה $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ שתמונתה הינה $\gamma([0,1]) = [0,1]^2$.
נראה בנייה של עקום Peano.
נתחיל עם העתקה רציפה: $\gamma : [0,1] \to [0,1]^2$ המקיימת: $\gamma(0) = (0,0)$ ו: $\gamma(1) = (1,0)$.

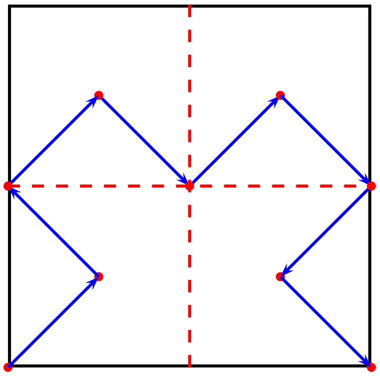


הערה 14.3.1 בשיעור היה מדובר במסילה חלקה, אבל זה לא באמת קריטי.

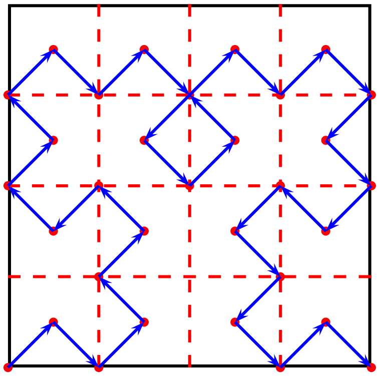
נגדיר $T\gamma:[0,1]\to[0,1]^2$ באופן הבא:

$$T\gamma(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}\left(y\left(4t\right),x\left(4t\right)\right) & t\in[0,1/4]\\ \frac{1}{2}\left(x\left(4t-1\right),y\left(4t-1\right)\right)+\left(0,\frac{1}{2}\right) & t\in[1/4,1/2]\\ \frac{1}{2}\left(x\left(4t-2\right),y\left(4t-2\right)\right)+\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) & t\in[1/2,3/4]\\ \frac{1}{2}\left(-y\left(4t-3\right),-x\left(4t-3\right)+\left(1,\frac{1}{2}\right)\right) & t\in[3/4,1]\end{cases}$$

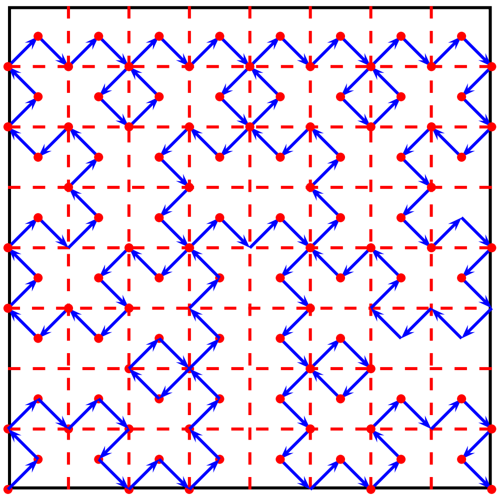
נקבל כי $T\gamma$ נראית כך:



$T\gamma$ מקיימת את התנאים: $T\gamma(0)=(0,0)$ ו: $T\gamma(1)=(1,0)$. באופן דומה נוכל להגדיר $TT\gamma$:



וגם את $TTT\gamma$:



וכן הלאה וכן הלאה...

תרגיל 14.3.2 : לכל α,β רציפות שמקיימות את התנאי $\alpha(0)=\beta(0)=(0,0)$ ו $\alpha(1)=\beta(1)=(1,0)$ מתקיים:

$$\forall t\quad |T\alpha(t)-T\beta(t)|\le\frac{1}{2}|\alpha(t)-\beta(t)|$$

מסקנה 14.3.3

$$\forall t\quad \left|T^k\alpha(t)-T^k\beta(t)\right|\le\frac{1}{2^k}|\alpha(t)-\beta(t)|$$

נגדיר סדרת העתקות $\gamma_k:[0,1]\to[0,1]^2$ ע"י:

$$\begin{cases}\gamma_0=\gamma\\ \gamma_{k+1}=T\gamma_k\end{cases}$$

$$\forall t,k\quad |\gamma_{k+1}(t)-\gamma_k(t)|\le\frac{1}{2^k}|\gamma_1(t)-\gamma_0(t)|\le\frac{1}{2^k}\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2^k}$$

מסקנה 14.3.4

$(\gamma_k(t))_{k=0}^{\infty}$ מתכנס במ"ש. נסמן את הגבול ב:

$$\gamma_\infty(t)=\lim_{k\to\infty}\gamma_k(t)$$

תרגיל 14.3.5 : $\gamma_\infty:[0,1]\to[0,1]^2$ צפופה ב $[0,1]^2$.

רמז: תמונת γ_k עוברת בכל ריבוע $\left[\frac{\ell}{2^k},\frac{\ell+1}{2^k}\right]\times\left[\frac{m}{2^k},\frac{m+1}{2^k}\right]$.

בנוסף $\gamma_\infty([0,1])$ סגורה. (תמונה רציפה של קבוצה קומפקטית). לכן:

$$\gamma_\infty([0,1])=\overline{\gamma_\infty([0,1])}=[0,1]^2$$

כנדרש.

תרגיל 14.3.6 : γ_∞ אינו תלוי בבחירת γ_0 רציפה המקיימת את התנאי $\gamma_0(0)=(0,0)$ ו: $\gamma_0(1)=(1,0)$.

פתרון: המרחב שמקיים את התנאי הנ"ל הינו מטרי. T העתקה מכווצת. מש"ל.

פרק 15

תרגול שני - 10.11.2014 - מסילות במרחב

15.1 בסיס Frenet

הגדרה 15.1.1 תהי $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ מסילה חלקה. נניח ש γ בפרמטריזציה טבעית.
הוקטורים של בסיס Fernet הינם:

1. $v(s)=\dot{\gamma}(s)$. נסמן את העקמומיות $k(s)=|\dot{v}(s)|$ (נבחין כי $k(s)\geq 0$).
2. והקטור הנורמל: $n(s)=\frac{\dot{v}(s)}{|\dot{v}(s)|}=\frac{\dot{v}(s)}{k(s)}$.

הערה 15.1.2 $n(s)\perp v(s)$

3. הוקטור הבי־נורמלי: $b(s)$ המוגדר ע"י: $b(s)\perp\operatorname{span}(v(s),n(s))$, $|b(s)|=1$ ומתקיים ש $(v(s),n(s),b(s))$ הוא בסיס אורתונורמלי חיובי. במילים אחרות: $b=[v,n]$.

נניח כי $k(s)\neq 0$ לכל s.

15.2 משוואות Frenet

$$\begin{array}{rccc}\dot{v}(s)= & & k(s)\,n(s) & \\ \dot{n}(s)= & -k(s)\,v(s) & & -\tau(s)\,b(s)\\ \dot{b}(s)= & & \tau(s)\,n(s) & \end{array}$$

הגדרה 15.2.1 $\tau(s)\in\mathbb{R}$ נקרא הפיתול.

הסיבה לכתיבה בצורה מוזרה זו היא כדי שנזכור את הכתיב המטריציוני:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\begin{pmatrix}- & v(s) & -\\ - & n(s) & -\\ - & b(s) & -\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & k & 0\\ -k & 0 & -\tau\\ 0 & \tau & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}- & v(s) & -\\ - & n(s) & -\\ - & b(s) & -\end{pmatrix}$$

15.3 נוסחאות ל τ,k

עבור $\alpha(s)$ בפרמטריזציה טבעית:

1. $k(s)=|[v(s),\dot{v}(s)]|=|\dot{v}(s)|$.
2. $\tau(s)=-\frac{(v(s),[\dot{v}(s),\ddot{v}(s)])}{|[v(s),\dot{v}(s)]|^2}$

הוכחה: ממשוואות Frenet מתקיים:

$$\dot{v} = kn \Rightarrow [v, \dot{v}] = k[v, n] = kb$$

אבל $|b| = 1$ ו $k \geq 0$ ולכן:

$$k = |[v, \dot{v}]|$$

כנדרש.

כעת, נגזור את $\dot{v} = kn$ ונקבל:

$$\begin{aligned}\ddot{v} &= \dot{k}n + k\dot{n} \\ &= \dot{k}n - k^2 v - k\tau b\end{aligned}$$

ולכן:

$$\begin{aligned}[\dot{v}, \ddot{v}] &= \left[kn, \dot{k}n - k^2 v - k\tau b\right] \\ &= -k^3 [n, v] - k^2\tau [n, b] \\ &= k^3 b - k^2 \tau v\end{aligned}$$

ולכן:

$$(v, [\dot{v}, \ddot{v}]) = -k^2\tau$$

ולכן:

$$\tau = -\frac{(v, [\dot{v}, \ddot{v}])}{k^2} = -\frac{(v, [\dot{v}, \ddot{v}])}{|[v, \dot{v}]|^2}$$

■

טענה 15.3.1

נניח $\gamma(t)$ מסילה רגולרית אז:

$$\begin{cases} k(t) = \frac{|[\gamma', \gamma'']|}{|\gamma'|^3} \\ \tau = -\frac{(\gamma', [\gamma'', \gamma'''])}{|\gamma'|^3} \end{cases}$$

הוכחה: נעבור לפרמטריזציה טבעית: $\alpha(s)$. כאשר:

$$\gamma(t) = \alpha(s(t))$$

ומתקיים:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t} |\gamma'(t)| \, \mathrm{d}t \Rightarrow \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = |\gamma'(t)|$$

נגזור את הביטוי של $\gamma(t)$ ונקבל:

$$\gamma'(t) = \dot{\alpha}(s(t)) \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \dot{\alpha}(s(t)) |\gamma'(t)|$$

נגזור שוב ונקבל:

$$\gamma''(t)=\ddot{\alpha}(s(t))\left|\gamma'(t)\right|^2+\dot{\alpha}(s(t))\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\gamma'(t)\right|$$

לכן:

$$[\gamma',\gamma'']=[\dot{\alpha},\ddot{\alpha}]\left|\gamma'(t)\right|^3$$

ולכן:

$$k(t)=|[\dot{\alpha}(s(t)),\ddot{\alpha}(s(t))]|=\frac{|[\gamma',\gamma'']|}{|\gamma'|^3}$$

נגזור שוב את γ ונקבל כי:

$$\gamma'''=\dddot{\alpha}(s(t))\left|\gamma'(t)\right|^3+\ddot{\alpha}A(t)+\dot{\alpha}B(t)$$

ונקבל:

$$[\gamma'',\gamma''']=[\ddot{\alpha},\dddot{\alpha}]\left|\gamma'\right|^5+[\dot{\alpha},\ddot{\alpha}]c(t)+[\dot{\alpha},\dddot{\alpha}]D(t)$$

נבחין כי:

$$[\dot{\alpha},\ddot{\alpha}]\perp\dot{\alpha},\quad[\dot{\alpha},\dddot{\alpha}]\perp\dot{\alpha}$$

וכי:

$$\gamma'\|\dot{\alpha}$$

ולכן נקבל כי:

$$(\gamma',[\gamma',\gamma'''])=(\dot{\alpha},[\ddot{\alpha},\dddot{\alpha}])\left|\gamma'\right|^6$$

ומכאן, ומהביטוי של $k(t)$ שראינו כי $|[\dot{\alpha}(s(t)),\ddot{\alpha}(s(t))]|=\frac{|[\gamma',\gamma'']|}{|\gamma'|^3}$ נקבל כי:

$$\frac{(\gamma',[\gamma'',\gamma'''])}{|[\gamma',\gamma'']|^2}=-\frac{(\dot{\alpha},[\ddot{\alpha},\dddot{\alpha}])}{|[\dot{\alpha},\ddot{\alpha}]|}=\tau(t)$$

■

דוגמה 15.3.2 (קו בורג\סליל) Helix: עבור $b\in\mathbb{R}$ ו $a>0$ נסמן:

$$f(t)=f_{a,b}(t)=(a\cos t,a\sin t,bt)$$

✎ **תרגיל 15.3.3 :** חשבו פיתול ועקמומיות.

פתרון:

$$\begin{aligned} f'(t) &= (-a\sin t, a\cos t, b) \\ f''(t) &= (-a\cos t, -a\sin t, 0) \\ f'''(t) &= (a\sin t, -a\cos t, 0) \end{aligned}$$

נחשב את הגודל של הנגזרת:

$$|f'| = \sqrt{a^2+b^2}$$

וכעת נחשב את העקמומיות:

$$[f', f''] = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \end{vmatrix} = \left(ab\sin t, -ab\cos t, a^2\right)$$

ולכן:

$$|[f', f'']| = a^2\left(a^2+b^2\right)$$

ולכן:

$$k = \frac{|[f', f'']|}{|f'|^3} = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^3} = \frac{a}{a^2+b^2}$$

בנוסף (הוא משתמש כאן בזהות של מכפלה פנימית שראינו בכיתה ולא הוכחנו שאומרת: $([f', f''], f''') = (f', [f'', f'''])$):

$$([f', f''], f''') = a^2 b$$

ולכן:

$$\tau = -\frac{([f', f''], f''')}{|[f', f'']|^2} = -\frac{a^2 b}{a^2(a^2+b^2)} = -\frac{b}{a^2+b^2}$$

✎ **תרגיל 15.3.4 :** האם קיימת איזומטריה (שומרת אוריינטציה) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ המעבירה את $f_{a,b}$ ל $f_{a,-b}$?

פרק 16

תרגול שלישי - 17.11.2014 - מרחב משיק, דיפרנציאל ומשטחים ב $\mathbb{R}^n$

16.1 מרחב משיק

$U\subset\mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה, $q\in U$ המרחב המשיק לU בנקודה Q הוא:

$$T_qU=\{\dot{\gamma}(0)\mid\ \gamma:(-\varepsilon,\varepsilon)\to U\quad\gamma(0)=q\quad\gamma\in C^\infty\}$$

T עבור Tangent Space.

נבחין כי: $T_qU\cong\mathbb{R}^n$ באופן טבעי: אם יש לנו $v\in\mathbb{R}^n$ אז: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\mid_{t=0}(q+tv)\in T_qU$.

16.2 דיפרנציאל

נניח שיש לנו $U\subset\mathbb{R}^n$ ו $V\subset\mathbb{R}^m$ פתוחות. $f:U\to V$ חלקה (דהיינו $f=(f_1,\ldots,f_n)$ אזי $f_j\in C^\infty(U)$). אז לכל $q\in U$:

$$D_qf:T_qU\to T_{f(q)}V$$

המוגדרת באופן הבא:

$$D_qf(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mid_{t=0}(f\circ\gamma)(t)$$

16.2.1 תכונות

- במונחי האיזומורפיזם $T_qV\cong\mathbb{R}^m$, $T_{f(q)}U\cong\mathbb{R}^n$.

$$D_qf(h)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mid_{t=0}f(q+th)$$

- בקואורדינטות ביחס לבסיסים הסטנדרטיים של $\mathbb{R}^n$ ו $\mathbb{R}^m$, המטריצה המתאימה ל D_qf היא: $\left(\frac{\partial f_i}{\partial q_j}(q)\right)_{i,j}$

$$D_qf(e_1)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mid_{t=0}f(q+te_1)=\left(\frac{\partial f_1}{\partial q_1}(q),\ldots,\frac{\partial f_m}{\partial q_1}(q)\right)$$

- כלל השרשרת:

$$D_q(f\circ g)=D_{g(q)}f\circ D_q g$$

דוגמה 16.2.1 : נזהה את מרחב המטריצות $M_n(\mathbb{R})\cong\mathbb{R}^{n^2}$. ונגדיר העתקה:

$$\begin{aligned} f:M_n(\mathbb{R}) &\to M_n(\mathbb{R})\\ f(A) &= AA^T \end{aligned}$$

f היא פונקציה חלקה, נרצה לחשב את $D_A f$ עבור $A\in M_n(\mathbb{R})$ כלשהי:

$$\begin{aligned} D_A f(h) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}\, f(A+th)\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}\,(A+th)(A+th)^T\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}\left[AA^T+t\left(hA^T+Ah^T\right)+t^2hh^T\right]\\ &= hA^T+Ah^T \end{aligned}$$

16.3 משטחים ב $\mathbb{R}^n$

$f:U\to\mathbb{R}^n$ עבור $U\subset\mathbb{R}^k$ פתוחה נקראת **אימרסיה** אם $D_q f$ חח"ע לכל $q\in U$.

דוגמה 16.3.1 : $U\subset\mathbb{R}^1$, $f:U\to\mathbb{R}^2$, אימרסיה היא מסילה רגולרית.

הגדרה 16.3.2 פרמטריזציה רגולרית של משטח k ממדי היא $f:U\to\mathbb{R}^n$ עבור $U\subset\mathbb{R}^k$ פתוחה. f היא אימרסיה ו $f:U\to f(U)$ הומאומורפיזם.
אז $M=f(U)\subset\mathbb{R}^n$ נקרא משטח רגולרי k מימדי עם פרמטריזציה.

הגדרה 16.3.3 שתי פרמטריזציות גרולריות $f:U\to\mathbb{R}^n$ ו $g:V\to\mathbb{R}^n$ נקראות שקולות אם $f=g\circ\varphi$ ו $\varphi:U\to V$ היא דיפאומורפיזם עם $\det(D\varphi)>0$.

משטח בלי פרמטריזציה = מחלקת שקילות.

דוגמה 16.3.4 : (גרף)
$U\subset\mathbb{R}^k$ פתוחה, $\varphi:U\to\mathbb{R}^{n-k}$ חלקה. $f(q)=(q,\varphi(q))$.

תרגיל 16.3.5 : "כל משטח רגולרי, שקול מקומית לגרף".
$f : U \to \mathbb{R}^n$ פרמטריזציה רגולרית של משטח. $q \in U$ אז ישנם: $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ לינארית (למעשה, מטריצה תמורה) הפיכה.
$v \in \mathbb{R}^k$, $W \subset U$ פתוחות. $q \in W$ ו $\varphi : V \to W$ דיפאומורפיזם כך ש:

$$g = T \circ f \circ \varphi : V \to \mathbb{R}^n$$

היא גרף. כלומר: $g(q) = (q, \psi(q))$

פתרון: מהנתון: $\mathrm{rank}(D_q f) = k$ ולכן יש מינור $k \times k$ הפיך. נבחר $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ לינארית הפיכה (למעשה מטריצת תמורה) כך ש:

$$T \cdot D_q f = (P \mid *)$$

עם P הפיכה (הכוכב משמעותו המשך המטריצה).

הערה 16.3.6 למעשה אנחנו יודעים שיש מינור $k \times k$ הפיך, אנחנו למעשה מחליפים את הקואורדינטות כך שהוא יהיה המינור בתחילת המטריצה.

נגדיר: $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ ע"י $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (x_1, \ldots, x_k)$ אז:

$$D_q(\pi \circ T \circ f) = P$$

והוא בפרט הפיך. לפי משפט הפונקציה ההפוכה, קיימות $V \subset \mathbb{R}^k$ ו: $q \in W \subset U$ פתוחות כך ש: $\pi \circ T \circ f : W \to V$ היא דיפאומורפיזם. נסמן: $\varphi = (\pi \circ T \circ f)^{-1} : V \to W$ ונבדוק כי $g = T \circ f \circ \varphi$ הוא גרף. אכן:

$$\pi(g(q)) = (\pi \circ T \circ f) \circ (\pi \circ T \circ f)^{-1}(q) = q$$

ולכן:

$$g(q) = (q, \psi(q))$$

תרגיל 16.3.7 : נתונות פרמטריזציות רגולריות $f : U \to \mathbb{R}^n$ ו $g : V \to \mathbb{R}^n$ עבור $U, V \subset \mathbb{R}^k$ פוחות כך ש $f(U) = g(V)$.
הוכיחו כי יש דיפאומורפיזם $\varphi : U' \to V'$ עבור $U' \subset U$ ו $V' \subset V$ פתוחות, כך ש: $f = g \circ \varphi$. (כלומר דיפאומורפיזם מקומי).

חצי פתרון (היתר כתרגיל בית): נבחין כי φ מוגדר ע"י $\varphi = g^{-1} \circ f : U \to V$ מוגדר ואפילו הוא הומאומורפיזם.
נניח בנוסף כי g הוא גרף: $g(q) = (q, \psi(q))$. אז אם $f = (f_1, \ldots, f_n)$ נקבל כי:

$$\varphi(q) = \left(g^{-1} \circ f\right)(q) = (f_1(q), \ldots, f_k(q))$$

אבל ברור כי זה חלק, כי f חלקה ולכן בפרט הקואורדינטות הראשונות שלה חלקות.

המשך התרגיל: להוכיח את המקרה הכללי בו g היא לא גרף. בעזרת תרגיל קודם.

פרק 17

תרגול רביעי - 24.11.2014 - מטריקה רימנית ועל משטחים

17.1 מטריקה רימנית

הגדרה 17.1.1 בהינתן $U \subset \mathbb{R}^n$ תחום. מטריקה רימנית על U היא התאמה חלקה $U \ni q \to g_q$ כאשר g_q היא מכפלה פנימית (תבנית בילינארית, סימטרית, חיובית, לא מנוונת) על T_qU.

אם יש לנו $\xi,\eta \in T_qU$ אז אנחנו יכולים לחשב את: $g_q(\xi,\eta)=(\xi,\eta)_{g_q}$.
לכל $q \in U$ יש בסיס סטנדרטי ל T_qU שנסמן אותו: $e_1,\dots,e_n \in T_qU$. במונחי הבסיס, ניתן לרשום:

$$\begin{aligned} \xi &= (\xi_1,\dots,\xi_n)=\sum \xi_i e_i \\ \eta &= (\eta_1,\dots,\eta_n)=\sum \eta_j e_j \end{aligned}$$

ואז נקבל כי:

$$g_q(\xi,\eta)=\sum_{i,j} g_{i,j}(q)\,\xi_i\eta_j$$

כאשר:

$$g_{i,j}(q)=g_q(e_i,e_j)$$

ומתקיים: $g_{i,j}(q)=g_{j,i}(q)$.

סימון: $\mathrm{d}s^2=\sum\limits_{i,j} g_{i,j}(q)\,\mathrm{d}q_i\mathrm{d}q_j$ ("אלמנט אורך")

דוגמה 17.1.2 : המטריקה הרימנית האוקלידית על $\mathbb{R}^n$:

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}q_1^2+\ldots+\mathrm{d}q_n^2$$

כאשר: $g_{i,j}(q)=\delta_{i,j}$. באופן שקול:

$$g_{\mathrm{Euc}}(\xi,\eta)=\sum_i \xi_i\eta_i$$

17.2 מטריקה מושרית

נניח $f : U \to V$ אימרסיה ($U \subset \mathbb{R}^m$ ו $V \subset \mathbb{R}^n$ פתוחות, ונדרש שיתקיים $m \leq n$), ונניח כי g מטריקה רימנית על V. אז המטריקה המושרית על U (ע"י g, f) או מטריקת ה pull-back (משיכה לאחור), f^*g מוגדרת ע"י:

$$\left(f^*g\right)_q(\xi,\eta) = g_{f(q)}\left(D_qf\xi, D_qf\eta\right)$$

ראינו בכיתה כי אם $f = (f_1, \ldots, f_n)$ ו $g = g_{\mathrm{Euc}}$ אז f^*g נתונה ע"י:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= \left(\mathrm{d}f_1\right)^2 + \ldots + \left(\mathrm{d}f_n\right)^2 \\ &= \left(\sum_j \frac{\partial f_1}{\partial q_j}\mathrm{d}q_j\right)^2 + \ldots + \left(\sum_j \frac{\partial f_n}{\partial q_j}\mathrm{d}q_j\right)^2 \end{aligned}$$

תרגיל 17.2.1 :

$$U_1 \xrightarrow{\varphi} U_2 \xrightarrow{\psi} (U_3, g)$$

אז:

$$(\psi \circ \varphi)^* g = \varphi^*\left(\psi^* g\right)$$

הגדרה 17.2.2 $(U_1, g_1) \xrightarrow{f} (u_2, g_2)$.

- f נקראת אימרסיה איזומטרית אם היא אימרסיה ובנוסף $f^*g_2 = g_1$.
- אם בנוסף f דיפאומורפיזם, היא נקראית איזומטרי רימנית.

דוגמה 17.2.3 : המטריקה האוקלידית בקואורדינטות אחרות.

טרמינולוגיה: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ פתוחה, מערכת קואורדינטות על Ω היא דיפאומורפיזם $f : V \to \Omega$, כאשר $V \subset \mathbb{R}^n$ פתוחה.

דוגמה 17.2.4 : קואורדינטות פולריות: $\Omega = \mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{R}_+$. $(0,\infty) \times (0, 2\pi) \to \Omega$. $(r,\varphi) \mapsto (x,y)$ כאשר:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

דוגמה 17.2.5 : קואורדינטות ספריות: $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $(0,\infty) \times (0,\pi) \times (0,2\pi) \to \Omega$ המוגדרת ע"י

$$(\rho, \theta, \varphi) \to (x, y, z)$$

באופן הבא:

$$\begin{cases} x = \rho\sin\theta\cos\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\theta \end{cases}$$

תרגיל 17.2.6 : חשבו את g_{Euc} ב $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ בקורודינטות פולריות.

הסבר: יש לנו $(x,y)\xrightarrow{f}(r,\varphi)$, עלינו למצוא את f^*g_{Euc}.

פתרון:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}s^2 &= \mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2\\ &= (\mathrm{d}(r\cos\varphi))^2+(\mathrm{d}(r\sin\varphi))^2\\ &= [\cos\varphi\mathrm{d}r-r\sin\varphi\mathrm{d}\varphi]^2+[\sin\varphi\mathrm{d}r+r\cos\varphi\mathrm{d}\varphi]^2\\ &= \mathrm{d}r^2+r^2\mathrm{d}\varphi^2\end{aligned}$$

17.3 על משטחים

$M^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$ - משטח רגולרי n־ממדי.

17.3.1 התבנית היסודית הII

הנורמל החיובי ל M בנקודה $A\in M$ יסומן ν_A והוא צריך לקיים:

- $|\nu_A|=1$
- $\nu_A\perp T_AM$
- $\det\left(\frac{\partial f}{\partial q_1},\ldots,\frac{\partial f}{\partial q_n},\nu_A\right)>0$.

כאשר f פרמטריזציה רגולרית של M.

התבנית היסודית הII: $B:T_AM\times T_AM\to\mathbb{R}$, כאשר $\xi,\eta\in T_AM$, אנחנו לוקחים $\gamma(t)\in M$ כאשר $\gamma(0)=A$ ו $\dot\gamma(0)=\xi$.
וגם $\eta(t)\in T_{\gamma(t)}M$ כאשר $\eta(0)=\eta$ ואז:

$$B(\xi,\eta)=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|_{t=0}\,\eta(t),\nu_A\right)_{g_{\text{Euc}}}$$

בקואורדינטות, נניח כי $f:U\to M$ פרמטריזציה. בסיס ל T_AM : $\left(\frac{\partial f}{\partial q_1}(0),\ldots,\frac{\partial f}{\partial q_n}(0)\right)$, $A=f(0)$. $\eta=(\eta_1,\ldots,\eta_n)$ ו $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_n)$.

$$B(\xi,\eta)=\sum_{i,j}b_{i,j}\xi_i\eta_j$$

כאשר:

$$b_{i,j}=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial q_i\partial q_j}(0),\nu_A\right)_{g_{\text{Euc}}}$$

משמעות אינטואיטיבית: טענה 17.3.1

סביב A, M שקול לגרף של פונקציה חלקה המוגדרת על T_AM.

הסבר: נרשום $\mathbb{R}^{n+1}=T_AM\oplus\mathbb{R}\nu_A$. במונחי הפירוק הזה, יש $\varphi:T_AM\to\mathbb{R}$ כך שיש פרמטריזציה שקולה ל M סביב A

$$T_AM\ni q\mapsto(q,\varphi(q))=q\oplus\varphi(q)\,\nu_A$$

הסבר: ע"י סביבוב, נניח כי: $T_AM=\mathbb{R}^n\times\{0\}\subset\mathbb{R}^{n+1}$ ו: $\nu_A=e_{n+1}=(0,\ldots,0,1)$.

תרגיל 17.3.2 : במקרה זה, יש פרמטריזציה שקולה ע"י:

$$(q_1,\ldots,q_n)\mapsto(q_1,\ldots,q_n,f(q_1,\ldots,q_n))$$

במונחי הפרמטריזציה הזו, ראינו בכיתה כי:

$$\varphi(q)=\varphi(0)+\frac{1}{2}\sum_{i,j}b_{i,j}q_iq_j+\ldots$$

כאשר $b_{i,j}$ הם מקדמים של B, התבנית היסודית הII.

17.4 העתקת Weingarten

$W:T_AM\to T_AM$ העתקה לינאקית כך ש $W^*=W$ ו:

$$g(W\xi,\eta)=B(\xi,\eta)$$

(כאשר G היא המטריקה המושרית על המשטח).

תרגיל 17.4.1 : נניח שביחס לפרמטריזציה מסויימת, g מיוצרת ע"י המטריצה $(g_{i,j})$, וB מיוצגת ע"י המטריצה $(b_{i,j})$. אז: W מיוצגת ע"י המטריצה:

$$W=(g_{i,j})^{-1}(b_{i,j})$$

הגדרה 17.4.2 עקמומיות גאוס:

$$K=\det W$$

עקמומיות ממוצעת:

$$H=\mathrm{tr}W$$

מסקנה 17.4.3

בסימוני התרגיל:

$$K=\frac{\det(b_{i,j})}{\det(g_{i,j})}$$

דוגמה 17.4.4 : גוף סיבוב: $\gamma(u)=(f(u),g(u))$. $a(u,v)=(f(u)\cos v,f(u)\sin v,g(u))$.
בכיתה ראינו כי:

$$W=\begin{pmatrix}\frac{f'g''-g'f''}{\left[(f')^2+(g')^2\right]^{3/2}} & 0\\ 0 & \frac{g'}{f\sqrt{(f')^2+(g')^2}}\end{pmatrix}$$

דוגמה 17.4.5 : Catenoid

$$\begin{cases} f(u) = \cosh(u) = \frac{1}{2}\left(e^{u} + e^{-u}\right) \\ g(u) = u \end{cases}$$

$$W = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\cosh^2(u)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cosh^2(u)} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} K &= -\frac{1}{\cosh^4(u)} \\ H &= 0 \end{aligned}$$

פרק 18

תרגול חמישי - 01.12.2014 - נגזרת קווריאנטית

18.1 שדות וקטוריים

הגדרה 18.1.1 שדה וקטורי: בהינתן $U \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה. **שדה וקטורי** על U הוא העתקה חלקה $U \ni q \mapsto X(q) \in T_qU$.

במונחי הבסיס הסטנדרטי, $(e_1, \ldots, e_n)$, ניתן לרשום:

$$X(q) = \sum X_i(q)\, e_i$$

כאשר $X_i(q)$ פונקציות חלקות ב U.
כלומר אפשר לחשוב על זה כפונקציה אשר לכל נקודה משייכת וקטור אשר יוצא ממנה.
את קבוצת כל השדות הוקטוריים על U נסמן ב $\mathrm{Vect}(U)$, וזהו מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$.
באופן דומה, עבור משטח $M \subset \mathbb{R}^N$ מגדירים: $\mathrm{Vect}(M)$.

18.1.1 נגזרת Lie של שדה וקטורי

הגדרה 18.1.2 בהינתן $X \in \mathrm{Vect}(U)$ ופונקציה $f \in C^\infty(U)$ אז: $L_xf \in C^\infty(U)$ מוגדרת ע"י:

$$L_xf(q) = D_qf(X(q))$$

דהיינו לכל נקודה, אנחנו נותנים את ערך הנגזרת הכיוונית בכיוון $X(q)$.
בקואורדינטות (ביחס לבסיס הסטדנרטי) אנחנו יכולים לרשום: $X(q) = \sum X_i(q)\, e_i$ ואז:

$$L_xf(q) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial q_i}(a)\, X_i(q)$$

הערה 18.1.3 בעצם נגזרת Lie היא נגזרת כיוונית.

תכונה חשובה של נגזרת Lie היא שהיא מקיימת את כלל לייבניץ:

$$L_x(f \cdot g) = (L_xf) \cdot g + f \cdot L_xg$$

18.2 נגזרת קווריאנטית (Connection)

הגדרה 18.2.1 בהינתן $U\subset\mathbb{R}^n$ פתוחה. אז לכל $q\in U$ נגדיר: $T_qU\to\underbrace{T_qU}_{x}\times\underbrace{\text{Vect}\left(U\right)}_{y}$ המוגדרת: $x,y\mapsto\nabla_x y$. והיא צריכה לקיים:

- בילנארי מעל $\mathbb{R}$.
- כלל לייבניץ (עבור $y\in\text{Vect}\left(U\right)$ ו $f\in C^{\infty}\left(U\right)$ צריך להתקיים:

$$\nabla_x\left(f\cdot y\right)=D_qf\left(x\right)y+f\left(q\right)\nabla_x y$$

גלובליזציה: אנחנו יכולים להגדיר: $\text{Vect}\left(U\right)\times\text{Vect}\left(U\right)\to\text{Vect}\left(U\right)$ כאשר: $x,y\mapsto\nabla_x y$ כלומר:

$$\left(\nabla_x y\right)\left(q\right)=\nabla_{x(q)}y$$

הגדרה זו עדיין תהיה:

- בילנארי מעל $\mathbb{R}$.
- כלל לייבניץ מתקיים ב y:

$$\nabla_x\left(f\cdot y\right)=\left(L_xf\right)y+f\left(q\right)\nabla_x y$$

- טנזוריאלי ב x. דהיינו אם $f\in C^{\infty}\left(U\right)$ ו $x\in\text{Vect}\left(U\right)$ אזי: $\nabla_{(fx)}y=f\nabla_x y$.

דוגמה 18.2.2 נגזרת קוואריאנטית אוקלידית על $\mathbb{R}^n$: נקח $x,y\in\text{Vect}\left(\mathbb{R}^n\right)$ אזי:

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_x y &= \left(L_xy_1,\ldots,L_xy_n\right)\\ y &= \left(y_1,\ldots,y_n\right)\end{aligned}$$

באופן דומה, מגדירים ∇ על משטח $M\subset\mathbb{R}^N$.

דוגמה 18.2.3 : נניח $M^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$ על־משטח. נסמן לכל $q\in U$ ב: $\pi_q:T_q\mathbb{R}^{n+1}\to T_qM$ ההטלה האורתוגונלית (האוקלידית): ונגדיר:

$$x,y\in\text{Vect}\left(M\right)\qquad\nabla_x y=\pi_q\left(\tilde{\nabla}_x y\right)$$

יש כאן טענה שזו אכן נגזרת קוואריאנטית, לא נעשה את זה בתרגול.
אבל בכיתה ראינו נוסחה האומרת כי:

$$\boxed{\nabla_x y=\tilde{\nabla}_x y-B\left(x,y\right)\cdot\nu}$$

כלומר:

$$B\left(x,y\right)=\left(\tilde{\nabla}_x y,\nu\right)$$

18.2.1 סימני כריסטופל

∇ נגזרת קוווריאנטית על $U \in \mathbb{R}^n$. סימני כריסטופל הינם $\Gamma_{i,,j}^k \in C^\infty(U)$ עבור $1 \leq i, j, k \leq n$ מוגדרים ע"י:

$$\nabla_{e_i} e_j = \sum_k \Gamma_{i,j}^k e_k$$

טענה 18.2.4

$$\nabla_x y = \sum_k \left[\sum_i x_i \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + \sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k x_i y_j \right] e_k$$

כלומר, סימני הכריסטופל קובעים באופן מפורש את הנגזרת הקוווריאנטית.

18.2.2 נגזרת קוווריאנטית לאורך מסילה

הגדרה 18.2.5 שדה וקטורי לאורך γ: נניח כי γ מסילה חלקה ב U, שדה וקטורי לאורך γ הוא התאמה חלקה $t \mapsto y(t) \in T_{\gamma(t)}U$.

דוגמה 18.2.6 : אם יש לנו מסילה γ אנחנו יכולים להגדיר $X(t) = \dot{\gamma}(t)$ שדה וקטורי לאורך γ.

טענה 18.2.7

אם γ מסילה ו $x(t) = \dot{\gamma}(t)$, y שדה וקטורי לאורך γ אז: $\nabla_x y$ מוגדר היטב.

ליתר דיוק, נבחר $\tilde{y} \in \mathrm{Vect}(U)$ כך ש $\tilde{y} \mid_\gamma = y$. אז הטענה היא למעשה כי $\nabla_x \tilde{y}$ אינו תלוי בבחירת $\tilde{y}$. ומסמנים זאת: $\nabla_x y = D_t y$.
ההוכחה היא ע"י מציאת נוסחה:

$$D_t y = \sum_k \left[\dot{y}_k + \sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k x_i y_j \right] e_k$$

ובבירור הנוסחה תלויה רק ב y ולא ב $\tilde{y}$.

הערה 18.2.8 $\dot{y}_k = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} y_k(t)$.

דוגמה 18.2.9 : $U=\{(x,y)\mid y>0\}$. ∇ על U מוגדרת ע"י $\Gamma_{i,j}^{k}$.

$$\Gamma_{1,2}^{1}=\Gamma_{2,1}^{1}=\Gamma_{2,2}^{2}=-\frac{1}{y},\qquad\Gamma_{1,1}^{2}=\frac{1}{y}$$

וכל שאר סימני כריסטופל מתאפסים.
נתונה מסילה $\gamma\left(t\right)=\left(t,1\right)$ ו y שדה וקטורי ו $y\left(t\right)\in T_{\gamma(t)}U$ המוגדרת באופן הבא: $y\left(t\right)=\left(\sin t,\cos t\right)$.

תרגיל 18.2.10 : לחשב את $D_{t}y$.

פתרון: $x\left(t\right)=\dot{\gamma}\left(t\right)=\left(1,0\right)=e_{1}$. לפי הנוסחה אנחנו מקבלים:

$$\begin{aligned}
D_{t}y & = \sum_{k}\left[\dot{y}_{k}+\sum_{i,j}\Gamma_{i,j}^{k}\cancelto{\delta_{i,1}}{x_{i}}y_{j}\right]e_{k}\\
 & = \sum_{k}\left[\dot{y}_{k}+\sum_{j}\Gamma_{1,j}^{k}y_{j}\right]e_{k}\\
 & = \underbrace{\overbrace{\left(\overbrace{\dot{y}_{1}}^{\cos t}+\cancelto{0}{\Gamma_{1,1}^{1}}y_{1}+\overbrace{\Gamma_{1,2}^{1}}^{-\frac{1}{1}}\overbrace{y_{2}}^{\cos t}\right)}^{=0}}_{k=1}+\underbrace{\overbrace{\left(\overbrace{\dot{y}_{2}}^{\sin t}+\overbrace{\Gamma_{1,1}^{2}}^{-\frac{1}{1}}\overbrace{y_{1}}^{\sin t}+\cancelto{0}{\Gamma_{1,2}^{2}}y_{2}\right)}^{=0}}_{k=2}\\
 & = 0
\end{aligned}$$

פרק 19

תרגול שישי - 08.12.2014 - נגזרת קוווריאנטית על משטחים והזזה במקביל

19.1 נגזרת קוווריאנטית על משטחים

הערה 19.1.1 המילה על כאן היא מילת יחס, אין כוונה ל "על-משטח".

ברגע שיש לנו משטח $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ יש לנו משטח קוווריאנטית "סטנדרטית" על M, ∇, המוגדרת ע"י:

$$\nabla_x y = \pi\left(\tilde{\nabla}_x y\right)$$

כאשר $\tilde{\nabla}$ היא הנגזרת הקוווריאנטית האוקלידית ב $\mathbb{R}^3$ ו π היא ההטלה האורתוגונלית על $T_A M \subset T_A \mathbb{R}^3$.
בהרצאה ראינו כי אם בפרמטריזציה מסויימת של M המטריקה המושרית היא:

$$\mathrm{d}s^2 = g_{1,1}\mathrm{d}q_1^2 + g_{2,2}\mathrm{d}q_2^2$$

(כלומר $g_{1,2} \equiv 0$) אז מקדמי כריסטופל של ∇ בפרמטריזציה הנ"ל מחושבים ע"י:

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{1,1} &= \frac{1}{2}\frac{\partial g_{1,1}}{\partial q_1}g^{-1}_{1,1} \\
\Gamma^1_{1,2} = \Gamma^1_{2,1} &= \frac{1}{2}\frac{\partial g_{2,2}}{\partial q_1}g^{-1}_{2,2} \\
\Gamma^1_{2,2} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{2,2}}{\partial q_1}g^{-1}_{1,1} \\
\Gamma^2_{2,2} &= \frac{1}{2}\frac{\partial g_{2,2}}{\partial q_2}g^{-1}_{2,2} \\
\Gamma^2_{1,2} = \Gamma^2_{2,1} &= \frac{1}{2}\frac{\partial g_{2,2}}{\partial q_1}g^{-1}_{2,2} \\
\Gamma^2_{1,1} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial g_{1,1}}{\partial q_2}g^{-1}_{2,2}
\end{aligned}$$

דוגמה 19.1.2 : משטח סיבוב:

$$a(u,v)=(f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$$

$$\mathrm{d}s^2=\left[f'^2+g'^2\right]\mathrm{d}u^2+\underbrace{f^2}_{g_{2,2}}\mathrm{d}v^2$$

נחשב את: $\Gamma_{i,j}^{k}$. נבחין כי $\frac{\partial}{\partial v}g_{i,i}\equiv 0$ ולכן:

$$\Gamma_{2,2}^{2}=\Gamma_{1,1}^{2}=\Gamma_{1,2}^{1}=\Gamma_{2,1}^{1}=0$$

נחשב את האחרים:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1,1}^{2} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(f'^2+g'^2\right)\frac{1}{f'^2+g'^2}=\frac{f'f''+g'g''}{f'^2+g'^2}\\
\Gamma_{1,2}^{2}=\Gamma_{2,1}^{2} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(f^2\right)\frac{1}{f^2}=\frac{f'}{f}\\
\Gamma_{2,2}^{1} &= -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(f^2\right)\frac{1}{f'^2+g'^2}=-\frac{ff'}{f'^2+g'^2}
\end{aligned}$$

דוגמה 19.1.3 : (תת דוגמה)
משטח Beltrami: $g'(u)=-\frac{\sqrt{1-u^2}}{u}$, $(u,g(u))$

בתרגיל: בקואורדינטות חדשות למשטח: $x=v$, $y=\frac{1}{u}$ (שבהן $\mathrm{d}s^2=\frac{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}{y^2}$).
בקואורדינטות (y,x), הפרמטריזציה של משטח Beltrami:

$$(y,x)\mapsto\left(\frac{1}{y}\cos x,\frac{1}{y}\sin x,g\left(\frac{1}{y}\right)\right)$$

נגדיר $F(y)=\frac{1}{y}$ ו $G(y)=g\left(\frac{1}{y}\right)$ ונקבל:

$$=(F(y)\cos x,F(y)\sin(x),G(y))$$

כלומר, קיבלנו פרמטריזציה של משטח סיבוב. לכן נוכל לחשב לפי הדוגמה הקודמת ונקבל:

$$\begin{aligned}
F'(y) &= -\frac{1}{y^2}\\
G'(y) &= g'\left(\frac{1}{y}\right)\left(-\frac{1}{y^2}\right)=\frac{1}{y^2}\cdot\frac{\sqrt{1-\frac{1}{y^2}}}{\frac{1}{y}}=\frac{\sqrt{y^2-1}}{y^2}\\
F'^2+G'^2 &= -\frac{1}{y^4}+\frac{y^2-1}{y^4}=\frac{1}{y^2}\\
F'F''+G'G'' &= \frac{1}{2}\left(F'^2+G'^2\right)'=-\frac{1}{y^3}
\end{aligned}$$

ולכן:

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{1,1} &= \frac{-1/y^3}{1/y^2}=-\frac{1}{y}\\
\Gamma^2_{1,2}=\Gamma^2_{2,1} &= \frac{-1/y^2}{1/y}=-\frac{1}{y}\\
\Gamma^1_{2,2} &= -\frac{\frac{1}{y}\left(-\frac{1}{y^2}\right)}{1/y^2}=\frac{1}{y}
\end{aligned}$$

הערה 19.1.4 אלה סימני כריסטופל בקואורדינטות (y,x), מסיבות פסיכולוגיות נעבוד להבא עם הקואורדינטות (x,y) ואז סימני כריסטופל הינם:

$$\begin{aligned}
\Gamma^2_{2,2} &= \Gamma^1_{1,2}=\Gamma^1_{2,1}=-\frac{1}{y}\\
\Gamma^2_{1,1} &= \frac{1}{y}
\end{aligned}$$

ואחרת:

$$\Gamma^k_{i,j}=0$$

נבחין כי האינדקסים של Γ משתנים כאן!

19.2 הזזה במקביל

הגדרה 19.2.1 תהי ∇ נגזרת קוואריאנטית על תחום U, γ מסילה ב U ו y שדה וקטורי לאורך γ ($y(t)\in T_{\gamma(t)}U$).
y נקרא מקביל לאורך γ אם: $D_t y\equiv 0$.

תזכורת 19.2.2 אם $\dot{\gamma}(t)=x$ אז:

$$D_t y=\nabla_x y=\sum_k\left[\dot{y}_k(t)+\sum_{i,j}\Gamma_{i,j}^k(\gamma(t))\,x_i(t)\,y_j(t)\right]e_k$$

הדרישה של להיות מקביל בעצם אומרת כי $\dot{y}_k(t)+\sum_{i,j}\Gamma_{i,j}^k(\gamma(t))\,x_i(t)\,y_j(t)=0$ לכל k. וממשפט קיום ויחידות למד"ר אנו מקבלים כי לכל $y(0)\in T_{\gamma(0)}U$ קיים פתרון ביחידות $\gamma(t)\in T_{\gamma(t)}U$ לכל t. באופן זה ניתן להגדיר **העתקת הזזה במקביל** $P_{t_0}^{t_1}:T_{\gamma(t_0)}U\to T_{\gamma(t_1)}U$ כאשר שולחת את $y(t_0)\mapsto y(t_1)$.

תכונות:

1. $P_{t_0}^{t_1}$ איזומורפיזם לינארי.
2. $P_{t_1}^{t_2}\circ P_{t_0}^{t_1}=P_{t_0}^{t_2}$ עבור $t_0<t_1<t_2$.
3. $P_{t_0}^{t_0}=\mathbb{1}$.

תרגיל 19.2.3 : חשבו הזזה במקביל לאורך קו גובה במשטח Beltrami (כלומר $z=\text{const}$).

פתרון: (x,y) שעבדנו איתן קודם. קו הגובה מתואר ע"י הישר: $\{y=R\}$ כלומר: $\gamma(t)=(t,R)$.
נחשב את P_0^t, ניקח $v=(v_1,v_2)\in T_{(0,R)}U$ ונחשב תוצאה של הזזה במקביל שלו: $v(t)=(v_1(t),v_2(t))$. נסמן $x(t)=\dot\gamma(t)=(1,0)$.
נרשום את המשוואות: $D_tv\equiv0$:

$$\dot v_k(t)+\sum_{i,j}\Gamma_{i,j}^k(\gamma(t))\,v_i(t)\,x_j(t)=0$$

עבור $k=1,2$ אבל $x_1\equiv1$ ו $x_2\equiv0$ ולכן נקבל את המשוואות:

$$\dot v_k+\sum_i\Gamma_{i,1}^kv_i=0$$

נעזרת ב $\Gamma_{i,j}^k$ אשר חישבנו מקודם ונקבל כי:

$$\begin{aligned}
k=1 \qquad & \dot v_1+\underbrace{\Gamma_{1,1}^1}_{=0}v_1+\underbrace{\Gamma_{2,1}^1}_{-1/R}v_2=0\\
& \dot v_1-\frac1Rv_2=0\\
k=2 \qquad & \dot v_2+\frac1Rv_1=0
\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו את מערכת המשוואות:

$$\begin{cases}\dot v_1=\frac1Rv_2\\ \dot v_2=-\frac1Rv_1\end{cases}$$

למעשה מדובר במשוואות מצומדות. נגזור שוב את הראשונה ונקבל:

$$\ddot v_1=\frac1R\dot v_2=-\frac1{R^2}v_1$$

וזו משוואה שקל לנו לפתור $v_1\in\operatorname{span}\left\{\cos\left(\frac1Rt\right),\sin\left(\frac1Rt\right)\right\}$. נקבל דבר דומה על v_2. אם נציב את התנאי ההתחלה נקבל כי:

$$v(t)=\left(v_1\cos\left(\frac tR\right)+v_2\sin\left(\frac tR\right),v_2\sin\left(\frac tR\right)-v_1\sin\left(\frac tR\right)\right)$$

כלומר, במונחי הביסי e_1,e_2 נקבל כי:

$$P_0^t=\begin{pmatrix}\cos\left(\frac tR\right)&\sin\left(\frac tR\right)\\-\sin\left(\frac tR\right)&\cos\left(\frac tR\right)\end{pmatrix}$$

תרגיל 19.2.4 : ∇ היא נגזרת קוואריאנטית על תחום $U\subset\mathbb{R}^2$ ו־γ היא מסילה סגורה ב u ו־($\gamma(0)=\gamma(T)=A$). נסמן:

$$P_\gamma=P_0^T:T_AU\to T_AU$$

הוכיחו כי P_γ שומרת אוריינטציה, כלומר $\det P_\gamma>0$.

פתרון: יהי $e_1,e_2\in T_AU$ הבסיס הסטנדרטי. אז עלינו להראות כי: $P_\gamma e_1,P_\gamma e_2$ בסיס חיובי ל T_AU. נסמן: $E_i(t)=P_0^te_i\in T_{\gamma(t)}U$ עבור $i=1,2$.
נתבונן בפונקציה:

$$\alpha(t)=\det\left(E_1(t)\mid E_2(t)\right),\quad t\in[0,T]$$

נבחין כי $\alpha(t)$ היא פונקציה רציפה והיא לא מתאפסת, $\alpha(t)\neq0$, מכיוון ש P_0^t לכל t הוא איזומורפיזם לינארי ולכן הוקטורים המרכיבים אותה בהכרח בלתי תלויים.
לכן α שומרת על סימן, ומכיוון ש $\alpha=\det(e_1,e_2)>0$ נקבל כי: $\alpha(T)=\det\left(E_1(T)\mid E_2(t)\right)>0$. כלומר:

$$\begin{aligned}E_1(T)&=P_\gamma e_1\\E_2(T)&=P_\gamma e_2\end{aligned}$$

בסיס חיובי כנדרש.

פרק 20

תרגול שביעי - 15.12.2014 - משפט Levi-Civita וקומוטטור של שדות וקטוריים

20.1 נגזרות Levi-Civita

משפט 20.1.1

תהי $U\subset\mathbb{R}^n$ תחום עם מטריקה רימנית g אז קיימת נגזרת קווריאנטית יחידה ∇ על g המקיימת:

1. $\forall X,Y,Z\in\text{Vect}\left(U\right)$ מתקיים:

$$L_X\left(Y,Z\right)_g=\left(\nabla_XY,Z\right)_g+\left(Y,\nabla_XZ\right)_g$$

2. $\nabla_XY-\nabla_YX=\left[X,Y\right]$ (∇ - סימטרית, *torsion-free*)

∇ כנ"ל נקראת נגזרת Levi-Civita.

הערה 20.1.2

1. $\Longleftrightarrow$ העקתות הזזה במקביל שומרות על g.
2. $\Longleftrightarrow$ $\Gamma_{i,j}^k=\Gamma_{j,i}^k$.

20.1.1 דוגמאות לנגזרות Levi-Civita

דוגמה 20.1.3 : $\left(\mathbb{R}^n,g_{\text{Euc}}\right)$ אז: $\tilde{\nabla}$ היא נגזרת Levi-Civita.

דוגמה 20.1.4 : $M^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$ עם מטריקה מושרית, אז ∇_{LC} היא הנגזרת הקווריאנטית המושרית: $\nabla_XY=\pi\left(\tilde{\nabla}_XY\right)$.

20.1.2 נוסחה ל $\Gamma_{i,j}^k$ של ∇_{LC} במונחי g

אנו מסמנים: $\left(g^{k,l}\right)=\left(g_{k,l}\right)^{-1}$ (כלומר הקואורדינטה ה k,l של המטריצה ההופכית ל g).
קיבלנו בכיתה כי:

$$\Gamma_{i,j}^k=\frac{1}{2}\sum_l g^{k,l}\left[\frac{\partial g_{j,l}}{\partial q_i}+\frac{\partial g_{i,l}}{\partial q_j}-\frac{\partial g_{i,j}}{\partial q_l}\right]$$

מסקנה 20.1.5

הנגזרת הקווריאנטית המושרית על $M^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$ תלויה רק במטריקה המושרית!

✎ **תרגיל 20.1.6 :** חשבו את $\Gamma_{i,j}^{k}$ של ∇_{LC} עבור מטריקה קונפורמית על $U\subset\mathbb{R}^2$:

$$\mathrm{d}s^2=A\left(x,y\right)\left[\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2\right]$$

פתרון: כאן: $g_{k,l}=A\delta_{k,l}$, ולכן: $g^{k,l}=\frac{1}{A}\delta^{k,l}$. לפי הנוסחה:

$$\begin{aligned}\Gamma_{i,j}^{k} &= \frac{1}{2}\sum_{l}\frac{1}{A}\delta_{k,l}\left[\frac{\partial g_{j,l}}{\partial q_i}+\frac{\partial g_{i,l}}{\partial q_j}-\frac{\partial g_{i,j}}{\partial q_l}\right]\\ &= \frac{1}{2A}\left[\frac{\partial g_{j,k}}{\partial q_i}+\frac{\partial g_{i,k}}{\partial q_j}-\frac{\partial g_{i,j}}{\partial q_k}\right]\\ &= \frac{1}{2A}\left[\delta_{j,k}\frac{\partial A}{\partial q_i}+\delta_{i,k}\frac{\partial A}{\partial q_j}-\delta_{i,j}\frac{\partial A}{\partial q_k}\right]\end{aligned}$$

ולכן נקבל כי:

•

$$\Gamma_{k,k}^{k}=\frac{1}{2A}\left[\frac{\partial A}{\partial q_k}+\frac{\partial A}{\partial q_k}-\frac{\partial A}{\partial q_k}\right]=\frac{1}{2A}\frac{\partial A}{\partial q_k}$$

• עבור $i\neq k$:

$$\Gamma_{i,i}^{k}=\frac{1}{2A}\left[0+0-\frac{\partial A}{\partial q_k}\right]=-\frac{1}{2A}\frac{\partial A}{\partial q_k}$$

• עבור $i\neq k$:

$$\Gamma_{k,i}^{k}\Gamma_{i,k}^{k}=\frac{1}{2A}\left(\frac{\partial A}{\partial q_i}+0-0\right)=\frac{1}{2A}\frac{\partial A}{\partial q_i}$$

לכן קיבלנו:

$$\begin{cases}\Gamma_{1,1}^{1}=\frac{1}{2A}\frac{\partial A}{\partial x}\\ \Gamma_{1,2}^{1}=\Gamma_{2,1}^{1}=\frac{1}{2A}\frac{\partial A}{\partial y}\\ \Gamma_{2,2}^{1}=-\frac{1}{2A}\frac{\partial A}{\partial x}\\ \Gamma_{2,2}^{2}=\frac{1}{2A}\frac{\partial A}{\partial y}\\ \Gamma_{1,2}^{2}=\Gamma_{2,1}^{2}=\frac{1}{2A}\frac{\partial A}{\partial x}\\ \Gamma_{1,1}^{2}=-\frac{1}{2A}\frac{\partial A}{\partial y}\end{cases}$$

הערה 20.1.7 ניתן לפשט בעזרת:

$$\frac{1}{2A}\frac{\partial A}{\partial x}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\log A$$

דוגמה 20.1.8 : חצי המישור ההיפרבולי (משטח Beltrami):

$$U = \{(x,y) \mid y > 0\} \subset \mathbb{R}^2$$

והמטריקה:

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}{y^2}$$

כאן: $A(x,y) = \frac{1}{y^2}$.

תרגיל 20.1.9 : חשבו את $\Gamma_{i,j}^k$, והשוו לתוצאה הקודמת.

20.2 קומוטטור של שדות וקטוריים

אם $X \in \mathrm{Vect}(U)$, כזכור הגדרנו את האופרטור של הגזרת לי: $L_X : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$ אשר:

$$L_X f(q) = D_q f(X(q)) = \sum \frac{\partial f}{\partial q_i} X_i$$

הגדרה 20.2.1 הקומוטטור של $X, Y \in \mathrm{Vect}(U)$ הוא שדה וקטורי חדש המסומן $[X,Y] \in \mathrm{Vect}(U)$ המוגדר באופן הבא:

$$L_{[X,Y]} = L_X L_Y - L_Y L_X$$

בקואורדינטות: נסמן: $Z = [X,Y]$. נקבל כי:

$$Z_j = \sum_k \left[X_k \frac{\partial Y_j}{\partial q_k} - Y_k \frac{\partial X_j}{\partial q_k} \right]$$

20.2.1 משמעות גיאומטרית של הקומוטטור

שדות וקטוריים מ 3 נקודות מבט:

- **גאומטרית:** ניתן לצייר את $X(q) \in T_q U$ כוקטורים היוצאים מנקודה.
- **אלגברית:** $L_X : C^\infty(U) \to C^\infty(U)$. כל אופרטור שמקיים את תכונת לייבניץ הוא נגזרת Lie של שדה וקטורי כלשהו.
- **דינמית:** "זרימה" (flow): $\varphi_t : U \to U$ דיפאומורפיזם אשר שולח $x \mapsto x(t)$ כאשר $x(t)$ הוא פתרון של $\dot{x}(t) = X(x(t))$ ו $x(0) = x$.

הערה 20.2.2 קיימים בגלל משפט קיום ויחידות ממד"ר.

כלומר: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_t(x) = X(\varphi_t(x))$.

תרגיל 20.2.3 :

1. להעתקות φ_t יש תכונת חבורה: $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$.
2. $L_X f(q) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0} f(\psi_t(q))$.

כעת אנחנו יכולים לתת טענה שתסביר מה הפרשנות שלנו לקומוטטור:

טענה 20.2.4

$X,Y\in \text{Vect}\left(U\right)$, $f\in C^{\infty}\left(U\right)$. נניח ש X יוצר זרימה φ_t ו Y יוצר זרימה ψ_s, אז:

$$\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\mid_{s=t=0}\left[f\left(\varphi_t\psi_s q\right)-f\left(\psi_s\varphi_t q\right)\right]=-L_{[X,Y]}f\left(q\right)$$

הוכחה: לפי תרגיל (2):

$$\frac{\partial}{\partial t}\mid_{t=0}f\left(\varphi_t\psi_s q\right)=L_X f\left(\psi_s q\right)$$

ושוב לפי התרגיל:

$$\frac{\partial}{\partial s}\mid_{s=0}L_X f\left(\psi_s q\right)=L_Y L_X f\left(q\right)$$

באופן סימטרי, מחשבים לאיבר השני ומקבלים כי:

$$\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\mid_{s=t=0}\left[f\left(\varphi_t\psi_s q\right)-f\left(\psi_s\varphi_t q\right)\right]=L_Y L_x f\left(q\right)-L_X L_Y f\left(q\right)=-L_{[X,Y]}f\left(q\right)$$

■

נבחין כי $\varphi_0=\mathbb{1}_U$ וגם $\psi_0=\mathbb{1}_U$.
לכן, ע"י פיתוח טיילור:

$$\frac{f\left(\varphi_t\psi_s q\right)-f\left(\psi_s\varphi_t q\right)}{st}\underset{s,t\to 0}{\longrightarrow}-L_{[X,Y]}f\left(q\right)$$

היות והאיבר היחידי מסדר שני שלא מתאפס הוא האיבר המשולב s,t (כי אם היה מתאפס, היינו מקבלים ש $f\left(\varphi_0\psi_s q\right)-f\left(\psi_s\varphi_0 q\right)\neq 0$ אבל φ_0 היא זהות, ולכן ברור שזה מתאפס.

בפרט, ניקח: $f=q_k$ פונקציית הקואורדינטה עבור $1\leq k\leq n$ ונקבל:

$$\frac{\left(\varphi_t\psi_s q\right)_k-\left(\psi_s\varphi_t q\right)_k}{st}\underset{s,t\to 0}{\longrightarrow}-L_{[X,Y]}q_k=-D_q q_k\left(\left[X,Y\right]\right)=-\left(\left[X,Y\right]\left(q\right)\right)_k$$

בקיצור:

$$\frac{\varphi_t\psi_s q-\psi_s\varphi_t q}{st}\underset{s,t\to 0}{\longrightarrow}-\left[X,Y\right]\left(q\right)$$

תרגיל 20.2.5 :

.1

$$\frac{\varphi_t\psi_s\varphi_t^{-1}\psi_s^{-1}q-q}{st}\underset{s,t\to 0}{\longrightarrow}-\left[X,Y\right]\left(q\right)$$

.2

$$\forall t,s\ \varphi_t\psi_s=\psi_s\eta_t\iff\left[X,Y\right]\equiv 0$$

פרק 21

תרגול שמיני - 22.12.2014 - אופרטור העקמומיות

21.1 הגדרה

$U\subset\mathbb{R}^n$ הוא תחום עם נגזרת קווריאנטית ∇ עבור.

הגדרה 21.1.1 עבור $X,Y\in\text{Vect}\left(U\right)$ אנו מגדירים את אופרטור העקמומיות באופן הבא:

$$\begin{aligned}R\left(X,Y\right):\text{Vect}\left(U\right) & \rightarrow \text{Vect}\left(U\right)\\ R\left(X,Y\right)Z & = \nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z\end{aligned}$$

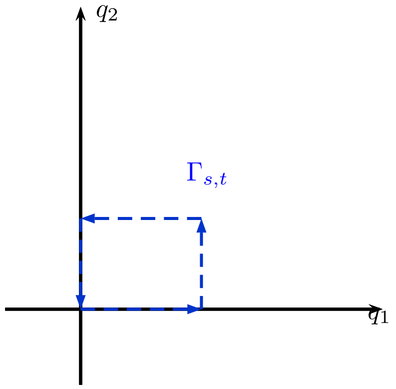
21.2 תכונות

1. $R\left(X,Y\right)Z$ הוא אופרטור לינארי ב X,Y,Z.
2. האופרטור הוא גם לינארי ב $C^{\infty}\left(U\right)$, דהיינו הערך של $R\left(X,Y\right)Z$ בנקודה $q\in U$ תלוי רק ב $X\left(q\right),Y\left(q\right),Z\left(q\right)$ (טנזוריאליות).
3. $R\left(Y,X\right)=-R\left(X,Y\right)$.
4. אם ∇ נגזרת LC של מטריקה g על U אז: $R\left(X,T\right):T_qU\rightarrow T_qU$ הינה טרנספורמציה כלומר: $R\left(X,Y\right)^{*}=-R\left(X,Y\right)$ (למעשה מספיק רק שהיא תשמור על המטריקה, אנחנו לא צריכים את הסימטריות של LC).

משפט 21.2.1

נניח כי $q=0$ ונסמן: $D_{s,t}=\{0\le q_1\le qs,0\le q_2\le t\}$ ו $\Gamma_{s,t}=\partial D_{s,t}$.
נסמן $P_{s,t}$ הזזה במקביל לאורך $\Gamma_{s,t}$ עם אוריינטציה כמתואר בציור. אז:

$$\forall v\in T_0U\qquad \lim_{s,t\rightarrow0}\frac{P_{s,t}\left(v\right)-v}{st}=-R\left(e_1,e_2\right)v$$



את ההוכחה של המשפט ראינו בשיעורים.

21.3 דוגמה

$U = \{(x,y) \mid y>0\}$, $\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2}{y^2}$.

חשבו $R(\cdot,\cdot)$ עבור ∇_{LC}.

פתרון:

$$\begin{cases}\Gamma_{1,2}^1=\Gamma_{2,1}^1=\Gamma_{2,2}^2=-\frac{1}{y}\\ \Gamma_{1,1}^2=\frac{1}{y}\\ \Gamma_{i,j}^k=0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

נעזר בטנזוריאליות. אם $x=(x_1,x_2)$ ו $y=(y_1,y_2)$ אז:

$$R(x,y)=\sum_{i,j}x_iy_jR(e_i,e_j)$$

ומתקיים:

$$R(e_i,e_i)=0$$

מאנטי-סימטריות:

$$R(e_2,e_1)=-R(e_1,e_2)$$

ולכן, מספיק לדעת את $R(e_1,e_2)$. לשם כך נערוך שני חישובים כללים:

חישוב 1: נבצע הזזה במקביל לאורך γ אשר הולכת "ימינה" כלומר: $\gamma(\tau)=(u+\tau,v)$ כאשר $\tau\in[0,t]$. במצב זה אנו מקבלים כי $\dot\gamma=(1,0)$. משוואות ההזזה במקביל במקרה זה נראות:

$$\dot Z_k+\sum_{i,j}\Gamma_{i,j}^kZ_i\dot\gamma_j=0\quad k=1,2$$

היות ו$\dot\gamma\equiv(1,0)$ אנחנו נקבל כי:

$$\dot Z_k+\Gamma_{1,1}^kZ_1+\Gamma_{1,2}^kZ_2=0$$

ונקבל:

$$\begin{cases}\dot Z_1-\frac{1}{v}Z_2=0\\ \dot Z_2+\frac{1}{v}Z_1=0\end{cases}\Rightarrow \ddot Z_k=-\frac{1}{v^2}Z_k$$

אם נציב $Z(0)=(a,b)$ נקבל את הפתרון (כפי שראינו בתרגול קודם):

$$Z(\tau)=\left(a\cos\left(\frac{\tau}{v}\right)+b\sin\left(\frac{\tau}{v}\right),b\cos\left(\frac{\tau}{v}\right)-a\sin\left(\frac{\tau}{v}\right)\right)$$

כלומר אנו מקבלים כי:

$$P_0^t \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \frac{t}{v} & \sin \frac{t}{v} \\ -\sin \frac{t}{v} & \cos \frac{t}{v} \end{pmatrix}}_{R\left(\frac{t}{v}\right)} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

כלומר, קיבלנו כי מדובר בסיבוב בזווית $\frac{t}{v}$, דהיינו:

$$P_0^t = R\left(\frac{t}{v}\right)$$

חישוב 2: הזזה במקביל לאורך ציר הy, כלומר $\gamma(\tau) = (u, v+\tau)$ עבור $\tau \in [0, s]$. במקרה זה $\dot{\gamma} = (0,1)$ ושוב נקח $Z(0) = (a,b)$. כאן ממשוואות העברה במקביל נקבל כי:

$$\dot{Z}_k + \Gamma_{2,1}^k Z_1 + \Gamma_{2,2}^k Z_2 = 0$$

נציב את סימני Christoffel השונים ונקבל מערכת משוואות:

$$\dot{Z}_k - \frac{Z_k}{v+\tau} = 0 \qquad k = 1,2$$

אנחנו מקבלים כי:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}(Z_k) = \dot{Z}_k = \frac{Z_k}{v+\tau}$$

מהפרדת משתנים אנו מקבלים:

$$\int \frac{\mathrm{d}Z_k}{Z_k} = \int \frac{\mathrm{d}\tau}{v+\tau}$$

ואנחנו מקבלים כי:

$$\log Z_k = \log(v+\tau) + B \Rightarrow Z_k = C(v+\tau)$$

לכן:

$$Z_k(\tau) = Z_k(0)\frac{v+\tau}{v}$$

ולכן:

$$P_0^s = \frac{v+s}{v}\mathbb{1}$$

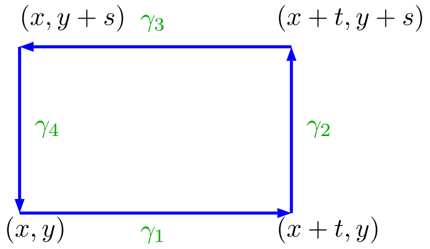
כלומר מדובר במטריקה סקלרית אשר מכפילה את הוקטור ב $\frac{v+s}{v}$.

סיכום ביניים:

1. עבור $\gamma(\tau) = (u+\tau, v)$ קיבלנו כי $P = R\left(\frac{t}{v}\right)$.
2. עבור $\gamma(\tau) = (u, v+\tau)$ קיבלנו כי: $P = \frac{v+s}{v}\mathbb{1}$.

כעת אם נתבונן במסילה:

$\Gamma_{s,t} =$



נקבל כי:

$$P_{s,t} = P_{\gamma_4} P_{\gamma_3} P_{\gamma_2} P_{\gamma_1}$$

ולכן:

$$\begin{aligned}
P_{\gamma_1} &= R\left(\frac{t}{y}\right) \\
P_{\gamma_2} &= \frac{y+s}{y}\mathbb{1} \\
P_{\gamma_3} &= R\left(\frac{t}{y+s}\right)^{-1} = R\left(-\frac{t}{y+s}\right) \\
P_{\gamma_4} &= \left(\frac{y+s}{y}\mathbb{1}\right)^{-1} = \frac{y}{y+s}\mathbb{1}
\end{aligned}$$

לכן:

$$\begin{aligned}
P_{s,t} &= \left(\frac{y}{y+s}\mathbb{1}\right) R\left(-\frac{y}{s+y}\right) \left(\frac{y+s}{y}\mathbb{1}\right) R\left(\frac{t}{y}\right) \\
&= R\left(-\frac{t}{s+y}\right) R\left(\frac{y}{y}\right) \\
&= R\left(\frac{st}{y(s+y)}\right)
\end{aligned}$$

מעבר אחרון מכיוון ש $R(\alpha)R(\beta) = R(\alpha+\beta)$.

אנו מחפשים את: $\lim_{s,t\to 0} \frac{P_{s,t}-\mathbb{1}}{st}$ נחשב ונקבל:

$$\frac{P_{s,t}-\mathbb{1}}{st} = \begin{pmatrix} \frac{\cos\left[\frac{st}{y(s+y)}\right]-1}{st} & \frac{\sin\left[\frac{st}{y(s+y)}\right]}{st} \\ -\frac{\sin\left[\frac{st}{y(s+y)}\right]}{st} & \frac{\cos\left[\frac{st}{y(s+y)}\right]-1}{st} \end{pmatrix}$$

נחשב:

$$\begin{aligned}
\frac{\cos\left[\frac{st}{y(s+y)}\right]-1}{st} &= \frac{1-\frac{1}{2}\left[\frac{st}{y(s+y)}\right]^2+\ldots-1}{st} \\
&= \frac{1}{2}\frac{st}{[t(s+y)]^2}+\ldots \underset{s,t\to 0}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

ואילו:

$$\frac{\sin\left[\frac{st}{y(s+y)}\right]}{st} = \frac{\left[\frac{st}{y(s+y)}\right]+\ldots}{st} = \frac{1}{y(s+y)}+\ldots \underset{s,t\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{y^2}$$

סה"כ קיבלנו כי:

$$\begin{aligned} R(e_1,e_2) &= -\lim_{s,t\to 0}\frac{P_{s,t}-\mathbb{1}}{st} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{y^2} \\ \frac{1}{y^2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{y^2}J \end{aligned}$$

כאשר $J=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

הערה 21.3.1 נשים לב שקיבלנו מטריצה אנטיסימטרית, זה לא מפתיע מכיוון שאנחנו יודעים ש $R(e_1,e_2)$ הוא אופרטור אנטיסימטרי, לכן מובטח לנו שהמטריצה שלו תהיה אנטיסימטרית אם e_1,e_2 בסיס אורתונורמלי (אבל הוא לא, הוא רק אורתוגונלי!) אבל בכל מקרה זה עובד כאן.

בכל מקרה, במקרה הזה יכולנו לנחש בלי לחשב כי הגבול $0 \underset{s,t\to 0}{\longrightarrow} \frac{\cos\left[\frac{st}{y(s+y)}\right]-1}{st}$.

וכעת, עבור $x=x_1,x_2$, $y=(y_1,y_2)$ כלליים נקבל:

$$\begin{aligned} R(X,Y) &= \sum_{i,j} X_iY_jR(e_1,e_2) \\ &= (X_1Y_2-Y_1X_2)R(e_1,e_2) \\ &= \frac{X_1Y_2-Y_1X_2}{y^2}J \end{aligned}$$

מה זה הy הקטן? נזכור כי התחלנו משני וקטורים $X,Y\in T_{(x,y)}U$, משם מגיע ה y הקטן, הנקודה אשר ממנה התחלנו.

פרק 22

תרגול תשיעי - 29.12.2014 - עקמומיות חתך

22.1 עקמומיות חתך

תהי ∇ נגזרת קווריאנטית Levi-Civita על תחום $U\subset\mathbb{R}^{n}$ עם אופרטור עקמומיות R:

$$R\left(x,y\right)=\nabla_{x}\nabla_{y}-\nabla_{y}\nabla_{x}-\nabla_{\left[x,y\right]}$$

הגדרה 22.1.1 $x,y\in T_{q}U$ בת"ל:

$$K\left(x,y\right)=\frac{\left(R\left(x,y\right)y,x\right)}{\left|x\right|^{2}\left|y\right|^{2}-\left(x,y\right)^{2}}$$

ראינו בכיתה כי $K\left(x,y\right)$ תלוי רק במישור $\mathrm{span}\left(x,y\right)\subset T_{q}U$, לכן מסמנים $K\left(\alpha\right)$ כאשר $\alpha=\mathrm{span}\left(x,y\right)$.

משפט 22.1.2

עבור $M^{n}\subset\mathbb{R}^{n+1}$ אז:

$$\left(R\left(x,y\right)y,x\right)=B\left(x,x\right)B\left(y,y\right)-B\left(x,y\right)^{2}$$

כאשר B היא התבנית היסודית השניה.

את המשפט הנ"ל הוכחנו בכיתה.

כמו כן:

משפט 22.1.3

אם $M^{2}\subset\mathbb{R}^{3}$, נסמן: $K\left(A\right)=K\left(T_{A}M\right)$ עבור $A\in M$. נקבל $K_{\text{Riemann}}:M\to\mathbb{R}$ אז: $K_{\text{Riemann}}=K_{\text{Gauss}}$.

ראינו גם את משפט זה, והוא גרר את משפט Egregium.

✎ **תרגיל 22.1.4 :** חשבו עקמומיות חתך\רימן עבור המטריקה:

$$\mathrm{d}s^2 = a(x,y)\left[\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2\right]$$

על $U \subset \mathbb{R}^2$.

פתרון: נסמן $A = \log a$ אז ראינו בתרגולים קודמים כי:

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{1,1} &= \frac{1}{2}A_x \\
\Gamma^1_{2,2} &= -\frac{1}{2}A_x \\
\Gamma^1_{2,1} = \Gamma^1_{1,2} &= \frac{1}{2}A_y \\
\Gamma^2_{2,2} &= \frac{1}{2}A_y \\
\Gamma^2_{1,1} &= -\frac{1}{2}A_y \\
\Gamma^2_{1,2} = \Gamma^2_{2,1} &= \frac{1}{2}A_x
\end{aligned}$$

כאשר $A_x = \frac{\partial A}{\partial x}$.
עלינו לחשב את $K(q) = K(T_aU)$. נבחר בסיס e_1, e_1. מה הערך של: $(R(e_1,e_2)e_2, e_1)$=?

$$R(e_1,e_2)e_2 = \nabla_{e_1}\nabla_{e_2}e_2 - \nabla_{e_2}\nabla_{e_1}e_2 - \underbrace{\nabla_{[e_1,e_2]}e_2}_{[e_1,e_2]=0} \to 0$$

נבחין כי:

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_1}e_1 &= \Gamma^1_{1,1}e_1 + \Gamma^2_{1,1}e_2 = \frac{1}{2}A_xe_1 - \frac{1}{2}A_ye_2 \\
\nabla_{e_1}e_2 &= \Gamma^1_{1,2}e_1 + \Gamma^2_{1,2}e_2 = \frac{1}{2}A_ye_1 + \frac{1}{2}A_xe_2 \\
\nabla_{e_2}e_2 &= \ldots = -\frac{1}{2}A_xe_1 + \frac{1}{2}A_ye_2 \qquad (= -\nabla_{e_1}e_1)
\end{aligned}$$

לכן:

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_1}\nabla_{e_2}e_2 &= \nabla_{e_1}\left[-\frac{1}{2}A_xe_1 + \frac{1}{2}A_ye_2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[-\nabla_{e_1}(A_xe_1) + \nabla_{e_1}(A_ye_2)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[-A_{xx}e_1 + A_{xy}e_2 - A_x\nabla_{e_1}e_1 + A_y\nabla_{e_1}e_2\right]
\end{aligned}$$

נעצור כאן, ונחשב את הגורם השני:

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_2}\nabla_{e_1}e_2 &= \nabla_{e_2}\left[\frac{1}{2}A_ye_1 + \frac{1}{2}A_xe_2\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\nabla_{e_2}(A_ye_1) + \nabla_{e_2}(A_xe_2)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[A_{yy}e_1 + A_{xy}e_2 + A_y\nabla_{e_2}e_1 + A_x\nabla_{e_2}e_2\right]
\end{aligned}$$

נחסיר את המשוואות זו מזו ונקבל:

$$\begin{aligned}
R(e_1,e_2)e_2 &= \nabla_{e_1}\nabla_{e_2}e_2 - \nabla_{e_2}\nabla_{e_1}e_2 \\
&= \frac{1}{2}\Big[-(A_{xx}+A_{yy})e_1 + \underbrace{(A_{xy}-A_{xy})}_{\to 0}e_2 + A_y\underbrace{(\nabla_{e_1}e_2 - \nabla_{e_2}e_1)}_{\to 0} - A_x\underbrace{(\nabla_{e_1}e_1 + \nabla_{e_2}e_2)}_{\to 0}\Big]
\end{aligned}$$

דוגמה 22.1.6 : המטריקה ההיפרבולית על חצי המישור העליון\משטח Beltrami.

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}{y^2}$$

כאן אנו מקבלים כי:

$$a = \frac{1}{y^2}$$

ולכן:

$$\begin{aligned} \Delta \log a &= \Delta\left(-2\log y\right) \\ &= -2\left(\log y\right)'' = \frac{2}{y^2} \end{aligned}$$

ולכן:

$$K = -\frac{\Delta \log a}{2a} = -\frac{2/y^2}{2/y^2} = -1$$

מסקנה 22.1.7

לא קיימת איזומטריה מקומית ממשטח *Beltrami* לספירה $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ או ממשטח *Beltrami* או למישור עם המטריקה האוקלידית.

תזכורת 22.1.8 סימטריות של אופרטור העקמומיות. נניח ש ∇ היא נגזרת Levi-Civita של מטריקה g. נסמן:

$$R(x,y,z,w) = (R(x,y)z,w)$$

אז:

1. R הוא אנטי־סימטרי להחליפות $x \leftrightarrow y$ ו $z \leftrightarrow w$. למשל:

$$R(y,x,z,w) = -R(x,y,z,w)$$

2.

$$R(x,y,z,w) = R(z,w,x,y)$$

3.

$$R(x,y,z,w) + R(z,x,y,w) + R(y,z,x,w) = 0$$

אנו רוצים להראות כי "עקמומיות החתך קובעת את אופרטור העקמומיות".

תרגיל 22.1.9 : נניח ש V הוא מרחב מכפלה פנימית סוף מימדי מעל $\mathbb{R}$. ונתונות שתי פונקציות $R_1, R_2 : V\times V\times V\times V \to \mathbb{R}$ מולטי־לינאריות המקיימות את הסימטריות הנ"ל. ונניח בנוסף שלכל $x,y\in V$ בת"ל מתקיים ש:

$$\frac{R_1(x,y,y,x)}{|x|^2|y|^2-(x,y)^2}=\frac{R_2(x,y,y,x)}{|x|^2|y|^2-(x,y)^2}$$

הוכיחו כי: $R_1=R_2$.

רמז: סמנו $R=R_1-R_2$ אז צריך להוכיח כי $R=0$. נתון: $R(x,y,y,x)=0$. R מקיים את התכונות, אז צריך להראות כי $R=0$.
למשטל $R(x+y,z,z,x+y)=0$ אז : $R(x,z,z,y)=0$ וכן הלאה.

הערה 22.1.10 המכנה מיותר כי הוא שווה בין שני האגפים, הכוונה להראות שמודבר על אופרטור העקמומיות.

מסקנה 22.1.11

נניח ש ∇_1,∇_2 שתי גגזרות *Levi-Civita* בעלות אופרטור עקמומיות R_1,R_2 ועקמומיות חתך K_1,K_2. אם לכל q ולכל מישור $\alpha\subset T_qU$ מתקיים $K_1(\alpha)=K_2(\alpha)$, אז $R_1=R_2$.

בעצם בגלל זה רשמנו את המכנה בתרגיל, קל לראות כי זה נובע מיד.

תרגיל 22.1.12 : נניח ∇ היא נגזרת Levi-Civita עם עקמומיות חתך קבועה c. הוכיחו כי:

$$R(x,y)z=c[(y,z)x-(x,z)y]$$

פתרון:

$$R'(x,y,z,w)=c[(y,z)(x,w)-(x,z)(y,w)]$$

בפרט:

$$\frac{R'(x,y,y,x)}{|x|^2|y|^2-(x,y)^2}=c=\frac{R(x,y,y,x)}{|x|^2|y|^2-(x,y)^2}$$

כאשר R טנזור העקמומיות של ∇.
מבדיקה ישירה, R' מקיים את הסימטריות הנ"ל. לכן לפי התרגיל $R'=R$. ובפרט:

$$R(x,y)=c[(y,z)x-(x,z)y]$$

פרק 23

תרגול עשירי - 05.01.2015 - גאודזים

23.1 הגדרה

הגדרה 23.1.1 תהי ∇ נגזרת קוואריאנטית על תחום U, עקומה γ ב u נקראת גאודזית אם $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}=0$ (כלומר $\dot{\gamma}$ מקביל לאורך γ).

בקואורדינטות: $\gamma=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$ גאודזית אס"ם:

$$\ddot{\gamma}_k+\sum_{i,j}\Gamma^k_{i,j}\dot{\gamma}_i\dot{\gamma}_j=0\qquad 1\le k\le n$$

הערה 23.1.2 זה דומה מאוד להזזה במקביל, אבל המשוואה הזו אינה לינארית!

משפט קיום ויחידות: כאן, בניגוד להזזה במקביל, קיים פתרון לזמן כלשהו. כלומר:

משפט 23.1.3

לכל $A\in U$ ו $\xi\in T_AU$ קיים ויחיד גאודז $\gamma(t)$ כאשר $t\in(-\xi,\xi)$ עם $\gamma(0)=A$ ו $\dot{\gamma}(0)=\xi$.

23.1.1 גאודזיים רימניים

הגדרה 23.1.4 אם g מטריקה על U אז גאודזיים של ∇_{LC} נקראים גאודזים של g.

ראינו בכיתה את המשפט:

משפט 23.1.5

אם γ גאודז אז: $|\dot{\gamma}|_g\equiv\mathrm{const}$.

וכמו כן ראינו את המשפט:

משפט 23.1.6

אם γ בפרמטריזציה טבעית, אז γ היא גאודז אס"ם γ היא נקודה קריטית של פונקציונל האורך:

$$L:\Omega\to\mathbb{R}$$

כאשר:

$$\Omega=\{\alpha:[0,c]\to U\mid\quad \alpha(0)=A,\quad \alpha(c)=B\}$$

ו:

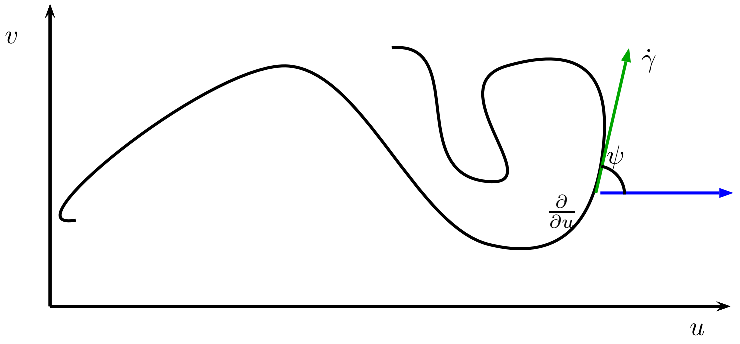
$$L(\alpha)=\int_0^c|\dot{\alpha}(t)|\,\mathrm{d}t$$

23.2 גאודזים על משטח סיבוב

כרגיל, אנו לוקחים מסילה $(f(u), g(u))$ ומסובבים: $a(u,v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$. נניח כי אנחנו בפרמטריזציה טבעית, לכך:

$$f'(u)^2 + g'(u)^2 = 1$$

23.2.1 אינטגרל Clairaut



נניח שיש לנו מסילה $\gamma(t) = (q_1(t), q_2(t))$, אז אינטגרל Clairaunt של המסילה מוגדר כ:

$$I(t) = f(\gamma_1(t))\sin\psi(t)$$

כאשר:

$$\psi(t) = \angle\left(\dot{\gamma}(t), \frac{\partial}{\partial u}\right)$$

משפט 23.2.1

נניח כי γ בפרמטריזציה טבעית אז:

1. אם γ גאודזית אז $I(t) = \text{const}$.
2. אם $I(t) = \text{const}$ ובנוסף $\forall t\ \dot{\gamma}_1(t) \neq 0$ אז γ גאודזית.

בפרט הקווים $\{v = \text{const}\}$ תמיד גאודזים: $\psi = 0 \Rightarrow I(t) = 0$.

מקרה אחר: הקו $U = u_0$ הוא גאודז אם"ם $f'(u_0) = 0$.

בפועל: שימוש ב Clairaut, נרשום שתי משוואות:

1. $|\dot{\gamma}|^2 = 1$
2. $I(t) \equiv c$.

תרגיל 23.2.2 : מצאו את כל הגאודזים של משטח Beltrami.

$$\begin{aligned} a(u,v) &= (u\cos v, u\sin v, g(u)) \\ f(u) &= u \\ g'(u) &= -\frac{\sqrt{1-u^2}}{u} \end{aligned}$$

פתרון: נעבור לקואורדינטות חדשות: $q=v,\ p=\frac{1}{u}$ אז: $p\geq 1$ ו $0\leq q\leq 2\pi$. ואז נקבל:

$$\mathrm{d}s^2=\frac{\mathrm{d}p^2+\mathrm{d}q^2}{p^2}$$

נקח $\gamma(t)=(q(t),p(t))$ בפרמטריזציה טבעית:

כעת, מהמשוואה הראשונה אנחנו מקבלים: $|\dot{\gamma}|^2=1$ כלומר: $\frac{\dot{q}^2+\dot{p}^2}{p^2}=1$.

כעת:

$$I(t)=f(u(t))\sin\psi(t)$$

$$\begin{aligned} f(u(t)) &= u(t)=\frac{1}{p(t)} \\ \psi(t) &= \angle\left(\dot{\gamma},\frac{\partial}{\partial u}\right) \end{aligned}$$

היות ו: $u=u(p)$ אז $\frac{\partial}{\partial u}\|\frac{\partial}{\partial p}$ ולכן:

$$\frac{\partial}{\partial u}=\frac{\partial p}{\partial u}\frac{\partial}{\partial p}$$

ולכן:

$$\angle\left(\dot{\gamma},\frac{\partial}{\partial u}\right)=\angle\left(\dot{\gamma},\frac{\partial}{\partial p}\right)$$

לכן:

$$\cos\psi(t)=\frac{\left(\dot{\gamma},\frac{\partial}{\partial p}\right)}{|\dot{\gamma}|\left|\frac{\partial}{\partial p}\right|}$$

$$\left(\dot{\gamma}(t),\frac{\partial}{\partial p}\right)=\frac{\dot{q}\cdot 0+\dot{p}\cdot 1}{p^2}=\frac{\dot{p}}{p^2}$$

$$|\dot{\gamma}|=1,\ \left|\frac{\partial}{\partial p}\right|=\frac{1}{p},\ \left|\frac{\partial}{\partial p}\right|^2=\left(\frac{\partial}{\partial p},\frac{\partial}{\partial p}\right)=\frac{1}{p^2}$$

$$\begin{aligned} \cos\psi(t) &= \frac{\dot{p}/p^2}{1/p}=\frac{\dot{p}}{p} \\ \sin\psi(t) &= \pm\sqrt{1-\frac{\dot{p}^2}{p^2}} \end{aligned}$$

אבל ראינו כי: $\frac{\dot{q}^2+\dot{p}^2}{p^2}=1$ לכן:

$$\sin\psi(t)=\pm\sqrt{\frac{\dot{q}^2}{p^2}}=\pm\frac{\dot{q}}{p}$$

לכן:

$$I(t)=\frac{1}{p}\left(\pm\frac{\dot{q}}{p}\right)=\pm\frac{\dot{q}}{p^2}$$

לכן יש לנו את שתי המשוואות:

$$\begin{cases}\frac{\dot{p}^2+\dot{q}^2}{p^2}=1\\ \frac{\dot{q}}{p^2}=c\end{cases}$$

הערה 23.2.3 העלמנו את ה$\pm$ כי הוספנו קבוע שגם כך אנחנו לא יודעים מה הוא.

אנחנו יכולים לשכתב אותן:

$$\begin{cases}\dot{p}^2+\dot{q}^2=p^2\\ \dot{q}=cp^2\end{cases}$$

נציב את השניה בראשונה ונקבל:

$$\dot{p}^2=p^2-c^2p^4$$

וקיבלנו:

$$\begin{cases}\dot{p}=\pm\sqrt{p^2-c^2p^4}\\ \dot{q}=cp^2\end{cases}$$

כעת נפריד למקרים:

מקרה ראשון $c=0$: במקרה הזה אנחנו נקבל $\dot{q}=0$ כלומר: $q\equiv q_0$. במקרה הזה נקבל כי: $\dot{p}=\pm p$, בפרט $\dot{p}\neq 0$ (מכיוון ש $p=\frac{1}{u}$ ו u היה חיובי) ולכן: $\{q=q_0\}$היא גאודזית.

מקרה שני $c\neq 0$: אנחנו רוצים לפתור את המערכת המשוואות הנ"ל, נניח כי $\dot{p}\neq 0$. אז ממשפט הפונקציה הסתומה, ניתן לבטא את γ כמשוואה $q=q(p)$. ובנוסף:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p}=\frac{\dot{q}}{\dot{p}} &= \pm\frac{cp^2}{\sqrt{p^2-c^2p^4}}\\ &= \pm\frac{cp^2}{\sqrt{p^2-c^2p^4}}\\ &= \mp\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\sqrt{1-c^2p^2}\end{aligned}$$

לכן:

$$q=q_0\pm\frac{1}{c}\sqrt{1-c^2p^2}$$

נעביר אגף ונעלה בריבוע ונקבל:

$$(q-q_0)^2+p^2=\frac{1}{c^2}$$

דהיינו, קיבלנו מעגל סביב נקודה $(q_0,0)$, כלומר קיבלנו מעגלים שהמרכזים שלהם נמצאים על ציר q. כאשר המסילות הגאודזיות שלנו על משטח Beltrami יהיו החיתוך של המעגלים הנ"ל עם התחום $p\geq 1$ ו $0\leq q\leq 2\pi$.

לכן $\left\{(q-q_0)^2+p^2=R^2\right\}$ בפרמטריזציה טבעית היא גאודז על משטח Beltrami.

הערה 23.2.4 אנחנו לא רואים מכאן איך זה נראה על משטח Beltrami אלא בפרמטריזציה החדשה שלנו. קצת קשה למתרגל לתאר איך זה נראה על המשטח עצמו.

לסיכום: ראינו כי הקווים הבאים הם גאודזיים על משטח Beltrami:

1. קווים מקבילים לציר p.
2. מעגלים שמרכזם על ציר q.

טענה 23.2.5

אלה הם כל הגאודזים של משטח *Beltrami*.

הוכחה: כתרגיל, אבל הרעיון שלה: משפטקיום ויחידות. אם נבחר נקודה ווקטור משיק ξ, כלומר לכל $A \in U$ ולכל $\xi \in T_AU$, יש עקומה מאחת מהצורות הנ"ל העוברת דרך A בכיוון ξ. (כתרגיל). ■

פרק 24

תרגול אחד עשר - 12.01.2015 - נפח רימני

24.1 תבנית דיפרנציאלית

תזכורת 24.1.1 $U \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום. תבנית נפח על U היא התאמה חלקה $U \ni q \mapsto \alpha_q$ כאשר:

$$\alpha_q : \underbrace{T_qU \times \ldots \times T_qU}_{n\text{times}} \to \mathbb{R}$$

זו תבנית מולטי לינארית אנטי־סימטרית ולכל q מתקיים $\alpha_q \neq 0$.

דוגמה 24.1.2 : לכל $q \in U$, $T_qU \cong \mathbb{R}^n$ ולכן נקבל: $\det_q : T_qU \times \ldots \times T_qU \to \mathbb{R}$ (דוגמה לתבנית נפח על U).
וסימון עבור תבנית זו הוא $\mathrm{d}q_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}q_n$.

כל תבנית נפח על U ניתן לרשום $\alpha = \alpha(q)\,\mathrm{d}q_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}q_n$ כאשר $\alpha : U \to \mathbb{R}$ פונקציה חלקה ולכל q $\alpha(q) \neq 0$.

24.2 תבנית נפח רימנית

יהיו (U, g) תחום ומטריקה רימנית. תבנית נפח רימנית מוגדרת באופן הבא:

$$\mathrm{dVol}_g = \omega_g = \sqrt{\det(g_{i,j})}\mathrm{d}q_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}q_n$$

אפיון: לכל $q \in U$ ולכל בסיס אורתונורמלי חיובי $(v_1, \ldots, v_n)$ של T_qU מתקיים: $\omega_g(v_1, \ldots, v_n) = 1$.

✎ **תרגיל 24.2.1 :** אם $f : (U, g_U) \to (V, g_V)$ איזומטריה רימנית שומרת אורינטציה (כלומר $\det(D_q f) > 0$) אז:

$$f * \omega_{g_V} = \omega_{g_U}$$

עבור (U, g) קבוצה פתוחה $V \subset U$ נגדיר:

$$\mathrm{Vol}_g(V) = \int_V \omega_g := \int_V \sqrt{\det(g_{i,j})}\mathrm{d}q_1 \ldots \mathrm{d}q_n$$

כאשר האחרון הוא אינטגרל רימן רגיל.

דוגמה 24.2.2 : משטח סיבוב עבור $\gamma(u) = (f(u), g(u))$.
נניח כי γ בפרמטיזציה טבעית. $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^2$. אז:

$$\mathrm{d}s^2 = du^2 + f(u)^2 \,\mathrm{d}v^2$$

ולכן:

$$g_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f(u)^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \sqrt{\det(g_{i,j})} = f$$

ולכן: $\omega_g = f(u)\,\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v$.
לכן שטח של גוף סיבוב הוא:

$$\mathrm{Area}(M) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}v \int_0^L f(u)\,\mathrm{d}u = 2\pi \int_0^L f(u)\,\mathrm{d}u$$

24.3 משמעות גאומטרית - משפט Pappus

$$\frac{1}{L}\int_0^L f(u)\,\mathrm{d}u = f_{\mathrm{avg}} = R_{\mathrm{avg}}$$

(רדיוס הסיבוב הממוצע)
נוסחת פפוס:

$$\mathrm{Area}(M) = (2\pi R_{\mathrm{avg}})\,L$$

שווה להיקף הממוצע כפול אורך המסילה.

דוגמה 24.3.1 : הטורוס.

$$\gamma(u) = (f(u), g(u)) = \left(R + r\cos\frac{u}{r}, r\sin\frac{u}{r}\right)$$

כאן:

$$R_{\mathrm{avg}} = f_{\mathrm{avg}} = R$$

ולכן:

$$\mathrm{Area}(\mathbb{T}) = (2\pi R)(2\pi r)$$

תרגיל 24.3.2 : נתבונן בספירה $S^2 \subset \mathbb{R}^3$

1. חשבו את שטח של כיפה עם זווית פתיחה θ (כלומר הזווית ביחס לציר ה z של הוקטור שמחבר את הנקודה על הספירה עם הראשית).
2. הראו כי שטח של פרוסה $\left\{(x,y,z) \in S^2 \mid \quad z_0 \le z \le z_0 + h\right\}$ תלויה רק ב h עבור $-1 \le z_0 \le z_0 + h \le 1$.

פתרון:

1. נעבד בפרמטריזציה של S^2 כגוף סיבוב. $-\frac{\pi}{2} \le u \le \frac{\pi}{2}$, $0 \le v \le 2\pi$. בקואורדינטות (u,v) הכיפה V_θ נתונה ע"י:

$$V_\theta = \left\{(u,v) \mid \ v \in [0,2\pi]\,,\ \frac{\pi}{2} - \theta \le u \le \frac{\pi}{2}\right\}$$

כאן $f(u) = \cos u$ ולכן $\omega_g = \cos u \mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v$ דהיינו:

$$\mathrm{Area}\left(V_\theta\right) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}v \int_{\frac{\pi}{2}-\theta}^{\frac{\pi}{2}} \cos u \mathrm{d}u = 2\pi\left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right] = 2\pi\left(1 - \cos\theta\right)$$

הערה 24.3.3 עבור $\theta \ll 1$ נקבל:

$$\mathrm{Area}\left(V_\theta\right) = 2\pi\left(1 - \cos\theta\right) \approx 2\pi\left(1 - \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)\right) = \pi\theta^2$$

וזה מתאים לניסיון שלנו מחיי היומיום.

2. נשכתב את החלק הראשון. נניח כי $z_0 = \cos\theta$ ואז: $V_\theta = \{(x,y,z) \mid \ z \ge z_0\}$ ולכן:

$$\mathrm{Area}\left(V_\theta\right) = 2\pi\left(1 - z_0\right)$$

אנחנו יכולים לכתוב $V_{z_0} := V_\theta$. וכעת:

$$\mathrm{Area}\left(U\right) = \mathrm{Area}\left(V_{z_0}\right) - \mathrm{Area}\left(V_{z_0+h}\right) = 2\pi\left[1 - z_0 - \left(1 - \left(z_0 + h\right)\right)\right] = 2\pi h$$

כלומר אכן תלוי רק ב h כנדרש.

תרגיל 24.3.4 : חשבו את שטחו של משטח Beltrami.

פתרון: בקואורדינטות (q,p) למשטח Beltrami יש פרמטריזצה ע"י $1 \le p$ ו $0 \le q \le 2\pi$ ואז:

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{\mathrm{d}p^2 + \mathrm{d}q^2}{p^2} \Rightarrow g = \begin{pmatrix} \frac{1}{p^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{p^2} \end{pmatrix}$$

ולכן: $\sqrt{\det g} = \frac{1}{p^2}$ כלומר: $\omega_g = \frac{\mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q}{p^2}$. דהיינו:

$$\mathrm{Area}\left(M\right) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}q \int_1^{\infty} \frac{\mathrm{d}p}{p^2} = 2\pi\left(-\frac{1}{p}\right) = 2\pi$$

תרגיל 24.3.5 : נתון $\Delta \subset S^2$ משולש שצלעותיו גאודזים עם זווית α, β, γ. חשבו את השטח $A = \text{Area}(\Delta)$.
(זווית בין שני קווים גאודזיים - הכוונה לזיית בין המשיקים המתאימים).

פתרון: **למה 24.3.6**

$A_\alpha \in S^2$ פרוסה בין שני גאודזים עם זווית α, אז $\text{Area}(A_\alpha) = 2\alpha$.

הערה 24.3.7 לא הוכחה אבל הסבר: $\text{Area}(A_\alpha) = \lambda\alpha$, $\text{Area}(A_{2\pi}) = 4\pi$ (השטח של כל הספירה) ולכן $\lambda = 2$.

נסמן: $P_\alpha = A_\alpha \cup (-A_\alpha)$ אז: $\text{Area}(P_\alpha) = 4\alpha$.

תרגיל:

1. $P_\alpha \cup P_\beta \cup P_\gamma = S^2$
2. $P_\alpha \cap P_\beta = P_\alpha \cap P_\gamma = P_\beta \cap P_\gamma = P_\alpha \cap P_\beta \cap P_\gamma = \Delta \cup (-\Delta)$

וכעת נחזור לפצרון התרגיל המקורי: מנוסחת הכלה והדחה:

$$\begin{aligned}\text{Area}(P_\alpha \cup P_\beta \cup P_\gamma) = \text{Area}(P_\alpha) + \text{Area}(P_\beta) + \text{Area}(P_\gamma) - \\ - \text{Area}(P_\alpha \cap P_\beta) - \text{Area}(P_\alpha \cap P_\gamma) - \text{Area}(P_\beta \cap P_\gamma) + \\ + \text{Area}(P_\alpha \cap P_\beta \cap P_\gamma)\end{aligned}$$

כלומר:

$$4\pi = 4[\alpha+\beta+\gamma] - 2A - 2A - 2A + 2A = 4[\alpha+\beta+\gamma] - 4A \Rightarrow \boxed{A = \alpha+\beta+\gamma-\pi}$$