משוואות של פיסיקה מתמטית 77313 - סיכום הרצאות של פרופסור ברוך מאירסון משנת הלימודים 2012

אור דגמי, or@digmi.org. אתר אינטרנט: http://digmi.org

4 בינואר 2013

תוכן עניינים

1 קואורדינטות **3**
1.1 קואורדינטות עקומות (Colloquial Coordinates) . . . 3
1.2 פעולות וקטוריות . . . 5
1.2.1 גרדיאנט . . . 5
1.2.2 דיברגנץ . . . 6
1.2.3 לפלסיאן . . . 6
1.2.4 רוטור . . . 6
1.3 אלמנט שטח ונפח . . . 9
1.3.1 אלמנט שטח . . . 9
1.3.2 אלמנט נפח . . . 9

2 פונקציות מוכללות - Generalized Functions **10**
2.1 פונקציית הדלתא של דיראק . . . 10
2.1.1 פונקציות יוצרות . . . 10
2.1.2 תכונות הפונקציה δ . . . 13
2.1.3 נגזרת של פונקציית δ . . . 14
2.1.4 יחידות של δ . . . 15
2.1.5 במקרה רב מימדי . . . 15
2.1.6 אינטגרל של δ' . . . 16
2.2 פונקציית המדרגה - Heaviside . . . 19
2.3 גזירות של פונקציות לא רציפות . . . 21

3 תורת שטורם ליוביל - Sturm-Liouville **23**
3.1 מבוא . . . 23
3.1.1 משוואות דיפרנציאליות רגילות . . . 23
3.1.2 בעיית תנאי התחלה - בעיית קושי . . . 24
3.1.3 בעיית תנאי שפה . . . 24
3.2 אופרטור דיפרנציאלי ליניארי - Linear differential operator . . . 27
3.3 משפט שטורם ליוביל . . . 29
3.3.1 בעיות לא הומוגניות - פונקציית גרין . . . 33

4 משוואות דיפרנציאליות חלקיות - PDE: Partial differential equations **39**
4.1 משוואה כללית . . . 40
4.1.1 שלושה מימדים . . . 41
4.1.2 n מימדים . . . 43
4.2 בעיית קושי . . . 43
4.3 בעיה לא הומוגנית בn מימדים . . . 44

4.4 פונקציית גל . . . 47
4.4.1 פונקציית גל פשוטה . . . 47
4.5 משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר שני . . . 49
4.5.1 תנאי שפה . . . 49
4.6 משוואות היפרבוליות - משוואת הגלים . . . 54
4.6.1 תנאי קושי . . . 55
4.6.2 תנאי שפה דיריכלה . . . 56
4.6.3 מיתר המוחזק בשתי קצותיו . . . 56
4.6.4 ממברנה דו מימדית . . . 62
4.6.4.1 תוף מלבני . . . 63
4.7 משוואת החום\דיפוזיה - Heat/Diffusion eqn. . . . 66
4.7.1 טרנספורם פורייה . . . 68
4.7.2 תנאי שפה . . . 73
4.7.3 בעיות אי הומוגניות . . . 74
4.7.3.1 במשוואת החום . . . 74
4.7.3.2 בעיות אי־הומוגניות במשוואת הגלים . . . 77
4.7.4 משוואת לפלאס - Laplace's equation . . . 78
4.7.4.1 יחידות הפתרון . . . 78
4.7.4.2 פתרון במימד 1 . . . 79
4.7.4.3 פתרון עבור חצי מישור . . . 80
4.7.4.4 רצועה אינסופית . . . 82
4.7.4.5 מלבן . . . 82
4.7.4.6 מעגל . . . 84

5 חשבון וריאציות 89
5.1 מבוא . . . 89
5.2 משוואות אוילר לגראנז' . . . 90

6 משוואות אינטגרליות 92
6.1 גרעין מנוון - Degenerate Kernel . . . 92

פרק 1

קואורדינטות

מה המשמעות של קואורדינטות קרטזיות? נתבונן בנקודה $p=(1,2,3)$ מה המשמעות?
המשמעות היא חיתוך של שלושה מישורים:

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

תזכורת 1.0.1 חיתוך של שני מישורים הוא קו ישר, חיתוך של קו ומישור (בהנחה שנחתכים ולא מתלכדים\מקבילים) הוא נקודה.

נרצה להרחיב את המונח של קואורדינטות ולדון במקרים של מערכות קואורדינטות נוספות.

1.1 קואורדינטות עקומות (Colloquial Coordinates)

נגדיר קואורדינטות כפונקציות של x,y,z, כלומר: $q_1(x,y,z),\ q_2(x,y,z),\ q_3(x,y,z)$. אם נגדיר את שלושת הקואורדינטות לקבועים מסויימים נקבל נקודה.

דוגמה 1.1.1 מערכת קואורדינטות גליליות (Cylindrical Coordinate): נתובנן במקרה של מערכת קואורדינטות גליליות אותה אנו כבר מכירים:

$$\begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \varphi &= \arctan\frac{y}{x}+C \qquad (C=0,\pi,2\pi\ldots) \\ z &= z \end{aligned}$$

ניתן לחזור לקואורדינטות קרטזיות בעזרת:

$$\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi \\ z &= z \end{aligned}$$

ולכן, אם באמת נקבע את ρ,φ,z להיות קבועים כלשהו, נקבל נקודה במרחב.

כעת נקצה לבנות וקטור יחידה e_1 למשטח q_1. נעשה זאת באופן הבא:

1. נקח נקודת חיתוך של שלושת המשטחים (באופן לוקאלי המשטחים הם "מישוריים")
2. נבנה וקטור יחידה הניצב למשטח.
3. נבחר את הכיוון של הוקטור בכיוון שבו התוספת לערך q_1 היא חיובית.

את e_1, e_2, e_3 נבחר כך שתמיד יהיו אותוגונליים בנקודה באופן לוקאלי.

הערה 1.1.2 משלושת הקואורדינטות e_1, e_2, e_3 ניתן לבנות את הוקטור v:

$$v = v_1\vec{e_1} + v_2\vec{e_2} + v_3\vec{e_3}$$

נחזור להתבונן בדוגמה של המערכת קואורדינטות גליליות. מהם המישורים שלנו?

- $\rho = \text{const}$ - אוסף גלילים המכסים את המישור
- $\varphi = \text{const}$ - אוסף חצי מישור הנקבעים ע"י φ
- $z = \text{const}$ - אוסף ה"גבהים" שבהם הנקודה יכולה להמצא - מישורים במקבילים למישור x, y.

נבחין כאשר אנו רוצים להביע נקודה בעזרת הקואורדינטות החדשות e_1, e_2, e_3 היחידות לא בהכרח מתאימות, לכן יתווספו קבועים h_1, h_2, h_3. כלומר:

$$\mathrm{d}\vec{r} = h_1\mathrm{d}q_1\vec{e_1} + h_2\mathrm{d}q_2\vec{e_2} + h_3\mathrm{d}q_3e_3$$

השינוי בוקטור $\vec{r}$ יובע באמצעות:

$$q_1 + \mathrm{d}q_1, \quad q_2 + \mathrm{d}q_2, \quad q_3 + \mathrm{d}q_3$$

כעת, נתבונן בתיבה אינפיניטסימלית. בעלת האורכי $\mathrm{d}x,\ \mathrm{d}y,\ \mathrm{d}z$. נרצה למצוא מרחק בין שני קודקודים מרוחקים של הקוביה (כלומר את התוספת של $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$ לנקודה המקורית). ממשפט פתגורס:

$$\underbrace{\mathrm{d}s^2}_{\text{השינוי בוקטור}} = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$$

ולכות ברור כי הקשר בין x, y, z לבין q_1, q_2, q_3 הוא:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x &= \frac{\partial x}{\partial q_1}\mathrm{d}q_1 + \frac{\partial x}{\partial q_2}\mathrm{d}q_2 + \frac{\partial x}{\partial q_3}\mathrm{d}q_3 \\
\mathrm{d}y &= \frac{\partial y}{\partial q_1}\mathrm{d}q_1 + \frac{\partial y}{\partial q_2}\mathrm{d}q_2 + \frac{\partial y}{\partial q_3}\mathrm{d}q_3 \\
\mathrm{d}z &= \frac{\partial z}{\partial q_1}\mathrm{d}q_1 + \frac{\partial z}{\partial q_2}\mathrm{d}q_2 + \frac{\partial z}{\partial q_3}\mathrm{d}q_3
\end{aligned}$$

ומכאן נובע שניתן להביע את $\mathrm{d}s$ באמצעות:

$$\mathrm{d}s^2 = h_1^2\mathrm{d}q_1^2 + h_2^2\mathrm{d}q_2^2 + h_3^2\mathrm{d}q_3^2$$

כאשר:

$$h_i^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2$$

כעת, ננסה להביע את $\mathrm{d}s$ באופן הבא: $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}s_1^2 + \mathrm{d}s_2^2 + \mathrm{d}s_3^2$. נעשה זאת ע"י הגדרת גורמי סקאלה (scale factors):

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}s_1 &= h_1\mathrm{d}q_1 \\
\mathrm{d}s_2 &= h_2\mathrm{d}q_2 \\
\mathrm{d}s_3 &= h_3\mathrm{d}q_3
\end{aligned}$$

דוגמה 1.1.3 : נחשב את $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$ עבור קואורדינטות גליליות: ρ, φ, z
נבצע זאת בעזרת הצבה:

$$q_1 = \rho,\ q_2 = \varphi,\ q_3 = z$$

נקבל:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x &= \frac{\partial x}{\partial \rho}\mathrm{d}\rho + \frac{\partial x}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi + \frac{\partial x}{\partial z}\mathrm{d}z = \cos\varphi\mathrm{d}\rho - \rho\sin\varphi\mathrm{d}\varphi + 0\mathrm{d}z \\
\mathrm{d}y &= \frac{\partial y}{\partial \rho}\mathrm{d}\rho + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi + \frac{\partial y}{\partial z}\mathrm{d}z = \sin\varphi\mathrm{d}\rho + \rho\cos\varphi\mathrm{d}\varphi + 0\mathrm{d}z \\
\mathrm{d}z &= \frac{\partial z}{\partial \rho}\mathrm{d}\rho + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\mathrm{d}\varphi + \frac{\partial z}{\partial z}\mathrm{d}z = 0\mathrm{d}\rho + 0\mathrm{d}\varphi + 1\mathrm{d}z
\end{aligned}$$

נקבל:

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 =$$

$$\cos^2\varphi\mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi^2 - \cancel{2\cos\varphi\rho\sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi} + \sin^2\varphi\mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\cos\varphi^2\mathrm{d}\varphi^2 + \cancel{2\cos\varphi\rho\sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi} + \mathrm{d}z^2 =$$

$$\mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\mathrm{d}\varphi^2 + \mathrm{d}z^2$$

לכן קיבלנו כי:

$$h_\rho = 1, \qquad h_\varphi = \rho^2, \quad h_z = 1$$

הערה 1.1.4 נשים לב שכל האיברים המעורבים נפלו. וזהו אישור לכך שהקואורדינטות אכן ניצבון.

1.2 פעולות וקטוריות

1.2.1 גרדיאנט

נניח פונקציה המחזירה את הטמפרטורה בחדר לכל נקודה $T(x,y,z)$. נרצה לחשב את קצב שינוי הטמפרטורה בכיוון. לצורך כך יש לנו את הגרדיאנט:

$$\mathrm{grad}T(x,y,z) = \vec{\nabla}T = \vec{e_x}\frac{\partial T}{\partial x} + \vec{e_y}\frac{\partial T}{\partial y} + \vec{e_z}\frac{\partial T}{\partial z}$$

נתבונן בפונקציה המוגדרת עם מערכת קואורדינטות לא קרטזית:

$$\psi(q_1, q_2, q_3)$$

הערה 1.2.1 היחידות של גראדיאנט הן:

$$\left[\vec{\nabla}\psi\right] = \frac{[\psi]}{\mathrm{L}}$$

נרצה לחשב את הגראדיאנט במערכת קואורדינטות זו:

$$\vec{\nabla}\psi = \vec{e_1}\frac{\partial\psi}{\partial s_1} + \vec{e_2}\frac{\partial\psi}{\partial s_2} + \vec{e_3}\frac{\partial\psi}{\partial s_3} =$$

$$\vec{e_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\frac{\partial q_1}{\partial s_1} + \vec{e_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\frac{\partial q_2}{\partial s_2} + \vec{e_3}\frac{\partial\psi}{\partial q_3}\frac{\partial q_3}{\partial s_3} =$$

$$\frac{\vec{e_1}}{h_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1} + \frac{\vec{e_2}}{h_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2} + \frac{\vec{e_3}}{h_3}\frac{\partial\psi}{\partial q_3}$$

1.2.2 דיברגנץ

$$\mathrm{div}\vec{V} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$$

בקואורדינטות קרטזיות נקבל:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

ובמקרה הכללי:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (v_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_2} (v_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial q_3} (v_3 h_1 h_2) \right]$$

1.2.3 לפלסיאן

מגראדיאנט ודיברגנץ נוצר באופן אוטומטי אופרטור חדש, לפלסיאן:

$$\vec{\nabla}^2 \psi = \mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\psi) = \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,(\psi) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \psi = \triangle \psi$$

בקואורדינטות קרטזיות:

$$\vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}$$

ובמקרה הכללי:

$$\vec{\nabla}^2 \psi = \mathrm{div} \left(\frac{\vec{e_1}}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} + \frac{\vec{e_2}}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} + \frac{\vec{e_3}}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_3} \right)$$
$$= \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial \psi}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial \psi}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial \psi}{\partial q_3} \right) \right]$$

1.2.4 רוטור

$$\mathrm{rot}\vec{V} = \mathrm{curl}\vec{V} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{V}$$

בקואורדינטות קרטזיות:

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} \vec{e_x} & \vec{e_y} & \vec{e_z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \vec{e_x} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \vec{e_y} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \vec{e_z} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right)$$

ובמקרה הכללי:

$$\vec{\nabla} \times \vec{V} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} \vec{e_1} h_1 & \vec{e_2} h_2 & \vec{e_3} h_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1 v_1 & h_2 v_2 & h_3 v_3 \end{vmatrix} =$$
$$\frac{\vec{e_1}}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_2} (h_3 v_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (h_2 v_2) \right] + \frac{\vec{e_2}}{h_1 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_3} (h_1 v_1) - \frac{\partial}{\partial q_1} (h_3 v_3) \right] +$$
$$\frac{\vec{e_2}}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (h_2 v_2) - \frac{\partial}{\partial q_2} (h_1 v_1) \right]$$

✎ **דוגמה 1.2.2 קואורדינטות גליליות:** ראשית נסמן:

$$\vec{e_\rho} = \vec{\rho_0},\ \vec{e_\varphi} = \vec{\varphi_0},\ \vec{e_z} = \vec{k}$$

הגרדיאנט נתון ע"י:

$$\vec{\nabla}\psi = \vec{\rho_0}\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{\vec{\varphi_0}}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} + \vec{k}\frac{\partial\psi}{\partial z}$$

הדיברגנץ:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{V} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(v_\rho\cdot\rho) + \frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z)\right] = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(v_\rho\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

הלפלסיאן:

$$\vec{\nabla}^2\psi = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right] = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

ולסיום, הרוטור:

$$\vec{\nabla}\times\vec{V} = \frac{\vec{\rho_0}}{\rho}\left[\frac{\partial v_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial z}(\rho v_\varphi)\right] + \vec{\varphi_0}\left[\frac{\partial v_\rho}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial\rho}\right] + \frac{\vec{k}}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho v_\varphi) - \frac{\partial}{\partial\varphi}(v_\rho)\right]$$

✎ **דוגמה 1.2.3 :** גליל אינסופי טעון באופן אחיד כך ש $\rho(r)=\rho_0$ לכל $r<R$, ואילו לכל $r>R$ $\rho(r)=0$ נרצה למצוא את הפוטנציאל:

$$\vec{\nabla}^2\varphi=-4\pi\rho(r)$$

ולכן:

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\right)=-4\pi\rho(r)$$

עבור $r<R$ נקבל:

$$\begin{aligned}\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\right) &= -4\pi\rho_0\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\right) &= -4\pi\rho_0 r\\ r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} &= \int 4\pi i\rho_0 r'\mathrm{d}r'=-2\pi\rho_0 r^2+C_1\\ \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} &= -2\pi\rho_0 r+\frac{C_1}{r}\end{aligned}$$

אבל נתבונן במקרה $r=0$ נקבל כי השדה הוא אינסופי! וזה לא פיסיקלי, לכן בהכרח $C_1=0$ ונקבל:

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}=-2\pi\rho_0 r$$

נבצע שוב אינטגרציה ונקבל:

$$\begin{aligned}\varphi(r) &= -\pi\rho_0 r^2+C_2\\ \varphi(r<R) &= -\pi\rho_0 e^2\end{aligned}$$

בחרנו $c_2=0$ כיוון שאנו יכולים לכייל את הפוטנציאל כרצוננו.
עבור $r>R$ נקבל:

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\right)=0$$

כיוון שאין מטענים מחוץ לגליל. לכן נקבל:

$$r\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}r}=C_3\Rightarrow\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}=\frac{C_3}{r}$$

ולכן:

$$\mathrm{d}\varphi=C_3\frac{\mathrm{d}r}{r}\Rightarrow C_3\ln r+C_4$$

כיוון שהפוטנציאל הוא רציף וגזיר, נדרוש כי עבור $r=R$ נקבל שיוויון בין שני המקרים דהיינו:

$$\begin{aligned}\varphi(r=R) &= -\pi\rho_0 R^2=C_3\ln R+C_4\\ \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}(r=R) &= -2\pi\rho_0 R=\frac{C_3}{R}\end{aligned}$$

ומשני המשוואות הנ"ל נקבל:

$$\begin{aligned}C_3 &= -2\pi\rho_0 R^2\\ C_4 &= -\pi\rho_0 R^2+2\pi\rho_0 R^2\ln R\end{aligned}$$

ולכן:

$$\varphi(r)=\begin{cases}-\pi\rho_0 r^2 & 0<r<R\\ -2\pi\rho_0 R^2\ln r+2\pi\rho_0 R^2\ln R-\pi\rho_0 R^2=2\pi\rho_0 R^2\ln\frac{R}{r}-\pi\rho_0 R^2 & r<R<\infty\end{cases}$$

1.3 אלמנט שטח ונפח

1.3.1 אלמנט שטח

נרצה לבטא אלמנט שטח במקרה של מערכת קואורדינטות כללית. נבחין כי:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s_1 &= h_1\mathrm{d}q_1 \\ \mathrm{d}s_2 &= h_2\mathrm{d}q_2 \\ \mathrm{d}s_3 &= h_3\mathrm{d}q_4 \end{aligned}$$

נשים לב כי אלמנט השטח $\mathrm{d}\sigma_{12}$ נתון ע"י:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\sigma_{12} &= \mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2 = h_1h_2\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2 \\ \mathrm{d}\sigma_{23} &= \mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_3 = h_2h_3\mathrm{d}q_2\mathrm{d}q_3 \\ \mathrm{d}\sigma_{13} &= \mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_3 = h_1h_3\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_3 \end{aligned}$$

ובמקרה הכללי יותר:

$$\mathrm{d}\sigma_{ij} = h_ih_j\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_j$$

1.3.2 אלמנט נפח

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_3 = h_1h_2h_3\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2\mathrm{d}q_3$$

$$V = \iiint h_1h_2h_3\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2\mathrm{d}q_3$$

בהמשך נדון מה זה h_1, h_2, h_3.

פרק 2

פונקציות מוכללות - Generalized Functions

לפני דיראק השימוש בפונקציות היה רק כמו הפונקציות הרגילות שאנו מכירים. אבל הדבר אינו מספיק לפיסיקה וזה גרר פיתוח של פונקציות מוכללות בניהן פונקציית הδ של דיראק ופונקציית המדרגה.

2.1 פונקציית הדלתא של דיראק

2.1.1 פונקציות יוצרות

נתבונן בפונקציה הקלאסית $\varphi_1\left(x\right)$ עם הדרישות הבאות:

1. תמיד חיובית: $\varphi_1\left(x\right)>0$
2. זוגית: $\varphi_1\left(-x\right)=\varphi_1\left(x\right)$
3. נקודת מקסימום אחת בלבד ב $x=0$
4. $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi_1\left(x\right)\mathrm{d}x=1$

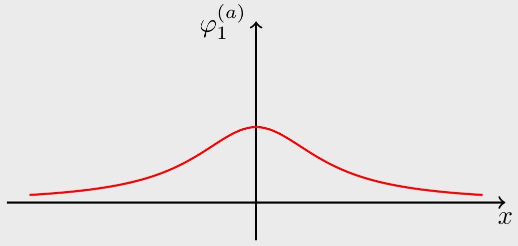
קיימות אינסוף פונקציות כאלה, לדוגמה:

✎ **דוגמה 2.1.1 naizneroL :**

$$\varphi_1^{(a)}=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{1+x^2}$$

נשים לב כי:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi_1^{(a)}\left(x\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{1}{\pi}\arctan x\Big|_{-\infty}^{\infty}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=1$$



איור 2.1: Lorenzian

דוגמה 2.1.2 Gaussian :

$$\varphi_1^{(b)}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$$

נרצה לחשב את האינטגרל:

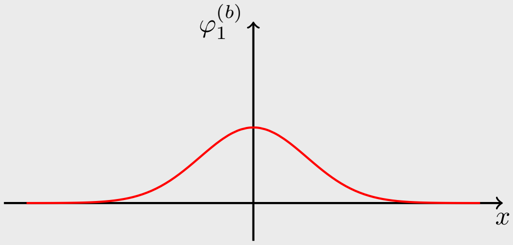
$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1^{(b)}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = I$$

נרצה להתבונן ב I^2:

$$I^2 = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\mathrm{d}y = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

נראה מוזר, למה עברנו מאינטגרל אחד לאינטגרל כפול? כי כעת אנו יכולים לנצל סימטריה של הבעיה, ולעבור לקואורדינטות פולאריות ונקבל:

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi = \frac{2\pi}{\pi}\int_{0}^{\infty} \rho e^{-\rho^2}\mathrm{d}\rho = -\int_{0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(e^{-\rho^2}\right)\mathrm{d}\rho = 1$$



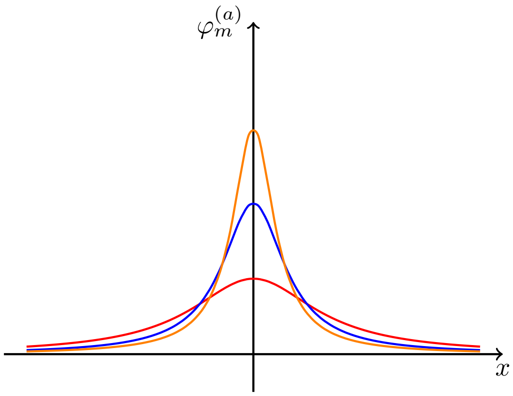
איור 2.2: Gaussian

נגדיר כעת פונקציה $\varphi_m(x)$ באופן הבא:

$$\varphi_m(x) = m\varphi_1(mx)$$

כאשר $m > 0$. כלומר עבור הLorenzian נקבל:

$$\varphi_m^{(a)}(x) = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{m}{1+m^2x^2}$$



איור 2.3: פונקציית Lorenzian עם $m=1$ (באדום), $m=2$ (כחול) ו $m=3$ (בכתום)

נחשב את האינטגרל של $\varphi_m^{(a)}(x)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_m(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}m\varphi_1(mx)\,\mathrm{d}x\underbrace{=}_{\substack{z=mx\\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=m\Rightarrow \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}z}{m}}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_1(z)\,\mathrm{d}z=1$$

נשאיף את $m\to\infty$ נקבל אפס עבור כל נקודה $x\neq 0$ ובו $x=0$ נקבל ∞. כאשר השטח מתחת לפונקציה יהיה עדיין 1 כפי שאנו רואים. וזוהי ההגדרה ה"ילדותית" לדלתא של דיראק ($\delta(x)$).

הערה 2.1.3 כדי שאינטגרל לא אמיתי יתכנס בתחום $(-\infty,\infty)$ אזי נדרש כי:

$$\varphi_1(x)\propto\frac{\text{const}}{x^{\alpha}},\ \alpha>1$$

או לחילופין פונקציות שיורדות "מהר" יותר, כגון e^{-x^2}.

נרצה לראות כי:

$$\forall x\neq 0\ \lim_{m\to\infty}\varphi_m(x)=0$$

נשים לב כי:

$$m=\varphi_1(mx)\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}\frac{\text{const}}{(mx)^{\alpha}}\cdot m\propto m^{1-\alpha}$$

נשים לב דרשנו ש$\alpha>1$ ולכן:

$$\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}0$$

הערה 2.1.4 במקרה של פונקציות שיורדות מהר יותר נעשה "סנדויץ'" בין פונקציה פרופורציונית ל $\frac{1}{x^{\alpha}}$ובין פונקציית האפס, ונקבל שגם במקרים כאלה (כגון e^{-x^2}) נקבל שעבור כל $x\neq 0$ $\varphi_m(x)=0$.

עבור $x=0$ נקבל:

$$\varphi_m(0)=m\underbrace{\varphi_1(0)}_{\text{const}}\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}\infty$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_m(x)\,\mathrm{d}x=1$$

נגדיר:

$$\delta(x) = \lim_{m\to\infty} \varphi_m(x)$$

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq 0 \\ \infty & x = 0 \end{cases}$$

ומתקיים:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

2.1.2 תכונות הפונקציה δ

.1

$$\delta(x-a) = \begin{cases} 0 & x \neq a \\ +\infty & x = a \end{cases}$$

וכמו כן:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z)\,\mathrm{d}z = 1$$

.2

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \delta(x-a) f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \delta(x-a) f(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$f(a)\int_{a-\varepsilon}^{a+\varepsilon} \delta(x-a)\,\mathrm{d}x = f(a)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\,\mathrm{d}x = f(a)$$

.3

$$a \neq 0 \quad \delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$$

הוכחה: נרצה לראות כי $|a|\,\delta(ax) = \delta(x)$:

ראשית נשים לב כי עבור $x \neq 0$ נקבל כי $\delta(ax) = 0$ ועבור $x = 0$ נקבל $\delta(ax) = +\infty$.

נרצה להראות כי:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |a|\,\delta(ax)\,\mathrm{d}x = 1$$

עבור $a > 0$ נקבל:

$$\int_{-\infty}^{\infty} a\delta(ax)\,\mathrm{d}x \underbrace{=}_{\substack{ax = z \\ a\mathrm{d}x = \mathrm{d}z}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(z)\,\mathrm{d}z = 1$$

עבור $a<0$ נקבל:

$$\int_{-\infty}^{\infty}-a\delta\left(ax\right)\mathrm{d}x\underbrace{=}_{\substack{ax=z\\ a\mathrm{d}x=\mathrm{d}z}}-\int_{+\infty}^{-\infty}\delta\left(z\right)\mathrm{d}z=\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(z\right)\mathrm{d}z=1$$

כנדרש. ■

4. $\delta\left[\varphi\left(x\right)\right]$ כאשר $\varphi\left(x_0\right)=0$ גזירה בנקודה x_0ומתקיים: $\varphi'\left(x_0\right)\neq0$. נבצע קירוב טיילור ל $\varphi\left(x\right)$ סביב $\varphi\left(x_0\right)$:

$$\varphi\left(x\right)=\underbrace{\varphi\left(x_0\right)}_{=0}+\varphi'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)+\underbrace{\frac{1}{2!}\varphi''\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)^2}_{\text{מאוד קטן ביחס לקודם, כי אנו מסתכלים על סביבת }\varepsilon}\to0+\ldots$$

ולכן בקירוב טוב:

$$\delta\left[\varphi\left(x\right)\right]=\delta\left[\varphi'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)\right]=\frac{1}{\left|\varphi'\left(x_0\right)\right|}\delta\left(x-x_0\right)$$

הערה 2.1.5 מה קורה כאשר יש יותר מנקודת התאפסות אחת של $\varphi\left(x\right)$? (כגון $\sin/\cos$) נקבל:

$$\delta\left[\varphi\left(x\right)\right]=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\left|\varphi'\left(x_i\right)\right|}\delta\left(x-x_i\right)$$

כאשר x_i לכל $i=1,\ldots,N$ הן כלל נקודות ההתאפסות של $\varphi\left(x\right)$

2.1.3 נגזרת של פונקציית δ

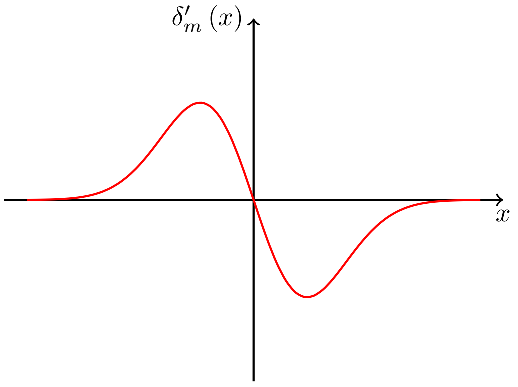
נרצה לבחון למה שווה: $\delta'\left(x\right)$. נזכור כי:

$$\delta_m\left(x\right)=\frac{m}{\sqrt{\pi}}e^{-m^2x^2}$$

נגזור את δ_m ונקבל:

$$\delta'_m\left(x\right)=-\frac{2m^3x}{\sqrt{\pi}}e^{-m^2x^2}$$

כאשר $x>0$ היא שלילית, וכאשר $x<0$ היא חיובית ולכן היא



איור 2.4: $\delta'_m\left(x\right)$

כמו כן:

$$\delta_m''(x) \sim \left(xe^{-m^2x^2}\right)' = e^{-m^2x^2} - 2xe^{-m^2x^2}m^2x$$

נדרוש:

$$e^{-m^2x^2} - 2xe^{-m^2x^2}m^2x = 0$$

נקבל כי:

$$2x^2m^2 = 1 \Rightarrow x_{\min,\max} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}m}$$

נקודות מינימום ומקסימום:

$$\delta_m'(x_{\min,\max}) = \mp\sqrt{\frac{2}{\pi e}}m^2$$

כלומר, אם נשאיף את m לאינסוף נקבל פונקציה אשר שווה אפס לכל x, אבל כאשר אנחנו מתקרבים אל האפס, אנחנו נעלה לאינסוף, ב0 נעבור דרך 0, ונרד למינוס אינסוף ונחזור לאפס (כאשר אני מגיעים מהכיוון השלילי אל הכיוון החיובי)

2.1.4 יחידות של δ

היחידות של הδ הם היחידות ההופכיות של הפרמטר. במקרה של $\delta(x)$ כאשר x הוא במטרים, היחידות של $\delta(x)$ יהיו $1/\mathrm{m}$. כלומר:

$$[\delta(x)] = \frac{1}{[x]}$$

2.1.5 במקרה רב מימדי

$$\delta(\vec{r}) = \begin{cases} \infty & \vec{r} = 0 \\ 0 & \vec{r} \neq 0 \end{cases}$$

וכמו כן מתקיים:

$$\iiint \delta(\vec{r})\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 1$$

נשים לב כי למעשה:

$$\delta(\vec{r}) = \delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)$$

כדי להוכיח זאת, צריך לחזור לפונקציות היוצרות.

אבל נשים לב כי:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty}\delta(y)\,\mathrm{d}y\int_{-\infty}^{\infty}\delta(z)\,\mathrm{d}z = 1\cdot1\cdot1 = 1$$

דוגמה 2.1.6 : בהנתן חלקיק (נקודתי) מאסיבי: $M\left(x_0,y_0,z_0\right)$ נרצה לדון בצפיפות שלו:

$$\delta\left(x,y,z\right)=M\delta\left(x-x_0\right)\delta\left(y-y_0\right)\delta\left(z-z_0\right)$$

למה שמנו שם מסה? כיוון שאם נעשה את האינגטרגל על הצפיפות בנפח נרצה לקבל את המסה:

$$\iiint\rho\left(x,y,z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=M$$

במקרה של מספר חלקיקים, $M_1,\ldots,M_N$:

$$\rho\left(x,y,z\right)=\sum_{i=1}^{N}M_i\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_i\right)$$

באופן דומה לחלוטין נוכל לדון במטענים נקודתיים:

$$\rho\left(x,y,z\right)=\sum_{i=1}^{N}q_i\delta\left(\vec{r}-\vec{r}_i\right)$$

דוגמה 2.1.7 : במקרה של כדור מוליך טעון ברדיוס R, אנו יודעים כי המטען מצטבר על המעטפת בעובי אפס (בקירוב)
בגלל שמדובר במערכת כדורית, קל יהיה להשתמש בקואורדינטות כדוריות. ולכן צפיפות המטען תהא:

$$\rho\left(r,\theta,\varphi\right)=\boxed{A}\delta\left(r-R\right)$$

נשים לב כי אין חשיבות ל θ ולφ משיקולי סימטריה של המערכת.
אבל מה המקדם A של הδ? כלומר מהיא האמפליטודה? נדרוש כי:

$$\int\rho\left(r,\theta,\varphi\right)\mathrm{d}V=Q\Rightarrow4\pi\int_0^\infty\rho\left(r\right)r^2\mathrm{d}r=4\pi A\int_0^\infty\delta\left(r-R\right)r^2\mathrm{d}r=4\pi AR^2=Q\Rightarrow A=\frac{Q}{4\pi R^2}$$

ולכן צפיפות המטען במקרה זה היא:

$$\rho\left(r,\theta\varphi\right)=\frac{Q}{4\pi R^2}\delta\left(r-R\right)$$

הערה 2.1.8 נשים לב כי ההוצאה של הA מהאינטגרל היא חוקית כיוון שנניח ש A הוא פונקציה של r אז:

$$\rho\left(r,\theta,\varphi\right)=A\left(r\right)\delta\left(r-R\right)\equiv A\left(R\right)\delta\left(r-R\right)$$

וזהו למעשה excess of accuracy (דיוק יותר) כיוון שA רלוונטי רק כאשר $r=R$ כיוון שהוא מתאפס בכל מקרה אחר.

2.1.6 אינטגרל של δ'

נרצה לחשב אינטגרלים בסגנון:

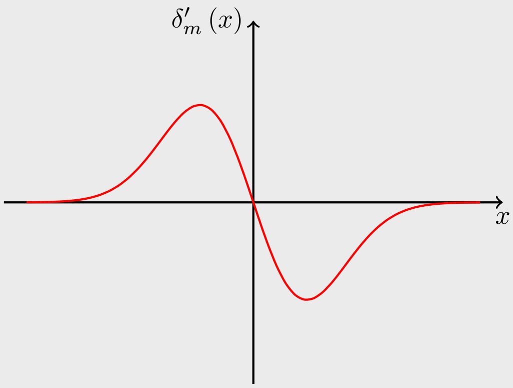
$$\int_{-\infty}^{\infty}f\left(x\right)\delta'\left(x-a\right)\mathrm{d}x$$

נשים לב כי:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta'(x-a)\,\mathrm{d}x = \underbrace{f(x)\,\delta(x-a)\big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\,f'(x)\,\mathrm{d}x = -f'(a)$$

(השיוויון לאפס הוא במקרה בו: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=0$)

דוגמה 2.1.9 דיפול: נשים לב כי δ מתארת מונופול. נרצה לראות מה קורה בדיפול.
נתבונן בδ'_m נזכור כי הגרף נראה כך:



איור 2.5: גרף של: $\delta'_m(x)$

נשים לב כי זו פונקציה אי זוגית, וככל ש m גדל אזי הפיקים עולים לאינסוף (או יורדים למינוס אינסוף בהתאמה) וכמו כן מתקרבים זה לזה.
כלומר באופן דומה לדיפול. כלומר הדיפור שלנו ניתן לתיאור בעזרת:

$$\rho(x) = -p_0\delta'(x)$$

כאשר $\delta' = \lim_{m\to\infty}\delta'_m$. נשים לב כי בסביבת 0, δ' עולה לאינסוף עובר דרך אפס ויורד למינוס אינסוף.
הדבר זהה לדיפול כאשר המרחק בין המטענים שואף לאפס. נשים לב כי בגלל ש δ' זוגית אזי:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

לכן נרצה לבחון את:

$$\int_{-\infty}^{\infty}x\delta'(x)\,\mathrm{d}x$$

מומנט הדיפול הוא:

$$P = \int_{-\infty}^{\infty}\vec{r}\rho(\vec{r})\,\mathrm{d}V$$

ובמקרה החד מימדי:

$$P = \int_{-\infty}^{\infty}x\rho(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{\infty}xp_0\delta'(x)\,\mathrm{d}x = -p_0(-1) = p_0$$

כלומר:

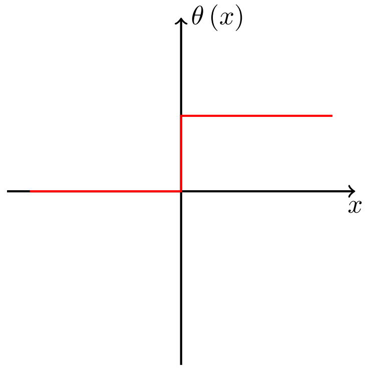
$$\rho(x) = -p_0\rho'(x)$$

זו למעשה צפיפות מטען של דיפול!

2.2 פונקציית המדרגה - Heaviside

פונקציית Heaviside (פונקציית המדרגה) היא פונקצייה המוגדרת באופן הבא:

$$\theta(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$



איור 2.6: פונקציית הHeaviside

נשים לב כי פונקציית Heaviside היא למעשה פונקצייה קדומה של δ כלומר:

$$\theta(x) = \int_{-\infty}^{x} \delta(x')\,\mathrm{d}x'$$

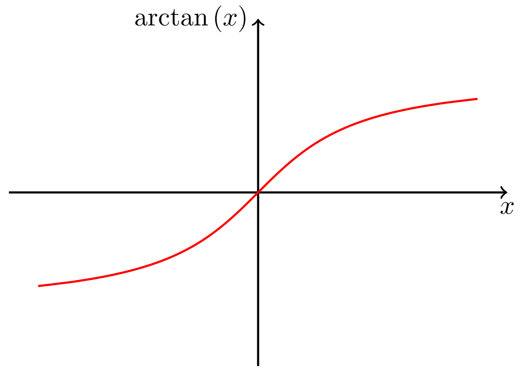
כי אז אנו מקבלים:

1. לכל $x < 0$: $\theta(x) = 0$
2. לכל $x > 0$: $\theta(x) = 1$

נסתכל על אחת מהפונקציות היוצרות של δ:

$$\delta_m(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{m}{1 + m^2 x^2} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \delta(x)$$

$$\int_{-\infty}^{x} \delta_m(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{x} \frac{m\mathrm{d}x}{1 + m^2 x^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{mx} \frac{\mathrm{d}z}{1 + z^2} = \frac{1}{\pi} \arctan(z)\Big|_{-\infty}^{mx} =$$
$$\frac{1}{\pi}\left[\arctan(mx) - \arctan(-\infty)\right] = \frac{1}{\pi}\left[\arctan(mx) + \frac{\pi}{2}\right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan(mx)$$



איור 2.7: Arctan

ככל ש־m גדול יותר הגרף יגיע מהר יותר לאסימפטוטה, ולכן כאשר $m \to \infty$ נקבל את פונקציית המדרגה. כלומר במקרה זה arctan הוא פונקצייה יוצרת של פונקציית θ.

נרצה לבחון את הפונקציה הקדומה של פונקציית המדרגה:

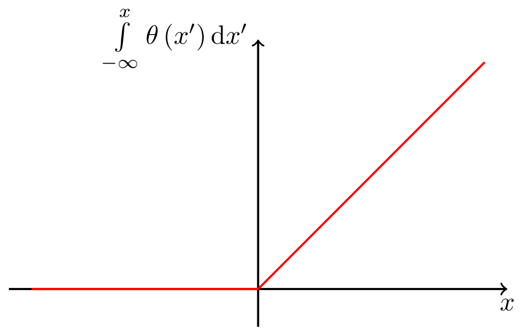
1. עבור $x < 0$

$$\int_{-\infty}^{x} \theta(x')\,\mathrm{d}x' = 0$$

2. עבור $x > 0$:

$$\int_{-\infty}^{x} \theta(x')\,\mathrm{d}x' = \int_{-\infty}^{0} \theta(x')\,\mathrm{d}x' + \int_{0}^{x} \theta(x')\,\mathrm{d}x' = \int_{0}^{x} 1\mathrm{d}x' = x$$

כלומר קיבלנו:



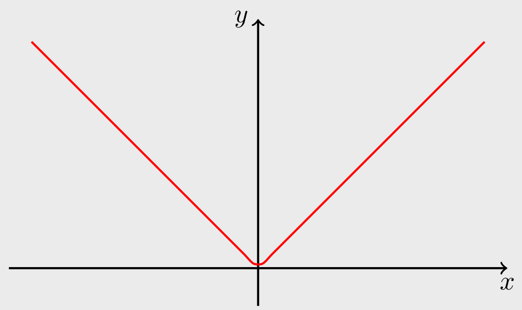
איור 2.8: $\int_{-\infty}^{x} \theta(x')\,\mathrm{d}x'$

נרצה לבחון את הנגזרת של פונקציית המדרגה, נבחין כי:

$$\theta'(x) = \delta(x)$$

2.3 גזירות של פונקציות לא רציפות

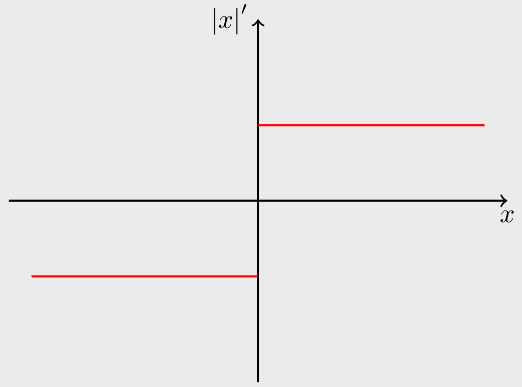
דוגמה 2.3.1 : נתבונן בפונקציה הפונקציה $y=|x|$



איור 2.9: $y=|x|$

נגזור ונקבל:

$$|x|'=\begin{cases}x'=1 & x>0\\ (-x)'=-1 & x<0\end{cases}$$



איור 2.10: גרף של: $|x|'$

נשים לב כי למעשה:

$$|x|'=2\theta(x)-1$$

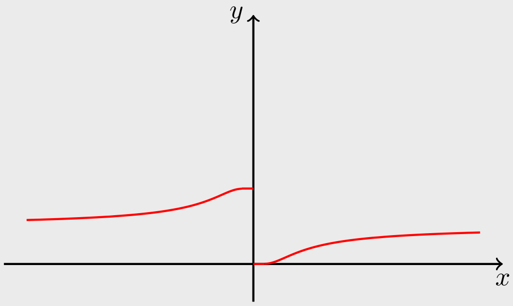
נרצה לגזור אותה שוב, ונקבל:

$$|x|''=(2\theta(x)-1)'=2\theta'(x)=2\delta(x)$$

דוגמה 2.3.2 : הפונקציה $y=\frac{1}{1+e^{1/x}}$
נרצה לבחון למה שווה y'.
אם היינו הולכים בגישה הטבעית שלנו לגזירה נקבל:

$$y'=\frac{1}{\left(1+e^{1/x}\right)^2}\cdot e^{1/x}\cdot\frac{1}{x^2}$$

אבל זה לא לגמרי נכון, כיוון שאנו לא בודקים מה קורה כאשר $x=0$ (נקודת אי הרציפות) נתבונן בפונקציה ונראה שהיא נראית כך:



איור 2.11: $y=\frac{1}{1+e^{1/x}}$

נשים לב כי כאשר $\lim_{x\to0^+}y=0$ ואילו $\lim_{x\to0^-}y=1$ ולכן:

$$y'=\frac{1}{\left(1+e^{1/x}\right)^2}\cdot e^{1/x}\cdot\frac{1}{x^2}-\delta(x)$$

פרק 3

תורת שטורם ליוביל - Sturm-Liouville

3.1 מבוא

3.1.1 משוואות דיפרנציאליות רגילות

פונקציה מהסגנון: $F(x,y,y')=0$ נקראת משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון (בגלל שהנגזרת היא מדרגה ראשונה, כיוון שהיא תלויה גם ב x גם בy וגם בנגזרת של y לפי x.

פונקציה מהסגנון: $F(x,y,y',y'')=0$ היא כבר משוואה דיפרנציאלית מסדר שני

דוגמה 3.1.1 :

$$\begin{aligned} x+y+y'+\sin(y'') &= 0 \\ xy+y'y'' &= 0 \\ xy+y'' &= 0 \end{aligned}$$

משוואות אלה הן משוואות דיפרנציאליות רגילות (Ordinary differential equations) כדי להבדיל אותן ממשוואות דיפרנציאליות עם גזירות חלקיות.

במשוואה מסדר ראשון, אנחנו צריכים להוסיף קבוע שרירותי אחד. בסדר שני, אנחנו צריכים להוסיף שניים. (למעשה סדר המשוואה קובע את מימד מרחב הפתרונות).

דוגמה 3.1.2 : משוואה מהסגנון $x+y+y'+y''=0$ היא יחסית פשוטה, מכיוון שהיא משוואה לינארית:

$$y''+y'+y=-x$$

וכמו כן, היא אי הומוגנית, כיוון שקיימת תלות בx. הדרך לפתור את המשוואה היא לפתור את הבעיה ההומוגנית שיכלול שני קבועים. לאחר מכן ננחש פתרון פרטי y_p ונקבל כי הפתרון הכללי של המשוואה יהיה:

$$y_{gen}\left(x\right)=y_{hom}\left(x,C_1,C_2\right)+y_p\left(x\right)$$

כיוון שזוהי משוואה לינארית אזי הקבועים C_1,C_2 נכנסים לפתרון ההומוגני באופן הבא:

$$y_{hom}\left(x,C_1,C_2\right)=C_1Y_1\left(x\right)+C_2Y_2\left(x\right)$$

כאשר Y_1,Y_2 הם בלתי תלויים ופותרים את המשוואה ההומוגנית כל אחד לחוד, נשים לב שכיוון והמשוואה לינארית אזי כל שילוב בניהם יפתור את המשוואה גם כן.
במקרה זה קל לראות כי הפתרון הפרטי הוא:

$$y_p=-x+1$$

$$\begin{aligned}\left[y_{hom}+y_p\right]''+\left[y_{hom}+y_p\right]'+\left[y_{hom}+y_p\right] &= -x\\ \underbrace{\left[y''_{hom}+y'_{hom}+y_{hom}\right]}_{0}+\underbrace{\left[y''_p+y'_p+y_p\right]}_{-x} &= -x\end{aligned}$$

במידה ונוסיף תנאי התחלה ותנאי שפה, נוכל לפתור את הקבועים של המשוואות ולקבל ביטוי יחיד.

3.1.2 בעיית תנאי התחלה - בעיית קושי

$y\left(x\right)$, אם x זה הזמן ו y היא הקואורדינטה (כלומר $y\left(x\right)$ היא איפה החלקיק נמצא כפונקציה של זמן).
לפי ניוטון, $\underbrace{f\left(y,y',t\right)}_{\text{כוח}}=\underbrace{y''}_{\text{תאוצה}}$ (כלומר הכוח השקול תלוי במיקום, במהירות ובזמן, נשים לב שחסרה מסה, אבל זה לא קריטי, נגיד שהיא בתוך f)
למשוואה זו יש אינסוף פתרונות! איך נצמצם אותה לפתרון בודד? אם נוסיף מידע על תנאי ההתחלה כלומר: באיזה נקודה אנחנו מתחילים, ובאיזה מהירות אנו מתחילים כלומר: y_0,y'_0 (חשוב שיהיה)

3.1.3 בעיית תנאי שפה

בהינתן פונקציה:

$$y''\left(x\right)+p\left(x\right)y'\left(x\right)+q\left(x\right)y\left(x\right)=f\left(x\right),\quad a\le x\le b$$

תנאי השפה הם תנאים בסגנון של: $y\left(a\right)=\alpha_1,\quad y\left(b\right)=\alpha_2$. כלומר, אנו יודעים תנאים ב2 נקודות שונות.
הפתרון הכללי הוא:

$$y_{gen}\left(x\right)=C_1y_1\left(x\right)+C_2y_2\left(x\right)+Y\left(x\right)$$

כאשר y_1,y_2 הם פתרונות בלתי תלויים וY הוא פתרון פרטי.

$$y\left(a\right)=C_1y_1\left(a\right)+C_2y_2\left(a\right)+Y\left(a\right)=\alpha_1$$

כמו כן, נתון לנו גם:

$$y\left(b\right)=C_1y_1\left(b\right)+C_2y_2\left(b\right)+Y\left(b\right)=\alpha_2$$

כלומר קיבלנו סט של משוואות אלגבראיות:

$$\begin{cases} y_1(a)\,C_1 + y_2(a)\,C_2 = \alpha_1 - Y(a) \\ y_1(b)\,C_1 + y_2(b)\,C_2 = \alpha_2 - Y(b) \end{cases}$$

נשים לב כי ייתכן שיהיה פתרון יחיד, אין פתרונות כלל, או אינסוף פתרונות למשוואה הדיפרנציאלית הנ"ל.
הדבר תלוי בדטרמיננטה של אגף שמאל. אם:

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1(a) & y_2(a) \\ y_1(b) & y_2(b) \end{vmatrix} \neq 0$$

אזי למשוואה יש פתרון יחיד.
אם הדטרמיננה המקורית היא אפס אז הדטרמיננטה המשנית היא:

$$\Delta_{C_1} = \begin{vmatrix} \alpha_1 - Y(a) & y_2(a) \\ \alpha_2 - Y(b) & y_2(b) \end{vmatrix}$$

אם $\Delta_{C_1} = 0$ אז יש מספר אינסופי של פתרונות. במידה והיא $\Delta_{C_1} \neq 0$ אזי אין פתרונות כלל למערכת.

✎ **דוגמה 3.1.3 :**

$$y''(x)+\lambda y(x)=f(x)$$

כאשר $0\leq x\leq l$.

$$y(0)=\alpha_1,\quad y(l)=\alpha_2$$

ראשית נפתור את המשוואה ההומוגנית:

$$y''(x)+\lambda y(x)=0\Rightarrow y''(x)=-\lambda y(x)$$

אם $\lambda>0$:

$$y_{gen}(x)=C_1\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right)+C_2\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right)$$

כיוון שננחש $y=e^{\gamma x}$

$$y''+\lambda y=0\Rightarrow y=e^{\gamma x}\quad \gamma^2+\lambda=0\Rightarrow\gamma=\pm\sqrt{\lambda}i$$

כלומר קיבלנו משוואות סינוס קוסינוס. אבל מראש יכולנו לנחש סינוס קוסינוס באופן מושכל. נרצה למצוא את הקבועים C_1,C_2:

$$C_1\cos\left(\sqrt{\lambda}\cdot 0\right)+C_2\sin\left(\sqrt{\lambda}\cdot 0\right)+Y(0)=\alpha_1\Rightarrow C_1+Y(0)=\alpha_1$$

בנוסף:

$$C_1\cos\left(\sqrt{\lambda}\cdot l\right)+C_2\sin\left(\sqrt{\lambda}\cdot l\right)+Y(l)=\alpha_2$$

$$C_2\sin\left(\sqrt{\lambda}\cdot l\right)=\alpha_2-Y(l)-(\alpha_1-Y(0))\cos\left(\sqrt{\lambda}\cdot l\right)$$

$$\sin\left(\sqrt{\lambda}\cdot l\right)\neq 0$$

כלומר:

$$\sqrt{\lambda}\cdot l\neq\pi n$$

1. $\lambda\neq\frac{\pi^2n^2}{l^2}$ - קיים פתרון.
2. $\lambda=\frac{\pi^2n^2}{l^2}$ - לא קיים פתרון (או אינסוף פתרונות).

דוגמה 3.1.4 : המשוואה:

$$y''(x) + \lambda y(x) = 0$$

כאשר:

$$y(0) = 0,\ y(l) = 0$$

מוגנית נקבל כי הפתרונות דווקא בדיוק ההפך! כאשר $\lambda_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2}$.
נקבל כי הפתרונות האפשריים הם:

$$y_n = A\sin\left(\sqrt{\lambda_n}x\right) = A_n \sin\frac{\pi n x}{l}$$

במקרה בו $\lambda < 0$ המשוואה היא: $\lambda = -\gamma^2,\ \gamma > 0$.

$$\begin{aligned} y'' - \gamma^2 y &= 0 \\ y_{hen} &= C_1 e^{\gamma x} + C_2 e^{\gamma x} \end{aligned}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1(l) & y_2(l) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\gamma l} & e^{-\gamma l} \end{vmatrix} = e^{-\gamma l} - e^{\gamma l} = -2\sinh(\gamma l) \neq 0$$

כיוון ש $\gamma > 0$ ולכן יש רק פתרון טריוויאלי, ואין פתרונות אחרים.
במקרה בו $\lambda = 0$ נקבל משוואה טריוויאלית:

$$y'' = 0$$

הפתרון הכללי הוא:

$$y = C_1 x + C_2$$

לכן נקבל:

$$\begin{aligned} y(0) &= C_2 = 0 \\ y(l) &= C_1 l = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \end{aligned}$$

לכן $C_1 = 0$

22/11/2011

3.2 אופרטור דיפרנציאלי לינארי - Linear differential operator

אופרטור דיפרנציאלי לינארי הוא ביטוי מהסוג הבא:

$$\hat{L}u(x) = p_0(x)\frac{\mathrm{d}^2 u(x)}{\mathrm{d}x^2} + p_1(x)\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} + p_z(x)u(x)$$

כלומר:

$$\hat{L} = p_0(x)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + p_1(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + p_2(x)$$

דוגמה 3.2.1 : במקרה בו: $p_0 = p_2 = 1$ ו: $p_1 = 0$ נקבל את המקרה:

$$u'' + u = 0$$

הגדרה 3.2.2 אופרטור צמוד - Adjoint operator:

$$\overline{L}u=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(p_0u\right)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p_1u\right)+p_2u$$

נחפש מקרים בהם האופרטור צמוד לעצמו, כלומר:

$$\overline{L}u=Lu$$

כלומר:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(p_0u\right)-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p_1u\right)+p_2u=p_0\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}u+p_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u+p_2u$$

נשים לב כי:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p_0u=p_0'u+p_0u'$$

$$\overline{L}u=p_0''u+2p_0'u'+p_0u''-p_1'u-p_1u'+p_2u=p_0u''+\left(2p_0'-p_1\right)u'+\left(p_0''-p_1'+p_2\right)u$$

כלומר על מנת ש $\overline{L}u=Lu$ נדרש כי:

$$\begin{cases}2p_0'-p_1=p_1\\ p_0''-p_1'+p_2=p_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}p_1=p_0'\\ p_0''=p_1'\end{cases}$$

כלומר אופרטור צמוד לעצמו (Selft adjoint) הוא בהכרח מהמבנה:

$$\overline{L}u=Lu=p_0\left(x\right)u''+p_0'u'+p_2u=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p_0\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)+p_2u$$

או לחילופין בכתיב קצת יותר נוח:

$$\overline{L}u=Lu=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p\left(x\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right]+q\left(x\right)u\left(x\right)$$

הגדרה 3.2.3 אופרטור הרמיטי - Hermitian operator: האופרטור $\hat{L}$ נקרא הרמיטי אם:

$$\int_a^b u^*\left(x\right)\hat{L}v\left(x\right)\mathrm{d}x=\int_a^b v\left(x\right)\hat{L}u^*\left(x\right)\mathrm{d}x$$

הערה 3.2.4 $u^*\left(x\right)$ מחזיר את הצמוד של $u\left(x\right)$. עבור פונקציה ממשית אז $u=u^*\left(x\right)$.

נראה כי אם האופרטור צמוד לעצמו, אזי הוא הרמיטי:

$$\begin{aligned}\int_a^b u^*Lv\mathrm{d}x &= \int_a^b u^*\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x+\int_a^b qu^*v\mathrm{d}x=u^*pv'\Big|_a^b+\int_a^b\left(qu^*v-p\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}u^*}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x\\ \int_a^b vLu^*\mathrm{d}x &= \int_a^b v\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}u^*}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x+\int_a^b qu^*v\mathrm{d}x=vp\frac{\mathrm{d}u^*}{\mathrm{d}x}\Big|_a^b+\int_a^b\left(qu^*v-p\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}u^*}{\mathrm{d}x}\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

נשים לב כי:

$$\int_a^b vLu^*\mathrm{d}x=\int_a^b u^*Lv\mathrm{d}x$$

אם:

$$u^*pv'|_a^b = vp\frac{\mathrm{d}u^*}{\mathrm{d}x}\Big|_a^b$$

תנאי שפה לדוגמה הם: v, u^* מתאפסים בנקודות קצה, או לחילופין הנגזרות שלהן בx במתאפסות בנקודות קצה $u^* = v$, ועוד...

נניח כי L הוא אופרטור הרמיטי. נתבונן בביטוי:

$$Lu(x) + \lambda w(x)u(x) = 0$$

(במקרה הפשוט $w(x) = 1$, אבל אנו נדון במקרה הכללי לפחות בשלב זה. נגביל בהמשך)

קיימת פונקצייה: $u_\lambda(x)$ אשר מתאימה לערך של λ

דוגמה 3.2.5 :

$$\begin{cases} u''(x) + \lambda u(x) = 0 \\ u(x=0) = 0 \\ u(x=L) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \\ p(x) = 1 \\ q(x) = 0 \\ \omega(x) = 1 \end{cases}$$

נניח כי L הרמיטי וצמוד לעצמו (קיים דרך להפוך אותו לצמוד לעצמו, נלמד בהמשך). ברור כי $u = 0$ מקיים את המשוואה, זהו הפתרון הטריוויאלי.

האם קיימים פתרונות לא טריוויאלים?

3.3 משפט שטורם ליוביל

משפט 3.3.1

Sturm-Liouville

1. כל הערכים העצמיים של הבעיה הנ"ל הם ממשיים (כלומר לא מרוכבים)
2. כל הפונקציות העצמיות הן אורתוגונליות
3. הפונקציות העצמיות מהוות קבוצה שלמה

ראשית נבין מה המשמעות של פונקציות אורתוגונליות, נזכור כי וקטורים נקראים אם אורתוגונלים אם המכפלה הפנימית שלהם שווה לאפס. נרצה להגדיר מכפלה פנימית עבור פונקציות במקרה זה

הגדרה 3.3.2 מכפלה סקלרית - מכפלה פנימית (Scalar Product - Inner Product): במקרה זה, המכפלה הפנימית של פונקציות u_i, u_j היא:

$$u_i \cdot u_j = \int_a^b u_i^*(x)\, u_j(x)\, w(x)\, \mathrm{d}x$$

התכונה של קבוצה שלמה היא ש: $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i u_i(x)$. כלומר כל פונקציה (עד כדי נקודות אי רציפות וכו') ניתנות ליצוג כסכום של הפונקציות העצמיות. **הוכחה:**

1. כעת נקח שתי פונקציות עצמיות (לא בהכרח שונות) u_i, u_j הן פונצקיות עצמיות. נניח ש L אופרטור ממשי. u_i פונקציה עצמית לכן:

$$Lu_i + \lambda_i w u_i = 0$$

באופן דומה גם עבור u_j, נביט בצמוד לביטוי ונקבל:

$$Lu_j^* + \lambda_j^* w u_j^* = 0$$

נכפול את המשוואה הראשונה ב u_j^* ואת השניה ב u_i:

$$\begin{aligned} u_j^* L u_i + \lambda_i w u_i u_j^* &= 0 \\ u_i L u_j^* + \lambda_j^* w u_i u_j^* &= 0 \end{aligned}$$

נבצע אינטגרציה ל2 המשוואות ונקבל:

$$\begin{cases} \int_a^b u_j^* L u_i \mathrm{d}x + \lambda_i \int_a^b w u_i u_j^* \mathrm{d}x = 0 \\ \int_a^b u_i L u_j^* \mathrm{d}x + \lambda_j^* \int_a^b w u_i u_j^* \mathrm{d}x = 0 \end{cases}$$

נפחית את המשוואת אחת מהשניה ונקבל:

$$\int_a^b u_j^* L u_i \mathrm{d}x - \int_a^b u_i L u_j^* \mathrm{d}x + \left(\lambda_i - \lambda_j^*\right) \int_a^b w u_i u_j^* \mathrm{d}x = 0$$

אבל זהו אופרטור הרמיטי ולכן $\int_a^b u_j^* L u_i \mathrm{d}x = \int_a^b u_i L u_j^* \mathrm{d}x$ כלומר:

$$\left(\lambda_i - \lambda_j^*\right) \int_a^b w u_i u_j^* \mathrm{d}x = 0$$

במידה ו $i = j$ נקבל:

$$\left(\lambda_i - \lambda_i^*\right) \int_a^b w \left|u_i\right|^2 \mathrm{d}x = 0$$

אבל נשים לב שהביטוי מתאפס רק עבור $u_i = 0$ (פתרון טריוויאלי) או: $\left(\lambda_i - \lambda_i^*\right)$ ולכן הערכים העצמיים בהכרח ממשיים.

2. במקרה ש $i \neq j$ קיבלנו:

$$\left(\lambda_i - \lambda_j\right) \int_a^b w u_i u_j^* \mathrm{d}x = 0$$

נניח גם כי $\lambda_i \neq \lambda_j$ אז נקבל כי:

$$\int_a^b w u_i u_j^* \mathrm{d}x = 0 \Rightarrow u_i \perp u_j$$

3. נניח כי אוסף של הוקטורים העצמיים הוא דיסקרטי נשים לב שניתן לייצג פונקציה f במרחב הנ"ל באופן הבא:

$$f\left(x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n\left(x\right)$$

מסעיפים קודמים:

$$L u_n\left(x\right) + \lambda_n w\left(x\right) u_n\left(x\right) = 0$$

נבצע מכפלה פנימית של שני אגפים עם הפונקציה העצמית u_m:

$$u_m \cdot f\left(x\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_m \cdot u_n$$

נזכור כי הגדרת המכפלה הפנימית היא:

$$u_i \cdot u_j = \int_a^b u_i^* u_j w \mathrm{d}x$$

אבל ראינו כי הפונקציות העצמיות הן אורתוגונליות לכן לכל $i \neq j$ נקבל כי המכפלה הפנימית שווה לאפס כלומר:

$$u_i \cdot u_j \sim \delta_{i,j}$$

$$j = i \Rightarrow u_i \cdot u_i = \int_a^b u_i u_i^* w \mathrm{d}x = \int_a^b |u_i|^2 w \mathrm{d}x = A_i$$

נסמן:

$$\tilde{u_i} = \frac{u_i}{\sqrt{A_i}}$$

$$\tilde{u_i} \cdot \tilde{u_i} = \frac{1}{\sqrt{A_i}} \cdot \frac{1}{\sqrt{A_i}} u_i \cdot u_i = \frac{1}{A_i} A_i = 1$$

(כלומר הפכנו את הבסיס לאורתונורמלי).
נחזור להתבונן ב:

$$u_m \cdot f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_m \cdot u_n$$

נניח כי הבסיס u_i כבר אורתונורמלי (אם לא, אז נבצע עליו גראם שמידט ונבחן אותו שוב) נקבל כי:

$$u_m \cdot f(x) = a_m$$

לכן קיבלנו כי מקדמי הפרישה שלנו הם:

$$a_n = u_n \cdot f(x)$$

כלומר:

$$a_n = \int_a^b u_n^* f(x) w(x) \mathrm{d}x$$

■

נתבונן באופרטור:

$$Lu = p_0(x) \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} + p_1(x) \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + p_2(x) u$$

נדרוש שהוא לא יהיה צמוד לעצמו, כלומר: $p_0' \neq p_1(x)$.
נגדיר אופרטור חדש:

$$\tilde{L}u = \frac{\varphi(x)}{p_0} Lu = \varphi(x) u'' + \frac{\varphi(x) p_1(x)}{p_0(x)} u' + \frac{\varphi p_2(x)}{p_0(x)} u$$

נדרוש ש$\tilde{L}$ יהיה צמוד לעצמו כלומר:

$$\varphi'(x) = \frac{\varphi(x) p_1(x)}{p_0(x)}$$

נשים לב כי זו משוואה דיפרנציאלית של $\varphi(x)$ והיא אפילו פשוטה, ניתן לעשות הפרדת משתנים:

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\varphi} = \frac{p_1(x)}{p_0(x)}\mathrm{d}x$$

ונקבל:

$$\ln\varphi(x) = \int^{x} \frac{p_1(x')}{p_0(x')}\mathrm{d}x' + \ln C \Rightarrow \varphi(x) = \cancel{C}^{1} e^{\int^x \frac{p_1(x')}{p_0(x')}\mathrm{d}x'}$$

נבחר $C = 1$ לכן הוא לא מעניין. אבל נשים לב כי קיבלנו אופרטור חדש, נרצה לראות שהמשוואה עדיין תתקיים כלומר:

$$Lu + \lambda w u = 0$$

גם כאן נכפול את שני האגפים ב $\frac{\varphi(x)}{p_0(x)}$ ונקבל:

$$\frac{\varphi(x)}{p_0(x)}Lu + \frac{\lambda\varphi(x)w(x)}{p_0(x)}u = 0$$

נסמן $\tilde{w}(x) = \frac{\varphi(x)w(x)}{p_0(x)}$ ונקבל:

$$\tilde{L}u + \lambda\tilde{w}(x)u = 0$$

דוגמה 3.3.3 : $u''(x) + \lambda u(x) = 0$

$$u'' = \lambda u$$

הגדרה 3.3.4 :Legendre Equation

$$(1-x)^2 u'' - 2xu' + \lambda u = 0$$

מדובר במשוואה הרמטית, אבל ב2 נקודות המקדם של הנגזרת השניה מתאפס. נקודות אלו נקראות נקודות סינגולריות.

גבולות קטע אופייני לפתרון משוואה זו הם $-1, 1$ כי תאורית Sturm-Lioville לא מתמודדת עם נקודות סינגולריות בתוך הקטע. מכיוון שבקצוות יש נקודות סינגולריות, לא נוכל לדרוש תנאי שפה. הספקטרום של הבעיה:

$$\lambda = n(n+1) \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

הגדרה 3.3.5 Bessel Equation

$$x^2 u'' + xu' + \left(x^2 - \lambda^2\right)u = 0$$

נחלק את המשוואה הנ"ל ב x ונקבל:

$$xu'' + u' + \left(x - \frac{\lambda^2}{x}\right)u = 0$$

ונקבל אופרטור צמוד לעצמו.

נשים לב כי:

$$\underbrace{x^2u''+xu'+x^2u}_{Lu}-\lambda^2u$$

נסמן $w=\frac{1}{x}$ ונקבל:

$$\underbrace{xu''+u'+xu}_{\tilde{L}u}-\lambda^2\underbrace{\frac{1}{x}}_{w}u$$

3.3.1 בעיות לא הומוגניות - פונקציית גרין

נתבונן בבעיה הבאה:

$$Lu\left(x\right)-\lambda u\left(x\right)=f\left(x\right)$$

דוגמה 3.3.6 : משוואת הגלים במקרה החד מימדי היא מהצורה הבאה:

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=0$$

נרצה להבין איך מקבלים את המשוואה הנ"ל. נזכור את דוגמת המיתר מההרצאות הראשונות בגלים, חישוב הכוח מחזיר וכו'.
במידה ואנו מפעילים עליו כוחות חיצוניים, לדוגמה מזרימים בו זרם ושמים את המיתר בשדה מגנטי (אולי אף משתנה בזמן) נקבל:

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=f\left(x\right)$$

במקרים בהם יש חיכוך במערכת אז לאחר הרבה זמן, הכוח החיצוני שפועל והחיכוך יגיעו למצב סטטי ולכן ניתן יהיה להתעלם מהנגזרת לפי t ונקבל:

$$-c^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=f\left(x\right)\underset{F(x)=-\frac{f(x)}{c^2}}{\Longrightarrow}\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=F\left(x\right)$$

נרצה לחזור למקרה הכללי:

$$Lu\left(x\right)-\lambda u\left(x\right)=f\left(x\right)+\underbrace{bcs}_{\text{Boundary Conditions}}$$

נניח שמצאנו כבר פתרון הומוגני כלומר את: λ_n , $u_n\left(x\right)$ אז:

$$u\left(x\right)=\sum_n c_nu_n\left(x\right)$$

נפרוש את $f\left(x\right)$ על אותם הפונקציות:

$$f\left(x\right)=\sum_n d_nu_n\left(x\right)$$

במקרה זה אנו כבר יודעים פרטים, כיוון שאנו מכירים את f. נזכור כי: $d_n=u_n\cdot f$. (בהנחה שנרמלנו את הבסיס u_n)

$$\sum_n c_nLu_n-\lambda\sum_n c_nu_n=\sum_n d_nu_n$$

כמו כן: $Lu_n = \lambda_n u_n$, כי u_n וקטור עצמי של הטרנספורמציה. ולכן:

$$\sum_n c_n (\lambda_n - \lambda) u_n = \sum_n d_n u_n$$

ולכן נקבל כי:

$$\forall n \quad d_n = c_n (\lambda_n - \lambda) \Rightarrow \frac{d_n}{(\lambda_n - \lambda)} = c_n$$

אבל מה קורה כאשר $\lambda_n = \lambda$ עבור n כלשהו? זהו מקרה מיוחד, ולא נדון בו כרגע.

$$u(x) = \sum_n \frac{d_n}{\lambda_n - \lambda} u_n(x) = \sum_n \frac{u_n u_n \cdot f}{\lambda_n - \lambda} = \sum_n \frac{u_n(x)}{\lambda_n - \lambda} \int_a^b u_n^*(x') f(x') \mathrm{d}x' = \int_a^b G(x, x') f(x') \mathrm{d}x'$$

כאשר אנו מגדירים את G באופן הבא:

$$G(x, x') = \sum_n \frac{u_n(x) u_n^*(x')}{\lambda_n - \lambda}$$

וזו נקראת פונקציית גרין

הערה 3.3.7 השתמשנו בכך ש:

$$f \cdot g = (g \cdot f)^*$$

אבל אנו מניחים שהפונקציות העצמיות ממשיות.

✎ **דוגמה 3.3.8 :** נתבונן במקרה בו:

$$f(x) = \delta(x - x_1)$$

כאשר $a < x_!, b$

$$u(x) = \int_a^b G(x, x') \delta(x' - x_1) \mathrm{d}x' = G(x, x_1)$$

$x' \in (a, b)$,

$$f(x) = \delta(x - x') \Rightarrow u(x, x') = G(x, x')$$

לכן:

$$G(x, x') : \quad LG(x, x') - \lambda G(x, x') = \delta(x - x')$$

G מקיים תנאי שפה הומוגניים.

$$G(x', x) = [G(x, x')]^*$$

בגלל ש:

$$= \left[\sum_n \frac{u_n(x) u_n^*(x')}{\lambda_n - \lambda}\right]^* = \sum_n \frac{u_n^*(x) u_n(x')}{\lambda_n - \lambda}$$

כנדרש.

נרצה לדון במקרה בו קיים n כך ש $\lambda = \lambda_n$. נחזור כמה צעדים אחורה ונקבל:

$$c_n\left(\lambda_n-\lambda\right)=d_n \Rightarrow c_k\underbrace{\left(\lambda_k-\lambda_k\right)}_{0}=d_k \Rightarrow c_k\cdot 0=d_k$$

נשים לב כי אם $d_k \neq 0$ אזי ברור כי לא קיים c_k אשר יקיים את הפתרון. במקרים בהם $d_k = 0$ אזי ייתכן וקיים פתרון.

דוגמה 3.3.9 : נתבונן באופרטור: $\lambda=-k^2$, $L=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$

$$u''+k^2u=f(x)$$

כמו כן, תנאי השפה: $u(0)=u(l)=0$. $0<x<l$.

הערה 3.3.10 נשים לב כי האופרטור הרמיטי:

$$1\cdot u''+0\cdot u'$$

נתבונן במשוואה ההומוגנית:

$$u''+k^2u=0$$

$$u(x)=A\cos(kx)+B\sin(kx)$$

מהתנאי הראשון נקבל:

$$0=u(0)=A\cos(k\cdot 0)+B\sin(k\cdot 0)=A\Rightarrow A=0$$

ומהתנאי השני:

$$u(l)=0\Rightarrow B\sin kx=0\Rightarrow k_nl=\pi n,\ n\in\mathbb{N}$$

$$u(x)=B_n\sin\frac{\pi nx}{l},\quad n\in\mathbb{N}$$

$$u_n\cdot u_n=\int_0^l u_n^2(x)\,\mathrm{d}x=1$$

$$B_n^2\int_0^l\sin^2\frac{\pi nx}{l}\mathrm{d}x=\frac{B_n^2l}{2}=1\Rightarrow B_n=\sqrt{\frac{2}{l}}$$

$$\begin{cases}u_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi x}{l}\\ \lambda_n=-k_n^2=-\frac{\pi^2n^2}{l^2}\end{cases}\qquad n\in\mathbb{N}$$

$$G(x,x')=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x'}{l}}{k^2-\frac{\pi^2n^2}{l^2}}$$

נשים לב כי זהו ביטוי מוגדר היטב כאשר $k\neq\frac{\pi n}{l}$.

$$\frac{\mathrm{d}^2G}{\mathrm{d}x^2}+k^2G=\delta(x-x'),\quad G(x=0)=G(x=l)=0$$

$$\begin{aligned}0<x<x'\qquad & G^{>}(x)=a\sin kx\\ x'<x<l\qquad & G^{<}(x)=b\sin[k(x-l)]\end{aligned}$$

נדרוש כי:

$$G^{<}(x=x')=G^{>}(x=x')$$

נקבל שם שפיץ.

נתבונן באופרטור:

$$G(x):\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}\right]-\lambda G(x)=\delta(x-x')\,,\ a<x'<b$$

עם תנאי שפה הומוגניים (כלומר, או נגזרת או ערך הפונקציה שווה לאפס).

נניח שאנו יודעים איך לפתור את:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x)\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}\right]-\lambda G(x)=0$$

(לא בהכרח אפשרי. במידה ואנחנו לא יכולים, לא נוכל לעשות דבר)

$$G(x)=\begin{cases}C_1y_1(x) & a<x<x'\\ C_2y_2(x) & x'<x<b\end{cases}$$

נדרוש כי הפונקציות הנ"ל מקיימות את תנאי השפה. כמו כן בהכרח:

$$G^{<}(x=x')=G^{>}(x=x')$$

מכיוון שאנו גוזרים פעמיים את G, ולכן אם היא לא הייתה רציפה, היינו מקבלים נגזרת של δ, אבל אין לנו גורם כזה באגף ימין.

נבצע אינטגרל על שני האגפים

$$p(x)\left.\frac{\mathrm{d}G^{>}}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x'}-p(x)\left.\frac{\mathrm{d}G^{<}}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x'}=1$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}G^{>}}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x'}-\left.\frac{\mathrm{d}G^{<}}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x'}=\frac{1}{p(x')}$$

מהרציפות:

$$C_1y_1(x')-C_2y_2(x')=0$$

ומהביטוי הקודם:

$$C_1y_1'(x')-C_2y_2'(x')=-\frac{1}{p(x')}$$

נחשב את הדטרמיננטה הראשית:

$$\Delta=\begin{vmatrix}y_1(x') & -y_2(x')\\ y_1'(x') & -y_2'(x')\end{vmatrix}=-\left(y_1y_2'-y_1'y_2\right)=-W$$

והדטרמיננטה המשנית:

$$\begin{aligned}\Delta_{C_1}&=\begin{vmatrix}0 & -y_2\\ -\frac{1}{p(x')} & -y_2'\end{vmatrix}=-\frac{y_2(x')}{p(x')}\\ \Delta_{C_2}&=\begin{vmatrix}y_1 & 0\\ y_1' & -\frac{1}{p(x')}\end{vmatrix}=-\frac{y_1(x')}{p(x')}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}C_1&=\frac{y_2(x')}{p(x')W(x')}\\ C_2&=\frac{y_1(x')}{p(x')W(x')}\end{aligned}$$

ולכן נקבל:

$$G\left(x,x'\right)=\begin{cases}\frac{y_1(x)y_2\left(x'\right)}{p(x')W(x')} & a<x<x'\\ \frac{y_1\left(x'\right)y_2(x)}{p(x')W(x')} & x'<x<b\end{cases}$$

במבט ראשון, זה נראה כאילו אין כאן סימטריה להחלפה בין x ל־x', המונה נראה בסדר, אבל מה בנוגע למכנה? נראה כאילו יש העדפה ל־x'.

אבל נבחין כי: $p\left(x'\right)W\left(x'\right)$ הוא קבוע. נרצה לראות כי:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p\left(x\right)W\left(x\right)\right]=0$$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p\left(x\right)W\left(x\right)\right]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(py_1y_2'-py_1'y_2\right)=&\\ p'y_1y_2'+\cancel{py_1'y_2'}+py_1y_2''-p''y_1y_2-py_1''y_2-\cancel{py_1'y_2'}=&\\ y_1\left(p'y_2'+py_2''\right)-y_2\left(p'y_1'+py_1''\right)\underbrace{=}_{\text{הומוגניות}}y_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}\right)-y_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}\right)=y_1\lambda y_2-y_2\lambda y_1=0\end{aligned}$$

ולכן אפשר לכתוב:

$$G\left(x,x'\right)=\begin{cases}\frac{y_1(x)y_2\left(x'\right)}{p(a)W(a)} & a<x<x'\\ \frac{y_1\left(x'\right)y_2(x)}{p(a)W(a)} & x'<x<b\end{cases}$$

(או במקום a כל נקודה אחרת בקטע)

פרק 4

משוואות דיפרנציאליות חלקיות - PDE: Partial differential equations

בהינתן $u(x,y)$ פונקציה של 2 משתנים, ומשוואה דיפרנציאלית חלקית המתארת אותה. לדוגמה:

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

הסדר של משוואה דיפרנציאלית חלקית נקבע כמו במשוואות דיפרנציאליות רגילות, לפי סדר הנגזרת המקסימלית.
דוגמה למשוואה מסדר שני:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = D\frac{\partial u^2}{\partial x^2}$$

משוואה נוספת:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

או במקרה הלא הומוגני:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \rho(x,y,z)$$

✎ **דוגמה 4.0.11 :** המשוואה הדיפרנציאלית החלקית הכי פשוטה $u(x,y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

כלומר נקבל כי:

$$u = f(y)$$

כאשר f היא פונקציה שרירותית.

✎ **דוגמה 4.0.12 :**

$$\frac{\partial u}{\partial x} = g(x)$$

$$u(x,y) = \int_0^x g(x')\,\mathrm{d}x' + h(y)$$

4.1 משוואה כללית

נתבונן במשוואה הדיפרנציאלית הבאה:

$$A(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+B(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

נגדיר שדה וקטורי:

$$\vec{a}(x,y)=\begin{pmatrix}A(x,y)\\B(x,y)\end{pmatrix}$$

$$\vec{\nabla}u=\begin{pmatrix}\frac{\partial u}{\partial x}\\\frac{\partial u}{\partial y}\end{pmatrix}$$

ולכן:

$$\vec{a}(x,y)\cdot\vec{\nabla}u(x,y)=0$$

כלומר, הגראדיאנט והשדה הנ"ל הם ניצבים. אבל נזכור כי הגרדיאנט ניצב לקו הגובה של הפונקציה u. כלומר, וקטורי השדה שלנו, מקבילים לקווי הגובה.

נשים לב כי:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\tan\alpha=\frac{a_y(x,y)}{a_x(x,y)}$$

כלומר, קיבלנו משוואה דיפרנציאלית רגילה:

$$y'=\varphi(x,y)$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{a_x(x,y)}=\frac{\mathrm{d}y}{a_y(x,y)}$$

נקבל:

$$u_1(x,y)=C_1$$

במקרה שלנו נקבל:

$$\frac{\mathrm{d}x}{A(x,y)}=\frac{\mathrm{d}y}{B(x,y)}$$

משוואה זו נקראת משוואת הקרקטריטיקות (Characteristics equation)

כלומר, המסילות עליהן u קבועה, הן קווי השדה של $\vec{a}$.

לכן הפתרון הכללי של המשוואה:

$$u_{general}(x,y)=F\left[u_1(x,y)\right]$$

כאשר:

$$u_1(x,y)=C_1$$

ו-F היא פונקצייה כללית כלשהי. נציב אותה במשוואה הדיפרנציאלית:

$$u=F\underbrace{\left[u_1(x,y)\right]}_{u_1}$$

$$A\left(x,y\right)\cdot F'_{u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x}+B\left(x,y\right)\cdot F'_{u_1}\frac{\partial u_1}{\partial y}$$

נראה ש u_1 פתרון.

$$a_x\frac{\partial u_1}{\partial x}+a_y\frac{\partial u_1}{\partial y}\overset{?}{=}0$$

$$u_1\left(x,y\right)=C_1\Rightarrow\frac{\partial u_1}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u_1}{\partial y}\mathrm{d}y=0$$

ממשוואת הקריסטיקות:

$$\mathrm{d}y=\frac{a_y}{a_x}\mathrm{d}x$$

ולכן:

$$\mathrm{d}x\left(\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{a_y}{a_x}\right)=0\Rightarrow\frac{1}{a_x}\mathrm{d}x\left(a_x\frac{\partial u_1}{\partial x}+a_y\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)=0$$

ולכן בהכרח:

$$a_x\frac{\partial u_1}{\partial x}+a_y\frac{\partial u_1}{\partial y}=0$$

יתרה מזאת, כל פונקציה

$$u_{gen}\left(x,y\right)=F\left[u_1\left(x,y\right)\right]$$

תפתור את המשוואה:

$$a_xF'_{u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x}+a_yF'_{u_1}\frac{\partial u_1}{\partial y}=F'_{u_1}\left(a_x\frac{\partial u_1}{\partial x}+a_y\frac{\partial u_1}{\partial y}\right)=F'_{u_1}\cdot 0=0$$

✎ **דוגמה 4.1.1 :**

$$x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

ברור כי $u_1=\frac{y}{x}$ פותר את המשוואה, נשים לב כי:

$$u=F\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$xF'_{u_1}\left(-\frac{y}{x^2}\right)+yF'_{u_1}\frac{1}{x}=0$$

כלומר גם u פותר את המשוואה לכל פונקציה F גזירה.

4.1.1 שלושה מימדים

$$\vec{a}\left(x,y,z\right)\cdot\vec{\nabla}u\left(x,y,z\right)=0$$

$$\vec{a}=\left[A\left(x,y,z\right),B\left(x,y,z\right),C\left(x,y,z\right)\right]$$

$$A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}+C\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

נרצה למצוא $u(x,y,z)=?$.

$$\frac{\mathrm{d}x}{A(x,y,z)}=\frac{\mathrm{d}y}{B(x,y,z)}=\frac{\mathrm{d}z}{C(x,y,z)}$$

נשים לב כי במקרה זה יש לנו 2 משוואות

$$\begin{aligned}F_1(x,y,z)&=C_1\\F_2(x,y,z)&=C_2\end{aligned}$$

נבדוק מה קורה אם $u=F_1(x,y,z)$. נראה כי זהו פתרון פרטי (F_1 היא לא פונקצייה שרירותית, היא נמצאה כפתרון למשוואה למעלה)

F_1 הוא קבוע, לכן:

$$\mathrm{d}F_1=\frac{\partial F_1}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial F_1}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial F_1}{\partial z}\mathrm{d}z=0$$

מצד שני:

$$=\frac{\partial F_1}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial F_1}{\partial y}\frac{B}{A}\mathrm{d}x+\frac{\partial F_1}{\partial z}\frac{C}{A}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}x}{A}\left(A\frac{\partial F_1}{\partial x}+B\frac{\partial F_1}{\partial y}+C\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)=0$$

ולכן:

$$A\frac{\partial F_1}{\partial x}+B\frac{\partial F_1}{\partial y}+C\frac{\partial F_1}{\partial z}=0$$

כנדרש. ברור כי גם F_2 היא פתרון.

הערה 4.1.2

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{B(c,y,z)}{A(x,y,z)}\\\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{C(x,y,z)}{A(x,y,z)}\end{cases}$$

למעשה זו עוד דרך להסתכל על הבעיה כיוון שנקבל כי:

$$\begin{aligned}&y(x,C_1,C_2)\\&z(x,C_1,C_2)\end{aligned}$$

נשים לב כי זה שקול ל

$$\begin{aligned}F_1(x,y,z)&=C_1\\F_2(x,y,z)&=C_2\end{aligned}$$

גם כאן, לא רק F_1 לעצמה פותרת אלא גם כל:

$$u_{gen}(x,y,z)=\mathscr{F}\left[F_1(x,y,z),F_2(x,y,z)\right]$$

נשים לב כי:

$$A\frac{\partial\mathscr{F}}{\partial F_1}\frac{\partial F_1}{\partial x}+A\frac{\partial\mathscr{F}}{\partial F_2}\frac{\partial F_2}{\partial x}+B\frac{\partial\mathscr{F}}{\partial F_1}\frac{\partial F_1}{\partial y}+B\frac{\partial\mathscr{F}}{\partial F_2}\frac{\partial F_2}{\partial y}+C\frac{\partial\mathscr{F}}{\partial F_1}\frac{\partial F_1}{\partial z}+A\frac{\partial\mathscr{F}}{\partial F_2}\frac{\partial F_2}{\partial z}=$$
$$\frac{\partial\mathscr{F}}{\partial F_1}\underbrace{\left(A\frac{\partial F_1}{\partial x}+B\frac{\partial F_1}{\partial y}+C\frac{\partial F_1}{\partial z}\right)}_{=0}+\frac{\partial\mathscr{F}}{\partial F_2}\underbrace{\left(A\frac{\partial F_2}{\partial x}+B\frac{\partial F_2}{\partial y}+C\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)}_{=0}=0$$

כנדרש.

4.1.2 n מימדים

$$\sum_{i=1}^{n} X_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \frac{\partial u}{\partial x_i}=0$$

$$\frac{\mathrm{d} x_1}{X_1}=\frac{\mathrm{d} x_2}{X_2}=\ldots=\frac{\mathrm{d} x_n}{X_n}$$

למעשה זהו סט של $n-1$ משוואות דיפרנציאליות, ואם הצלחנו לפתור אותם נקבל למעשה חיתוך של $n-1$ משטחים, אשר החיתוך שלהם יתן לנו קו (במרחב n מימדי)

$$u_i\left(x_1, x_1, \ldots, x_n\right)=C_i$$

לכל $1 \leq i \leq n-1$, ולכן הפתרון הכללי הוא:

$$u_{gen}=F\left(u_1, \ldots, u_{n-1}\right)$$

4.2 בעיית קושי

נוסיף "תנאי התחלה" (או בעיית שפה, אף אחד מהמינוחים לא מדוייק).
עבור המשוואה:

$$X_1 \frac{\partial u}{\partial x}+X_2 \frac{\partial u}{\partial y}=0$$

בהינתן פתרון כללי:

$$z=F\left(u_1\right)$$

נרצה למצוא את הפונקציה F המתאימה לתנאים.

$$\begin{cases}f(x, y, z)=0 \\ f_1(x, y, z)=0\end{cases}$$

שני המשוואות הנ"ל מגדירות עקומה. כמובן שגם:

$$z=C_2$$

הוא פתרון טריוויאלי נוסף.
מהמשוואות הנ"ל נקבל $u_1(x, y)=C_1$:

$$\phi\left(C_1, C_2\right)=0$$

דוגמה 4.2.1 :

$$u \to z \quad z(x,y)$$

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = R^2 \\ x = 0 \end{cases}$$

נפתור את משוואת הקריסטיקות:

$$\frac{\mathrm{d}x}{y} = \frac{\mathrm{d}y}{-x}$$

$$\begin{aligned} x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y &= 0 \\ x^2 + y^2 &= C_1 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = C_1 \\ y^2 + z^2 = R^2 \\ x = 0 \\ z = C_2 \end{cases}$$

כלומר:

$$C_1 + C_2^2 = R^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

כלומר קיבלנו ספרה

$$z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

4.3 בעיה לא הומוגנית בn מימדים

במקרה של n משתנים:

$$Y_1\frac{\partial u}{\partial x_1} + Y_2\frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + Y_n\frac{\partial u}{\partial x_n} = Y_{n+1}$$

כאשר:

$$Y_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, u)$$

הפתרון הכללי במקרה זה הוא מהצורה:

$$u_{gen}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1})$$

דוגמה 4.3.1 :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

משוואה זו, היא לא לינארית (כך הפיסיקאים קוראים לה, המתמטיקאים קוראים לה קוואזי לינארית - Quasi-linear)

נרצה לפתור את:

$$\begin{cases} Y_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + Y_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \ldots + Y_n \frac{\partial u}{\partial x_1} = Y_{n+1} \\ Y_i \left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u\right) \end{cases}$$

נרצה לקבל פונקציה סתומה:

$$u \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) \to \omega \left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u\right)$$

נשים לב כי מכלל השרשרת נקבל:

$$\forall i = 1, \ldots, n \qquad \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}x_i} = \frac{\partial \omega}{\partial x_i} + \frac{\partial \omega}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

כלומר:

$$\forall i = 1, \ldots, n \qquad \frac{\partial u}{\partial x_i} = - \frac{\frac{\partial \omega}{\partial x_i}}{\frac{\partial \omega}{\partial u}}$$

נציב במשוואה הנתונה ונקבל:

$$-Y_1 \frac{\frac{\partial \omega}{\partial x_1}}{\frac{\partial \omega}{\partial u}} - \ldots - Y_n \frac{\frac{\partial \omega}{\partial x_n}}{\frac{\partial \omega}{\partial u}} = Y_{n+1} \left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u\right)$$

נעביר אכפים ונכפיל ב $\frac{\partial \omega}{\partial u}$ ונקבל:

$$Y_1 \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + Y_2 \frac{\partial \omega}{\partial x_2} + \ldots + Y_n \frac{\partial \omega}{\partial x_n} + Y_{n+1} \frac{\partial \omega}{\partial u} = 0$$

נשים לב כי קיבלנו משוואה הומוגנית! נכון, העלנו את המימד באחד אבל היא זהה לחלוטין למשוואה מהמקרה של n מימדים. לכן אנו כבר יודעים איך לפתור אותה.

משיטת הקריסטוקות נקבל:

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{Y_1} = \frac{\mathrm{d}x_2}{Y_2} = \ldots = \frac{\mathrm{d}x_n}{Y_n} = \frac{\mathrm{d}u}{Y_{n+1}}$$

כלומר n משוואות. אף אחד לא מבטיח שנוכל לפתור אותן, אבל במידה וכן, נקבלף

$$\forall i = 1, \ldots, n \quad u_i \left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u\right) = C_i$$

$$\omega = F \left(u_1, u_2, \ldots, u_n\right)$$

✎ **דוגמה 4.3.2 :**

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1$$

(כלומר, $Y_1=a,\quad Y_2=b,\quad Y_3=1$)
משיטת הקריסטיקות נקבל:

$$\frac{\mathrm{d}x}{a}=\frac{\mathrm{d}y}{b}=\frac{\mathrm{d}z}{1}$$

נבצע אינטגרציות על כל שיוויון ונקבל:

$$\frac{\mathrm{d}x}{a}=\mathrm{d}z\Rightarrow x-az=C_1$$

וכמו כן:

$$y-bz=C_2$$

$$\omega\left(x-az,y-bz\right)=0$$

נוסיף תנאי שפה לבעיה:

$$\frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1,\quad z=0$$

(כלומר תנאי של אליפסה עבור $z=0$)
לכן כרגע המשוואות שלנו הן:

$$\begin{cases}x-az=C_1\\ y-bz=C_2\\ \frac{x^2}{m^2}+\frac{y^2}{n^2}=1\\ z=0\end{cases}$$

נקבל:

$$\frac{C_1^2}{m^2}+\frac{C_2^2}{n^2}=1$$

$$\frac{\left(x-az\right)^2}{m^2}+\frac{\left(y-bz\right)^2}{n^2}-1=0$$

נחזור רגע למשוואה דיפרנציאלית רגילה. שם קיבלנו לדוגמה:

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x$$

בעזרת תנאי שפה נרצה לקבל את הקבועים C_1,C_2.
לדוגמה עבור תנאי השפה:

$$y\left(0\right)=0\quad\Rightarrow\quad C_1=0$$
$$y'\left(0\right)=1\quad\Rightarrow\quad C_2=0$$

ולכן:

$$y=\sin\left(x\right)$$

המצב כאן הוא די זהה בקונספט. אנו משתמשים באילוץ שלנו על מנת למצוא קשר בין C_1 ל: C_2. רק שהפעם C_1,C_2 הם פונקציות של של x,z או y,z.

4.4 פונקציית גל

4.4.1 פונקציית גל פשוטה

$$u\left(x,t\right):\qquad \frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}=0,\quad c=\text{const}$$

משיטת הקריסטיקות:

$$\frac{\mathrm{d}t}{1}=\frac{\mathrm{d}x}{c}\Rightarrow x-ct=C\Rightarrow x=ct+C$$

משיקולי יחידות נקבל כי ל-c יש יחידות של $^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{sec}}$. והפתרון שלנו הוא קו לינארית בשיפוע c. כלומר הגרף של $ct\left(x\right)$ הוא קו לינארי החוצה את זווית מערכת הצירים. הקבוע C בעצם פורש לנו את כל המישור. כיוון שהוא מזיז את הגרף.

$$u_{gen}\left(x,t\right)=f\left(x-ct\right)$$

זוהי למעשה פונקציית גל פשוטה, אבל אין זו הפונקצייה הכללית (כיוון שהגל מתקדם רק בכיוון אחד).

דוגמה 4.4.1 :

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial x}=0$$

$$u_{gen}=f\left(x-t\right)$$

עם תנאי ההתחלה:

$$u\left(x,t=0\right)=\alpha\sin\left(kx\right)$$

לכן נקבל את המשוואות:

$$\begin{cases} x-t=C_1 \\ t=0 \\ u=\alpha\sin\left(kx\right) \\ u=C_2 \end{cases}$$

נקבל:

$$\begin{cases} x=C_1 \\ u=\alpha\sin\left(kx\right) \\ u=C_2 \end{cases}$$

כלומר:

$$C_2=\alpha\sin\left(kC_1\right)$$

נחזיר את C_1 וC_2 ונקבל:

$$u\left(x,t\right)=\alpha\sin\left[k\left(x-t\right)\right]$$

במקרה של תנאי שפה:

$$u\left(x=0,t\right)=\cos\left(kt\right)$$

נשים לב שנקבל:

$$\begin{cases} x-t=C_1 \\ c=0 \\ u=\cos\left(kt\right) \\ u=C_2 \end{cases}$$

$$t=-C_1$$

$$C_2=\cos\left(-kC_1\right)=\cos k\left(C_1\right)$$

$$u\left(x,t\right)=\cos\left[k\left(x-t\right)\right]$$

4.5 משוואות דיפרנציאליות חלקיות מסדר שני

בהינתן פונקציה מהמבנה:

$$A(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B(x,y)\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial y}+C(x,y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\phi\left(u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},x,y\right)$$

4.5.1 תנאי שפה

ישנם שלושה סוגים של תנאי שפה

1. דיריכלה Dirichlet - $u|_\gamma$ נתון (כלומר נתונה פונקציה על השפה)
2. נוימן Neumann - תנאי על הרכיב הנורמלי של הגרדיאנט כלומר: $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\gamma$
3. קושי Cauchy - $u|_\gamma$ וגם $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\gamma$ כלומר שילוב של שני תנאי השפה הקודמים.

נחזור למשוואות דיפרנציאליות רגילות לרגע. נתבונן במשוואות מסדר שני:

$$y''=f(x,y,y')$$

בעיית קושי במקרה הזה: $y(x_0)=y_0$, $y'(x)|_{x_0}=y_0'$

טור טיילור של $y(x)$ (את האיברים הראשונים אנו יודעים בגלל תנאי ההתחלה, את היתר בעזרת f)

$$y(x)=y_0+y_0'(x-x_0)+\frac{1}{2}y''(x)\Big|_{x_0}(x-x_0)^2+\dots$$

נמשיך באופן הזה ונקבל:

$$y'''=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'+\frac{\partial f}{\partial y'}y''$$

כלומר אנו יודעים את הפונקציה y בסביבת x_0.

באופן דומה, עבור משוואות דיפרנציאליות חלקיות, נפתח טור טיילור כפול בסביבת (x_0,y_0)כדי לדעת את u באותה סביבה:

$$u(x,y)=u(x_0,y_0)+\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x_0,y_0}+\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{x_0,y_0}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big|_{x_0,y_0}(x-x_0)^2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big|_{x_0,y_0}(y-y_0)^2$$
$$+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\Big|_{x_0,y_0}(x-x_0)(y-y_0)+\dots$$

נרצה למצוא את הקירוב הבא:

בהינתן מצב שנתונים לנו תנאי התחלה קושי, נניח כי ניתן להגדיר את השפה בצורה פרמטרית, כלומר:

$$\begin{cases}x=x(s)\\ y=y(s)\end{cases}$$

אזי:

$$\underbrace{u(s)}_{\text{Cauchy}}\Rightarrow\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial s}\\ \frac{\partial u}{\partial n}\end{cases}\Rightarrow\nabla u|_\gamma\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_\gamma,\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_\gamma$$

ידועים.

נסמן:

$$p=\frac{\partial u}{x},\ q=\frac{\partial u}{\partial y},\ r=\frac{\partial u^2}{\partial x^2},\ \sigma=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\ t=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$Ar+2B\sigma+Ct=\phi\left(u,p,q,x,y\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}+\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=r\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}+\sigma\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$$

כמו כן:

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=\sigma\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}s}+t\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}$$

כלומר, קיבלנו:

$$\begin{cases}Ar+2B\sigma+Ct=\phi\left(u,p,q,x,y\right)\\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\cdot r+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s}\cdot\sigma+0\cdot t=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}s}\\ 0\cdot r+\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\cdot\sigma+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\cdot t=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}s}\end{cases}$$

נקבל כי הדטרמיננטה הראשית שלנו היא:

$$\Delta=\begin{vmatrix}A & 2B & C\\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} & 0\\ 0 & \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\end{vmatrix}=A\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)^2-2B\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}+C\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)^2$$

מה קורה אם: $\Delta=0$?

$$A\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)^2-2B\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}+C\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)^2=0$$

נחלק את שני האגפים ב $\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)^2$ נשים לב כי:

$$\left(\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}}{\frac{\mathrm{d}d}{\mathrm{d}s}}\right)^2=\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2$$

ולכן:

$$A\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-2B\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+C=0$$

נפתור את המשוואה הריבועית (משוואה זו נקראת משוואת הקרקטריסטיקות מסדר שני):

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2B\pm\sqrt{4B^2-4AC}}{2A}$$

במקרה ש $B^2-AC>0$ נקבל:

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f_+\left(x,y\right)\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f_-\left(x,y\right)\end{cases}$$

כלומר שתי משפחות של קרקטריסטיקות. המשוואה היא היפרבולית.

במקרה שבו $B^2-AC=0$ נקבל משוואה פרבולית. עם משפחה אחת של קריסטיקות. המשוואה היא פרבולית.

במקרה שבו $B^2-AC<0$ נקבל 2 משפחות של קרקטריסטיקות מרוכבו. המשוואה היא אליפטית.

דוגמה 4.5.1 : גלים:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 0\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} - 1\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

$$A = \frac{1}{c^2}, B = 0, C = -1$$

$$D = B^2 - AC = \frac{1}{C^2} > 0$$

כלומר זו משוואה היפרבולית

דוגמה 4.5.2 לפלסיאן:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

$$A = 1,\ B = 0,\ C = 1$$

$$B^2 - AC = -1$$

כלומר זו משוואה אליפטית.

דוגמה 4.5.3 חום/דיפוזיה:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 0\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + 0\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$B^2 - AC = 0$$

ולכן זו משוואה פרבולית.

במשוואות אליפטאיות הקרקטריסטיקות מרוכבות. והן מהמבנה:

$$\begin{cases} \varphi(x,y) + i\psi(x,y) = C_1 \\ \varphi(x,y) - i\psi(x,y) = C_2 \end{cases}$$

במשוואה פרבולית הקרקטריסטיקות הן:

$$\varphi(x,y) = C$$

במשוואות היפורבולית:

$$\begin{cases} \varphi(x,y) = C_1 \\ \psi(x,y) = C_2 \end{cases}$$

נסמן:

$$\begin{cases} \xi = \varphi(x,y) \\ \eta = \psi(x,y) \end{cases}$$

הצורה הקאנונית של משוואה היפרבולית היא:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=F_1\left(\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta},u,\xi,\eta\right)$$

משוואה אלפיטיות נבצע את אותן הצבות משתנים (חלק ממשי ומדובמה) ונקבל:

$$\nabla^2 u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\eta^2}=F_2\left(\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta},u,\xi,\eta\right)$$

וזו הצורה הקאנונית של משוואות אליפטיות.

במקרה של פרבולית, נסמן:

$$\begin{cases}\xi=\varphi\left(x,y\right)\\ \eta=x\end{cases}$$

נקבל שהצורה הקאנונית של משוואה פרבולית היא:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=F_3\left(\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta},u,\xi,\eta\right)$$

✎ **דוגמה 4.5.4 :** נסמן: $u_{xx}\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (ובאופן דומה את יתר הנגזרות כמו שאנו מכירים כבר)

$$u_{xx}+4u_{xy}+5u_{yy}+u_x+2u_y=0$$

נשים לב כי:

$$A=1,B=2,C=5$$

4.5.5 תזכורת

$$A\left(x,y\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\left(x,y\right)\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial y}+C\left(x,y\right)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\phi\left(u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},x,y\right)$$

נשים לב כי:

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+5=9\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{4\pm\sqrt{16-20}}{2}=\frac{4\pm 2i}{2}$$

כלומר זו משוואה אלפיטית.

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2+i & \Rightarrow y=\left(2+i\right)x+\mathrm{const}_1\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=2-i & \Rightarrow y=\left(2-i\right)x+\mathrm{const}_2\end{cases}$$

נקבל:

$$\begin{cases}2x-y+ix=C_1\\ 2x-y-ix=C_2\end{cases}$$

כלומר:

$$\begin{cases}\varphi\left(x,y\right)=2x-y\\ \psi\left(x,y\right)=x\end{cases}$$

נסמן:

$$\begin{cases}\xi=2x-y\\ \eta=x\end{cases}$$

נקבל:

$$\begin{aligned}u_x &= u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x=2u_\xi+1\cdot u_\eta=2u_\xi+u_\eta\\ u_y &= u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y=-u_\xi+0\cdot u_\eta-u_\xi\end{aligned}$$

נחשב נגזרות שניות:

$$\begin{aligned}u_{xx} &= \left(2u_\xi+u_\eta\right)_x=\left(2u_\xi+u_\eta\right)_\xi\xi_x+\left(2u_\xi+u_\eta\right)_h\eta_x=2\left(2u_{\xi\xi}+u_{\xi\eta}\right)+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}=4u_{\xi\xi}+4u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\\ u_{yy} &= \left(-u_\xi\right)_\xi\xi_y+\left(-u_\xi\right)_\eta\eta_y=u_{\xi\xi}\\ u_{xy} &= \left(u_y\right)_x=\left(-u_\xi\right)_\xi\xi_x+\left(-u_\xi\right)_\eta\eta_x=-2u_{\xi\xi}-u_{\xi\eta}\end{aligned}$$

נציב משוואה

$$u_{xx}+4u_{xy}+5u_{yy}+u_x+2u_y=0$$

ונקב

$$\boxed{4u_{\xi\xi}}+\cancel{4u_{\xi\eta}}+u_{\eta\eta}+-\boxed{8u_{\xi\xi}}-\cancel{4u_{\xi\eta}}+\boxed{5u_{\xi\xi}}+\cancel{2u_\xi}+u_\eta-\cancel{2u_\xi}=0\Rightarrow$$

$$\boxed{u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+u_\eta=0}$$

וזוהי המשוואה הקאנונית

4.6 משוואות היפרבוליות - משוואת הגלים

אנו מכירים מגלים את משוואת הגלים:

$$u\left(x,t\right):\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

נשים לב כי:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0\Rightarrow -c^2u_{xx}+0\cdot u_{xt}+u_{tt}=0$$

$$A=-c^2,\ B=0,\ C=x$$

כלומר:

$$-c^2\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)^2+1=0\Rightarrow\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right)^2=\frac{1}{c^2}$$

$$\begin{cases}\left.\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right|_1=\frac{1}{c} & \Rightarrow x-ct=C_1\\ \left.\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}\right|_2=-\frac{1}{c} & \Rightarrow x-ct=C_2\end{cases}$$

נסמן:

$$\begin{cases}\xi=x+ct\\ \eta=x-ct\end{cases}$$

$$u\left(x,t\right)\to u\left(\xi,\eta\right)$$

$$\begin{array}{ll}\xi_x=1 & \xi_t=c\\ \eta_x=1 & \eta_t=-c\end{array}$$

נחשב את הנגזרות בעזרת ξ,η נקבל:

$$\begin{aligned}u_x &= u_\xi+u_\eta\\ u_t &= cu_\xi-cu_\eta\end{aligned}$$

נחשב נגזרות שניות:

$$\begin{aligned}u_{xx} &= \left(u_\xi+u_\eta\right)_\xi\cdot 1+\left(u_\xi+u_\eta\right)_\eta\cdot 1=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\\ u_{tt} &= \left(cu_\xi-cu_\eta\right)_\xi\cdot c-\left(cu_\xi-cu_\eta\right)_\eta c=c^2u_{\xi\xi}-2c^2u_{\xi\eta}+c^2u_{\eta\eta}\end{aligned}$$

נציב ב $-c^2u_{xx}+0\cdot u_{xt}+u_{tt}=0$ ונקבל:

$$\cancel{c^2u_{\xi\xi}}-2c^2u_{\xi\eta}+\cancel{c^2u_{\eta\eta}}-\cancel{c^2u_{\xi\xi}}-2c^2u_{\xi\eta}-\cancel{c^2u_{\eta\eta}}=0\Rightarrow -4c^2u_{\xi\eta}=0\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$$

כלומר זו הצורה הקאנונית שלנו. נשים לב כי זו הצורה הקאנונית הפשוטה ביותר עבור משוואה היפרבולית.

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right)=0\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial h}=f\left(\eta\right)\Rightarrow u\underbrace{=}_{u(\xi,\eta)}g\left(\eta\right)+h\left(\xi\right)$$

לכן הפתרון הכללי שלנו למשוואת הגלים הוא:

$$u\left(x,t\right)=F_1\left(x+ct\right)+F_2\left(x-ct\right)$$

כאשר סימנו $h=F_1,\ g=F_2$.

4.6.1 תנאי קושי

נתבונן במקרה של תווך אינסופי כלומר: $-\infty < x < \infty$. עבור המשוואת גלים:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

נוסיף תנאי התחלה:

$$t = 0: \quad u(x, t = 0) = u(x, 0)$$

נשים לב שזה אינו תנאי מספיק, בגלל שאנחנו לא יודעים האם זו הייתה תמונה סטטית (של מיתר לדוגמה) או שיש לו מהירות בזמן הזה. לכן נדרש עוד תנאי התחלה:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t = 0) = v(x, 0)$$

נסמן $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = v(x, t)$. נשים לב כי בזמן $t = 0$ המשוואות שלנו הן:

$$\begin{cases} u(x, 0) = F_1(x) + F_2(x) \\ v(x, 0) = cF_1'(x) - cF_2'(x) = \left[cF_1(x) - cF_2(x)\right]_x' \end{cases}$$

הערה 4.6.1

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial t} = cF_1'(x + ct) - cF_2'(x - ct)$$

נשים לב כי:

$$cF_1(x) - cF_2(x) = \int_0^x v(x', 0)\,\mathrm{d}x' + \tilde{C} \Rightarrow F_1(x) - F_2(x) = \frac{1}{c}\int_0^x v(x', 0)\,\mathrm{d}x' + C$$

לכן נקבל משתי המשוואות:

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \frac{1}{2}u(x, 0) + \frac{1}{2c}\int_0^x v(x', 0)\,\mathrm{d}x' + \frac{C}{2} \\ F_2(x) &= \frac{1}{2}u(x, 0) - \frac{1}{2c}\int_0^x v(x', 0)\,\mathrm{d}x' - \frac{C}{2} \end{aligned}$$

נציב $x + ct$ ו-$x - ct$ ונקבל:

$$\begin{aligned} F_1(x + ct) &= \frac{1}{2}u(x + ct, 0) + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} v(x', 0)\,\mathrm{d}x' + \frac{C}{2} \\ F_1(x - ct) &= \frac{1}{2}u(x - ct, 0) - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} v(x', 0)\,\mathrm{d}x' - \frac{C}{2} \end{aligned}$$

ולכן קיבלנו:

$$u(x, t) = \frac{u(x + ct, 0) + u(x - ct, 0)}{2} + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} v(x', 0)\,\mathrm{d}x' + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{0} v(x', 0)\,\mathrm{d}x' =$$

$$\frac{u(x + ct, 0) + u(x - ct, 0)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} v(x', 0)\,\mathrm{d}x'$$

נוסחה הזאת יש שם, זוהי נוסחת דלאמבר (D'Alembert's formula) כמו שראינו בגלים ואופטיקה.

דוגמה 4.6.2 :

$$\begin{cases} u(x,0) = A\sin kx \\ v(x,0) = 0 \end{cases}$$

נקבל כי:

$$u(x,t) = \frac{A\sin[k(x+ct)] + A\sin[k(x-ct)]}{2}$$

וזהו כמובן גל עומד.

4.6.2 תנאי שפה דיריכלה

$$\begin{aligned} \xi = 0 \quad &: \quad u = f(\eta) \\ \eta = 0 \quad &: \quad u = g(\xi) \end{aligned}$$

כאשר f, g פונקציות ידועות.

כלומר קיימים לנו תנאים על השפה.

כמו כן, כדי שזה יסתדר עם הנקודה המחברת את הקרקטריסטיקות תהא שווה, כלומר:

$$f(0) = g(0)$$

$$u(\xi,\varphi) = F_1(\xi) + F_2(\eta)$$

נשים לב כי:

$$\begin{aligned} \xi = 0 \quad &: \quad F_1(0) + F_2(\eta) = f(\eta) \Rightarrow F_2(\eta) = f(\eta) - F_1(0) \\ \eta = 0 \quad &: \quad F_1(\xi) + F_2(0) = g(\xi) \Rightarrow F_1(\xi) = g(\xi) - F_2(0) \end{aligned}$$

אנו לא יודעים מה הם $F_1(0)$ ו $F_2(0)$ אבל אנחנו לא באמת מתעניינים בפונקציות F_1, F_2 בנפרד אלא בסכומן. ננסה להתקדם בכל זאת ונקבל:

$$\begin{aligned} u(\xi,\eta) = g(\xi) - F_2(0) + f(\eta) - F_1(0) = f(\eta) + g(\xi) - f(0) + \cancel{F_1(0)} - \cancel{F_1(0)} = \\ f(\eta) + g(\xi) - f(0) \equiv f(\eta) + g(\xi) - g(0) \end{aligned}$$

4.6.3 מיתר המוחזק בשתי קצותיו

משוואת הגלים שלנו היא כמובן:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

עם תנאי ההחלה:

$$t = 0 \quad : \quad u|_{t=0} = f(x)\,, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = F(x)$$

תנאי השפה:

$$\begin{aligned} u(x=0,t) &= 0 \\ u(x=l,t) &= 0 \end{aligned}$$

על מנת לפתור את המשוואה הדיפרנציאלית נשתמש בשיטה הנקראת הפרדת משתנים.

הדרישות לשימוש בהפרדת משתנים הן:

1. המשוואה היא הומוגנית
2. תנאי השפה הם הומוגניים

אם הבעיה היא לא הומוגנית, נצטרך להעביר אותה למצב הומוגני קודם.

בשלב הראשון בשיטה היא נתעלם מתנאי ההתחלה, והתייחסות רק לתנאי השפה, כלומר נחקור את המערכת עצמה בלי להתייחס איך בדיוק הוצאנו אותה משיווי המשקל.

השלב הראשון הוא חיפוש פתרונות ספרבילים, כלומר נחפש פונקציה X אשר תלויה רק ב x, ופונקיה T אשר תלויה רק ב t ויתקיים:

$$u_p(x,t) = X(x)T(t)$$

הערה 4.6.3 ההגיון לכך הוא שאנחנו מחפשים את כל הגלים העומדים במערכת אשר מקיימים את תנאי השפה. (ברור כי הביטוי הנ"ל הוא גל עומד.

נציב במשוואת הגלים ונקבל:

$$X(x)\ddot{T}(t) = c^2 X''(x)T(t)$$

נחלק את שני האגפים ב: $c^2 X(x)T(t)$ נקבל:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

כלומר, קיבלנו משוואה שאגף ימין תלוי רק בx ואילו אגף שמאל תלוי רק בt. איך יכול להתקיים שיוויון כנ"ל? רק כאשר הם שווים לקבוע לכן:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -a = \text{const}$$

נחשב את החלק המרחבי של המשוואה (החלק שתלוי בx):

$$X'' + aX(x) = 0$$

הפתרונות הם: אם a שלילי מדובר באקספוננטים, ואילו אם a חיובי מדובר בקוסינוסים וסינוסים.

כמו כן, תנאי השפה שלנו קובעים:

$$X(0) = X(l) = 0$$

לכן יש לנו משוואה דיפרנציאלית מסדר שני עם תנאי שפה, לכן זו בעיה שאנו כבר יודעים לפתור בעזרת שטורם ליוביל. למעשה a הוא ערך עצמי.

קיבלנו כי לבעיה הנ"ל יש פתרום אס"ם a קיים בספקטרום הדיסקרטי:

$$a_k = \frac{k^2\pi^2}{l^2},\ k = 1,2,\ldots$$

ולכן נקבל:

$$X_k(x) = A_k \sin\frac{k\pi x}{l}$$

הערה 4.6.4 נשים לב שעבור a שלילי, נקבל שני אקספוננטים, אבל הם תמיד חיוביים, לכן הפתרון היחיד שיעמוד בתנאי השפה הוא הפתרון הטריוויאלי .

כעת באופן דומה, נפתור את המשוואה עבור $T(t)$, אבל כעת אנו יודעים דבר מה על a נקבל:

$$\ddot{T}_k + c^2 \frac{k^2\pi^2}{l^2} T_k(t) = 0$$

שוב קיבלנו משוואה של אוסצילטור הרמוני, והפתרון שלנו הוא כמובן:

$$T_k(t) = B_k \sin\left(\frac{kc\pi t}{l}\right) + C_k \cos\left(\frac{kc\pi t}{l}\right)$$

הערה 4.6.5 למה לא בחרנו k שליליים? כיוון שזה רק מוסיף פקטור מינוס אשר גם כך נמצא כבר בקבוע A_k.

לכן, הפתרונות הספרבילים שקבלנו הם:

$$u_k(x,t) = X_k(x) T_k(t) = \left(c_k \cos\frac{k\pi ct}{l} + d_k \sin\frac{k\pi ct}{l}\right) \sin\frac{k\pi x}{l}$$

כאשר $k = 1, 2, 3, \ldots$

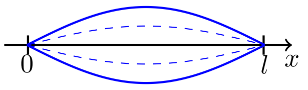
הערה 4.6.6 נשים לב כי קבוע שרירותי אחד "נעלם" אבל למעשה זה לא המצב, כיוון שאם נכפות את המשוואות נקבל: $c_k = C_k \cdot A_k$ ו: $d_k = B_k \cdot A_k$.

ה-k-ים הם למעשה המודים של התנודות שלנו

$$\frac{k\pi c}{l} = \omega_k \Rightarrow T_k = \frac{2\pi}{\omega_k} = \frac{2\pi l}{k\pi c} = \frac{2l}{kc}$$

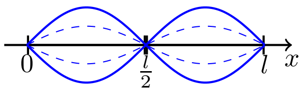
(זה לא אותו T כמו קודם, אלא הזמן מחזור). עבור $k=1$ נקרא למוד גם: Fundamental Mode - $T_1 = \frac{2l}{c}$, $k=2$ נקרא Second Harmonic.

עבור הFundamental Mode נקבל כי התמונה במרחב עבור t קבוע כלשהו היא: $\sin\frac{\pi x}{l}$ כלומר:



איור 4.1: Fundamental Mode

עבור הSecond Harmonic נקבל כי התמונה במרחב עבור t קבוע כלשהו היא: $\sin\frac{2\pi x}{l}$ כלומר:



איור 4.2: Second Harmonic

לכן הפתרון הכללי שלנו הוא:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k \cos\frac{k\pi ct}{l} + d_k \sin\frac{k\pi ct}{l}\right) \sin\frac{k\pi x}{l}$$

(נבין בהמשך למה זה אכן הפתרון הכללי)

כעת נרצה להשתמש בתנאי ההתחלה. עבור תנאי ההתחלה $t=0$ נקבל את הביטוי:

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\frac{k\pi x}{l} = f(x)$$

נרצה להשתמש בתנאי השני, ראשית נצטרך לגזור את הביטוי שקיבלנו ונקבל:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty}\left(-c_k\frac{k\pi c}{l}\sin\frac{k\pi ct}{l} + d_k\frac{k\pi c}{l}\cos\frac{k\pi ct}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}$$

נציב בנגזרת $t=0$ ונקבל תנאי:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi c}{l}d_k\sin\frac{k\pi x}{l} = F(x)$$

כלומר קיבלנו שני ביטויים,

$$\begin{cases}\sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\frac{k\pi x}{l} = f(x) \\ \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi c}{l}d_k\sin\frac{k\pi x}{l} = F(x)\end{cases}$$

למעשה c_k הם המקדמים של f בפיתוח לטור פורייה, ואילו $\frac{k\pi c}{l}d_k$ הם המקדמים של F.

הערה 4.6.7 קיים הסבר אחר עם שטורם ליוביל, זו פרישה של הפונקציות השרירותיות של תנאי ההתחלה על ידי פונקציות הבסיס - הפונקציות העצמיות של הבעיה.

כאמור את c_k ניתן לחשב בכמה דרכים, נראה את הדרך הכללית יותר (והמועדפת על ברוך) בעזרת מקדמי הפרישה של שטורם ליוביל.

$$u_k(x) = G_k\sin\frac{k\pi x}{l}$$

ננרמל את הפונקציות העצמיות, כלומר: $u_k(x)\cdot u_k(x) = 1$ (מכפלה סקלרית!) כלומר:

$$u_k(x)\cdot u_k(x) = \int_0^l u_k^2(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

כמו כן נדרש כי:

$$u_k(x)\cdot u_n(x) = \delta_{n,k}$$

נדרוש את הנרמול:

$$G_k^2\int_0^l \sin^2\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x = 1$$

נשים לב כי:

$$\int_0^l\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{2k\pi x}{l}\right]\mathrm{d}x = \frac{l}{2}$$

ולכן:

$$G_k^2\cdot\frac{l}{2} = 1$$

ולכן נקבל: $G_k = \sqrt{\frac{2}{l}}$. ולכן קיבלנו כי הפונקציות האורתונורמליות הן:

$$u_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{k\pi x}{l}$$

כלומר נדרוש:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\boxed{c_k\sqrt{\frac{l}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{k\pi x}{l} = f(x)$$

כלומר c_k הם לא מקדמי הפרישה של $f(x)$ על הפונקציות העצמיות אלא $c_k\sqrt{\frac{l}{2}}$. לכן:

$$c_k\sqrt{\frac{l}{2}} = f(x)\cdot\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{k\pi x}{l} = \int_0^l f(x)\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

נעביר קצת אגפים ונקבל:

$$c_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

נשים לב כי הביטוי שהניב תנאי ההתחלה השני דומה כמעט ולחלוטין לביטוי של תנאי ההתחלה הראשון (הבדל של כפל במקדם). ולכן נקבל:

$$\frac{k\pi c}{l}d_k = \frac{2}{l}\int_0^l F(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x \Rightarrow d_k = \frac{2}{k\pi c}\int_0^l F(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\mathrm{d}x$$

הערה 4.6.8 קראנו לזה אוסף של אופני תנודה, אבל זה לא מונח מתמטי.
בואו נדבר על זה קצת מתמטית, מצאנו אופרטור הרמיטי מסדר שני שהוא טבעי לבעיה הנ"ל ($X'' + aX = 0$). ברגע שזיהינו אותו, אנו יודעים כי הוא מספק לנו מערכת שלמה $u_k(x)$ (פונקציות עצמיות). אנו יודעים שאנו מחפשים $u(x,t)$ נרצה למצוא אותו כפרישה של אותן פונקציות עצמיות:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k u_k(x)$$

אבל חסר לנו כאן התייחסות לזמן, כיוון שהפרישה שונה עם הזמן, לכן המקדמים שלנו תלויים בזמן, כלומר:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k(t)\,u_k(x)$$

קשר לפתרון הכללי של משוואת גלים אנו יודעים כי הפתרון הכללי של משוואת הגלים הוא:

$$u(x,t) = F_1(x+ct) + F_2(x-ct)$$

איך זה קשור?
נשים לב כי הנוסחה שקיבלנו היא למעשה מקרה פרטי של הנוסחה הנ"ל. איך?

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\cos\frac{k\pi ct}{l}\sin\frac{k\pi x}{l} + d_k\sin\frac{kct}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}$$

קצת טריגו ונקבל למעשה פונקציות מהמבנה של $x+ct$ ו $x-ct$.

דוגמה 4.6.9 : בעקבות מחסור בתרגולים, נפתור כאן דוגמה:

$$u_{xx}+2u_{xy}-3u_{yy}+2u_x+6u_y=0$$

נשים לב כי במקרה הנ"ל: $A=1,\ B=1,\ C=-3$ נשים לב כי:

$$B^2-AC=1+3=4>0$$

ולכן זו משוואה היפרבולית. לכן נקבל:

$$\begin{aligned} A\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= B+\sqrt{B^2-AC} \\ A\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= B-\sqrt{B^2-AC} \end{aligned}$$

כלומר:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1+2=3 & 3x-y=\text{const} \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1-2=-1 & \Rightarrow x+y=\text{const} \end{cases}$$

נסמן $\xi=x+y$ ו: $\eta=2x-y$ ונקבל:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=\dots$$

נשים לב כי:

$$u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x$$

אבל: $\xi_x=1,\xi_y=1$ וגם: $\eta_x=3,\ \eta_y=-1$ ונקבל:

$$u_x=u_\xi+3u_\eta$$

וגם:

$$u_y=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y=u_\xi-u_\eta$$

כמו כן:

$$u_{xx}\left(u_\xi+3u_\eta\right)_\xi\xi_x+\left(u_\xi+3u_\eta\right)_\eta\eta_x=u_{\xi\xi}+3u_{\xi h}+\left(u_{\xi\eta}+3u_{\eta\eta}\right)3=u_{\xi\xi}+6u_{\xi\eta}+9u_{\eta\eta}$$

וגם:

$$u_{yy}=\left(u_\xi-u_\eta\right)_\xi\xi_y+\left(u_\xi-u_\eta\right)_\eta\eta_y=u_{\xi\xi}-u_{\xi\eta}-u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}=u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}$$

ולבסוף:

$$u_{xy}=\left(u_x\right)_y=\left(u_\xi+3u_\eta\right)_\xi\xi_y+\left(u_\xi+3u_\eta\right)_\eta\eta_y=u_{\xi\xi}+3u_{\xi\eta}-u_{\xi\eta}-3u_{\eta\eta}=u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}-3u_{\eta\eta}$$

נציב במשוואה המקורית ונקבל:ר

$$\cancel{u_{\xi\xi}}+6u_{\xi\eta}+\cancel{9u_{\eta\eta}}+2\left(\cancel{u_{\xi\xi}}+2u_{\xi\eta}-\cancel{3u_{\eta\eta}}\right)-3\left(\cancel{u_{\xi\xi}}-2u_{\xi\eta}+\cancel{u_{\eta\eta}}\right)+2\left(u_\xi+3u_\eta\right)+6\left(u_\xi-u_\eta\right)=0$$

כלומר:

$$16u_{\xi\eta}+8u_\xi=0\Rightarrow u_{\xi\eta}+\frac{1}{2}u_\xi=0$$

אבל נשים לב כי זה שווה גם ל:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}+\frac{1}{2}u\right)=0$$

לכן: $\frac{\partial u}{\partial\eta}+\frac{1}{2}u=f\left(\eta\right)$ (כלומר אינה תלויה בכלל ב ξ). לכן קיבלנו משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון, אותה אנו יודעים לפתור.

4.6.4 ממברנה דו מימדית

נתבונן במקרה של ממברנה דו מימדית נקבל כי משוואת הגלים היא:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u$$

במקרה של מימד 1:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ואילו במקרה של שני מימדים:

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

לכן נקבל כי עבור ממברנה:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u$$

נבצע הפרדת משתנים:

$$u(\vec{x}, t) = U(\vec{x}) T(t)$$

(כאשר $\vec{x} = (x, y)$) נקבל כי:

$$\ddot{T}(t) U(\vec{x}) = c^2 T(t) \nabla^2 U(\vec{x})$$

$$\frac{\ddot{T}}{c^2 T(t)} = \frac{\nabla^2 U(\vec{x})}{U(\vec{x})} = -\gamma^2$$

וכמובן שנקבל את הפתרון עבור הזמן:

$$\ddot{T}(t) + \gamma^2 c^2 T(t) = 0$$

גורר:

$$T(t) = A \sin(\gamma c t) + B \cos(\gamma c t)$$

עבור המרחב נקבל:

$$\nabla^2 U(\vec{x}) + \gamma^2 U(\vec{x}) = 0$$

וזו משוואת הלמהולץ (Helmholtz).

אם נוסיף תנאי על השפה Ω אשר היא מוחזקת קבוע נקבל דרישה של $u|_\Omega = 0$ כלומר, $U|_\Omega = 0$. לכן נקבל:

$$u_p|_\Omega = U|_\Omega T(t) = 0$$

נרצה להשתמש בשטרום ליוביל בשביל לפתור את הבעיה. לצורך כך צריך להכליל את התאוריה ל n מימדים.
בפרט צריך להכליל את הגדרת האופרטור ההרמיטי.
בדו מימד אופרטו יהיה הרמיטי אם מתקיים (במקרה הממשי):

$$\int_A u \hat{L} v \mathrm{d}\vec{x} = \int_A v \hat{L} u \mathrm{d}x$$

נזכר כי אופרטור הרמיטי חד מימדי הוא:

$$\hat{L} u = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[p(x) \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right] + w(x) u(x)$$

ובמקרה הn מימדי:

$$\hat{L}u = \nabla\cdot\left[p\left(\vec{x}\right)\nabla u\right] + w\left(\vec{x}\right)u\left(\vec{x}\right)$$

נראה כי הוא אכן הרמיטי:

$$\iint_A \left(u\nabla^2 v - v\nabla^2 u\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

תזכורת 4.6.10 משפט גאוס:

$$\iint_A \mathrm{div}\vec{K}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_\Omega K_n \mathrm{d}x$$

כאשר k_n היא המסילה של המעטפת. (נשים לב כי זהו המקרה הדו מימדי של משפט גאוס, לכן זו מסילה ולא מעטפת משטחית.

נסמן:

$$\vec{K} = u\nabla v - v\nabla u$$

לכן:

$$\mathrm{div}\vec{K} = \nabla\cdot\left(u\nabla v - v\nabla u\right) = \nabla\cdot\left(u\nabla v\right) - \nabla\cdot\left(v\nabla u\right) = u\nabla^2 v + \cancel{\nabla u\nabla v} - v\nabla^2 u - \cancel{\nabla v\nabla u}$$

ונקבל:

$$\iint_A \left(u\nabla^2 v - v\nabla^2 u\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_\Omega \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s$$

כאשר n הוא כיוון הנורמל. נשים לב כי האינטגר השני מתאפס, כיוון שזה תנאי השפה.
המכפלה הפנימית נשארת זהה:

$$u\cdot v = \int_A u^*\left(\vec{x}\right)v\left(\vec{x}\right)w\left(\vec{x}\right)\mathrm{d}\vec{x}$$

4.6.4.1 תוף מלבני

נרצה להתבונן בתוף מלבני. תנאי השפה שלנו הם:

$$u\left(x,0,t\right) = u\left(x,L_y,t\right) = u\left(0,y,t\right) = u\left(L_x,y,t\right) = 0$$

נתבונן בתוף תחת תנאי התחלה:

$$\begin{aligned} u\left(x,y,0\right) &= f\left(x,y\right) \\ \frac{\partial u}{\partial t}\left(0,x,y\right) &= F\left(x,y\right) \end{aligned}$$

נזכור כי קיבלנו את משוואת הלמהולץ עבור ממברנה דו מימדית, כלומר:

$$\nabla^2 U\left(x,y\right) + \gamma^2 U\left(x,y\right) = 0$$

נבצע הפרדת משתנים ל U נקבל:

$$U_p\left(x,y\right) = X\left(x\right)Y\left(y\right)$$

$$X''(x)\,Y(y) + X(x)\,Y''(y) + \gamma^2 X(x)\,Y(y) = 0$$

כלומר:

$$\frac{X''}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\gamma^2$$

ולכן קיימים קבועים λ, μ כך ש:

$$\begin{aligned} \frac{X''}{X} &= -\lambda^2 \\ \frac{Y''}{Y} &= -\mu^2 \end{aligned}$$

וכמובן:

$$\lambda^2 + \mu^2 = \gamma^2$$

וכמובן שהפתרון עבור X, Y הוא קוסינוסים וסינוסים כמו שאנו כבר מכירים.
כעת נרצה להשתמש בתנאי השפה, נקבל כי:

$$U_p(x,0) = X(x)\,Y(0) = 0 \Rightarrow Y(0) = 0$$

ובאופן דומה:

$$Y(L_y) = 0, \quad X(0) = 0, \quad X(L_x) = 0$$

למעשה נרצה לפתור שתי משוואות שהן מאוד דומות:

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0$$

תחת האילוצים:

$$X(0) = X(L_x) = 0$$

ועבור Y:

$$Y''(y) + \mu^2 Y(y) = 0$$

תחת האילוצים:

$$Y(0) = Y(L_y) = 0$$

מתמטית, ניתן להתייחס לזה כאילו המבברנה התפרקה למיתרים הניצבים זה לזה.

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{L_x},\ k = 1,2,3,\ldots$$

ונקבל:

$$X_k = A_k \sin\frac{k\pi x}{L_x}$$

באופן דומה עבור Y:

$$\mu_n = \frac{n\pi}{L_y}, \quad n = 1,2,\ldots$$

$$Y_n = B_n \sin\frac{n\pi y}{L_y}$$

נקבל כי:

$$\gamma_{k,n}^2 = \frac{k^2\pi^2}{L_x^2} + \frac{n^2\pi^2}{L_y^2}$$

$$\gamma c = \omega \Rightarrow \omega_{k,n} = c\sqrt{\frac{k^2\pi^2}{L_x^2} + \frac{n^2\pi^2}{L_y^2}} = \pi c\sqrt{\frac{k^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}}$$

כאשר $k, n = 1, 2, 3, \ldots$ ולכן נקבל:

$$u_{k,n} = [A_{k,n}\sin(\omega_{k,n}t) + B_{k,n}\cos(\omega_{k,n}t)]\sin\frac{k\pi x}{L_x}\sin\frac{n\pi y}{L_y}$$

ולכן עבור $k = 1, 2, \ldots$ ו: $n = 1, 2, \ldots$

זהו גל עומד.

הערה 4.6.11

$$\alpha\sin x + \beta\cos x = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sin(x+\varphi)$$

כאשר: $\tan\varphi = \frac{\beta}{\alpha}$.

כיוון שלתלות בזמן יש מחזור $T_{k,n} = \frac{2\pi}{\omega_{k,n}}$.

כדי לראות מודים שונים כדאי לבדוק את האתר: http://www.falstad.com/membrane/

בגדול המוד $k = n = 1$ הוא הfundamental תלחצו שם על הריבוע הראשון למעלה משמאל

כעת נשתמש בתנאי ההתחלה על מנת למצוא את המקדמים:

$$\begin{cases} \sum_{k,n=1}^{\infty} B_{k,n}\sin\frac{k\pi x}{L_x}\sin\frac{n\pi y}{L_y} = f(x,y) \\ \sum_{k,n=1}^{\infty} \omega_{k,n}A_{k,n}\sin\frac{k\pi x}{L_x}\sin\frac{n\pi y}{L_y} = F(x,y) \end{cases}$$

נקבל:

$$\begin{aligned} B_{k,n} &= \frac{4}{L_xL_y}\int_0^{L_x}\int_0^{L_y} f(x,y)\sin\frac{k\pi x}{L_x}\sin\frac{n\pi y}{L_y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ A_{k,n} &= \frac{4}{L_xL_y}\int_0^{L_x}\int_0^{L_y} F(x,y)\sin\frac{k\pi x}{L_x}\sin\frac{n\pi y}{L_y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \end{aligned}$$

כזכור, המוד k, n נראה כדילקמן:

$$u_{k,n} = [A_{k,n}\sin(\omega_{k,n}t) + B_{k,n}\cos(\omega_{k,n}t)]\sin\frac{k\pi x}{L_yx}\sin\frac{n\pi y}{L_y}$$

כאשר:

$$\omega_{k,n} = \pi c\sqrt{\frac{k^2}{L_x^2} + \frac{n^2}{L_y^2}}$$

ו:

$$\begin{aligned} k &= 1, 2, 3, \ldots \\ n &= 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

נתבונן במקרה הפרטי בו: $L_x = L_y = \pi$ (במידה וזה לא שווה π, ניתן להגדיר יחידות אורך חדשות בהן האורך של הממברנה שווה ל π) ו$B_{k,n} = 0$.

במקרה זה נקבל:

$$u_{k,n}=A_{k,n}\sin\left(\omega_{k,n}t\right)\sin\left(kx\right)\sin\left(ny\right)$$

$$\omega_{k,n}=\pi c\sqrt{\frac{k^2}{\pi^2}+\frac{n^2}{\pi^2}}=c\sqrt{k^2+n^2}$$

במוד $k=n=1$ נקבל: $\omega_{k,n}=c\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ ולכן: $u_{k,n}\sim\sin x\sin y$. כמו כן:

$$\begin{cases}k=2,n=1 & \omega_{2,1}=c\sqrt{2^2+1^2}=c\sqrt{5},\ u_{2,1}\sim\sin\left(2x\right)\sin\left(y\right)\\ k=1,n=2 & \omega_{1,2}=c\sqrt{1^2+2^2}=c\sqrt{5},\ u_{2,1}\sim\sin\left(x\right)\sin\left(2y\right)\end{cases}$$

זהו ניוון. כאשר יש שני מודים שונים עם אותה תדירות. כלומר שני התדרים הנ"ל יפיקו את אותו צליל.

נסכום את שני המודים הנ"ל:

$$u_{\Sigma}=s_{2,1}\sin\left(\omega_{2,1}t\right)\sin\left(2x\right)\sin\left(y\right)+a_{1,2}\sin\left(\omega_{1,2}t\right)\sin\left(x\right)\sin\left(y\right)$$

נזכור כי: $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ ולכן:

$$=2\sin\left(c\sqrt{5}t\right)\sin x\sin y\left(a_{2,1}\cos x+a_{1,2}\cos y\right)$$

נרצה למצוא נקודות של אפסים של הרכיב:

$$a_{2,1}\cos x+a_{1,2}\cos y=0$$

אלו הם הצמתים הנוצרים מהשילוב של שני המודים.

אם, $a_{1,2}=0$ אז ברור כי $\cos x=0\Rightarrow\frac{\pi}{2}$ באופן זהה: $a_{2,1}=0\Rightarrow\cos y=0\Rightarrow y=\frac{\pi}{2}$.

ולמקרים יותר מעניינים:

$$a_{1,2}=a_{2,1}\Rightarrow\cos x=-\cos y=\cos\left(\pi-y\right)\Rightarrow x=\pi-y\Rightarrow x+y=\pi$$

(כלומר קו אלכסוני בממברנה. יורד ביחס למערכת הצירים)

$$a_{1,2}=-a_{2,1}\Rightarrow x=y$$

(גם כן קו אלכסוני, הפעם עולה)

4.7 משוואת החום\דיפוזיה - Heat/Diffusion eqn.

משוואת החום היא לא חוק יסוד (כמו חוק שני של ניוטון) אלא משוואה אמפירית והיא לא תמיד מדוייקת.

נניח שיש לנו איזשהו תווך אשר הוא במצב נייח, לצורך העניין מתכת, ואנחנו מחממים אותה מהצד (או בדרך מופלאה כלשהי מבפנים)

אנו נרצה לראות איך האנרגיה התרמית מתפשטת במערכת?

(אנו יודעים כי ברמה המיקרוסקופית, אנרגיה תרמית היא אנרגיה קינטית בתנועה אקראית באיזור)

נרצה לאפיין איזור ע"י הטמפרטורה שלו (נתעלם מדיסקרטיות המולקולות וכו', נתייחס לזה כאילו הכל רציף)

נקח אזור ספציפית ונגיד שאגורה בו אנרגיה תרמית W, וJ_n הוא שטף האנרגיה נקבל כי:

$$\frac{\partial W}{\partial t}=-\int J_n\mathrm{d}s$$

כיוון שאין היווצרות אין היווצרות אנרגיה, ואין בזבוז אנרגיה. אבל ממשפט גאוס אנו יודעים כי:

$$=-\int\nabla\vec{J}dV$$

כלומר:

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\int\nabla\cdot\vec{J}\mathrm{d}V=0$$

אבל: $W=\int w\mathrm{d}V$ מכיוון שאנחנו מדברים על נפח מסויים (לא על נפח אינפיניטסימלי!) ולכן נקבל:

$$\int\left(\frac{\partial w}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{J}\right)\mathrm{d}V=0$$

מה שכתוב כאן הוא למעשה חוק שימור אנרגיה עבור אנרגיה תרמית.
כמובן שזה גורר:

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\nabla\cdot\vec{J}=0$$

כאשר $\omega=cT$. ו: $\vec{J}=-K\nabla T$ כלומר:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(cT\right)=-\nabla\left(-K\nabla T\right)=\nabla\left(K\nabla T\right)$$

אבל K הוא קבוע של החומר, וגם c (קיבול החום) הוא קבוע ולא תלוי טמפרטורה, ולכן:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\kappa\nabla^{2}T$$

כאשר $\kappa=\frac{K}{c}$ ונקרא מוליכות חום (heat diffusivity).
באופן דומה, קיימת את משוואת הדיפוזיה האומרת:

$$\frac{\partial n}{\partial t}=\mathcal{D}\nabla^{2}n$$

כאשר $\mathcal{D}$ מוליכות הדיפוזיה (משוואה זו מתארת את דיפוזיה של חלקיקים, לצורך העניין בושם, היא מתארת את פיזור החלקיקים).
נרצה לבחון את משוואת החום:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a^{2}\nabla^{2}T$$

נבחין כי היא מאוד דומה למשוואת הגלים, אבל גם שונה, הנגזרת לפי הזמן היא נגזרת ראשונה ולא שניה.
נעבור למקרה חד־ממדי:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=a^{2}\frac{\partial^{2}t}{\partial x^{2}}$$

לדוגמה מוט מאוד ארוך ומבודד כך שהחום לא יברח ממנו החוצה אם נחמם את המוט באיזשהו מקום, החום יתפשט לאורך המוט. או בדיפוזיה, אנו נמצאים בתוך תעלה ומפזרים בקצה בושם.

משוואת החום היא משוואה פרבולית. הקרקטריסטיקות שלנו הם קווים המקבילים לציר הx.

אם אנו יודעים כי $T\left(x,t=0\right)=f\left(x\right)$ אז $\frac{\partial T}{\partial t}$ נקבע עבורנו (נגזרת על הזמן לא מוסיפה מידע ולהפך, יכולה להרוס).
הביטוי הבא מתכונתי לאנרגיה:

$$\int_{-\infty}^{\infty}T\left(x,t\right)\mathrm{d}x=\mathrm{const}$$

נראה זאת. נבצע אינטגרל למשוואת החום ונקבל:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial T}{\partial t}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}a^{2}\frac{\partial^{2}T}{\partial x^{2}}\mathrm{d}x$$

אנו מניחים שהפונצקיה T מספיק חלקה, ולכן:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} T\left(x,t\right)\mathrm{d}x = a^2\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{-\infty}^{\infty} = a^2\frac{\partial T}{\partial x}\left(x=\infty,t\right) - a^2\frac{\partial T}{\partial x}\left(x=-\infty,t\right)$$

במקרה שאנו מדברים על פונקצייה ש $T\left(x\to\infty\right)\to 0$ נקבל כי $a^2\frac{\partial T}{\partial x}\left(x=\infty,t\right) = a^2\frac{\partial T}{\partial x}\left(x=-\infty,t\right) = 0$ ולכן:

$$=0$$

כמו כן גם נשמר:

$$\int_{-\infty}^{\infty} xT\left(x,t\right)\mathrm{d}x = \mathrm{const}$$

נראה זאת:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\frac{\partial T}{\partial t}\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} a^2x\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\mathrm{d}x$$

מאינטגרציה בחלקים:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} xT\left(x,t\right)\mathrm{d}x = a^2\left[x\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial T}{\partial x}1\mathrm{d}x\right] = a^2\left[x\frac{\partial T}{\partial x}\bigg|_{-\infty}^{\infty} - T|_{-\infty}^{\infty}\right] = 0$$

נחזור למקרה עם התנאי התחלה. נדרוש כי:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right)\mathrm{d}x < \infty$$

הדבר מפתיח לנו כי קיים טרנספורם פורייה של $f\left(x\right)$. טרנספורם פורייה הוא למעשה הכללה של טור פורייה כאשר אנו מדברים על תחום אינסופי.

כאשר המערכת היא אינסופית אין לנו קוונטיזציה של הספקטרום. ולכן אנו מקבלים רצף של ערכים עצמיים.

קיימת גם גרסה של שטורם־ליוביל עבור רצף. במקום סכום, נקבל אינטגרל

4.7.1 טרנספורם פורייה

נתבונן בפונקציה $f\left(t\right)$ כלשהי. נרצה להגדיר עבורה את טרנספום פורייה. נגדיר פונקציה חדשה $F\left(\omega\right)$ בעזרת $f\left(t\right)$. כיצד?

$$F\left(\omega\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f\left(t\right)e^{i\omega t}\mathrm{d}t$$

מתי הדבר הנ"ל קיים? כבר אמרנו שכאשר:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\left(x\right)\mathrm{d}x < \infty$$

אבל נראה בהמשך עוד מקרים. מתברר כי זהו גם תנאי מספיק (ברור אינטואיטיבית כיוון ש $e^{i\omega t}$ חסום ב 1, לכן האינטגרל יתכנס).

נגיד שמצאנו את $F(\omega)$, נרצה לשחזר את $f(t)$. מתברר כי:

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\,e^{-i\omega t}\mathrm{d}\omega$$

זו כבר לא יכולה להיות הגדרה, זה כבר משפט שיש להוכיח. נוכיח זאת:

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t')\,e^{i\omega t'}\mathrm{d}t'\right)e^{-i\omega t}\right]\mathrm{d}\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(t')\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\omega t+i\omega t'}\mathrm{d}\omega\right)\right]\mathrm{d}t'$$

אבל: $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(t-t')\omega}\mathrm{d}\omega$ הוא אינטגרל שכבר ראינו, נזכור כי:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha\omega}\mathrm{d}\omega=\begin{cases}\infty & \alpha=0\\ 0 & \alpha\neq 0\end{cases}=2\pi\delta(\alpha)$$

לכן, האינטגרל הזה מתכונתי לδ. ונקבל כי:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(t-t')\omega}\mathrm{d}\omega=2\pi\delta(t-t')$$

ולכן:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(t')\,2\pi\delta(t-t')\,\mathrm{d}t'=f(t)$$

נרצה לראות כי אכן:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i(t-t')\omega}\mathrm{d}\omega=2\pi\delta(t-t')$$

נסמן: $\alpha=t-t'$ נקבל:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\alpha\omega}\mathrm{d}\omega$$

האינטואיציה אומרת שכאשר $\alpha=0$ אז האינטגרל יוצא אינסוף, כי למעשה בתוך האינטגרל כתוב למעשה 1. נתבונן בביטוי:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\alpha\omega-\gamma|\omega|}=\int_{-\infty}^{\infty}(\cos(\alpha\omega)+i\sin(\alpha\omega))\,e^{-\gamma|\omega|}\mathrm{d}\omega=$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\alpha\omega)\,e^{-\gamma|\omega|}\mathrm{d}\omega+i\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\sin(\alpha\omega)\,e^{-\gamma|\omega|}\mathrm{d}\omega}_{\to 0}=2\int_{0}^{\infty}\cos(\alpha\omega)\,e^{-\gamma\omega}=2\mathrm{Re}\int_{0}^{\omega}e^{i\alpha\omega-\gamma\omega}\mathrm{d}\omega=$$

$$2\mathrm{Re}\left[\left.\frac{e^{i\alpha\omega-\gamma\omega}}{i\alpha-\gamma}\right|_{0}^{\infty}\right]=2\mathrm{Re}\left[\frac{1}{\gamma-i\alpha}\right]=2\mathrm{Re}\left[\frac{\gamma+i\alpha}{(\gamma-i\alpha)(\gamma+i\alpha)}\right]=2\mathrm{Re}\left[\frac{\gamma+i\alpha}{\gamma^2+\alpha^2}\right]=2\frac{\gamma}{\gamma^2+\alpha^2}=$$

$$2\pi\frac{\gamma}{\pi(\gamma^2+\alpha^2)}\underset{\gamma\to 0}{\longrightarrow}2\pi\delta(\alpha)$$

איך נראה הטרנספורם פורייה של $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$?

$$F_1(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}e^{i\omega t}\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\cancelto{0}{e^{i\omega t}f(t)\Big|_{-\infty}^{\infty}}-i\omega\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{i\omega t}\mathrm{d}t\right]=-\frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{i\omega t}\mathrm{d}t=-i\omega F(\omega)$$

כלומר:

$$\begin{aligned}
F_1(\omega) &= -i\omega F(\omega)\\
\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}t^2}:\ F_2(\omega) &= -i\omega F_1(\omega)=(-i\omega)(-i\omega)F(\omega)=(-i\omega)^2F(\omega)\\
\frac{\mathrm{d}^nf}{\mathrm{d}t^n}:\ F_n(\omega) &= (-i\omega)^nF(\omega)
\end{aligned}$$

נתבונן שוב במשוואת החום:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$$

$$u(x,t=0)=f(x)$$

נרצה למצוא $u(x,t>0)$.

נבצע טרנספום פורייה על משוואת החום:

$$R(k,t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)\,e^{ikx}\mathrm{d}x$$

נבצע גם טרנספורם על שני האגפים:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial u}{\partial t}e^{ikx}\mathrm{d}x=a^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2}{\partial x^2}e^{ikx}\mathrm{d}x$$

אבל האינטגרל לא משפיע כלל על t לכן ניתן להוציא את הנגזרת החוצה ונקבל:

$$\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,t)\,e^{ikx}\mathrm{d}x\right]}_{R(k,t)}=a^2(-ik)^2R(k,t)$$

לכן קיבלנו:

$$\frac{\partial R(k,t)}{\partial t}=-k^2a^2R(k,t)$$

למעשה העברנו את הבעיה למרחב פורייה, יתן לראות כי כאן הבעיה הרבה יותר פשוטה כיוון שקיימות נגזרות רק ביחס ל-t.

$$\begin{aligned}
\dot{R} &= -k^2a^2R\\
\frac{\mathrm{d}R}{R} &= -k^2a^2\mathrm{d}t\Rightarrow\ln R=-k^2a^2t+\mathrm{const}
\end{aligned}$$

כלומר קיבלנו:

$$R(k,t)=C(k)\,e^{-k^2a^2t}$$

$$R(k,0)=C(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,e^{ikx}\mathrm{d}x$$

מהטרנספורם ההפוך מתקיים:

$$u(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}R(k,t)\,e^{-ikx}\mathrm{d}k=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-ikx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\,e^{ik\xi}\mathrm{d}\xi\right)e^{-k^2a^2t}\mathrm{d}k$$

ולכן נקבל:

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2k^2t+i(\xi-x)k}\mathrm{d}k\right)\mathrm{d}\xi$$

נסמן: $\sigma^2=a^2k^2t\Rightarrow\sqrt{a^2t}k=\sigma$ ולכן: $\mathrm{d}k=\frac{\mathrm{d}\sigma}{\sqrt{a^2t}}$ ונקבל:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2k^2t+i(\xi-x)k}\mathrm{d}k=\frac{1}{\sqrt{a^2t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\sigma^2+i(\xi-x)\frac{\sigma}{\sqrt{a^2t}}}\mathrm{d}\sigma$$

נסמן: $\beta=\frac{\xi-x}{\sqrt{a^2t}}$ ולכן, נקבל:

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\sigma^2+i\beta\sigma}\mathrm{d}\sigma$$

נרצה לחשב את:

$$I(\beta)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\sigma^2+i\beta\sigma}\mathrm{d}\sigma=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\sigma^2}\cos(\beta\sigma)\,\mathrm{d}\sigma$$

(הסינוס מתאפס מהאינטגרציה כי זו פונקציה אי זוגית) נבחין כי:

$$I(0)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\sigma^2}\mathrm{d}\sigma=\sqrt{\pi}$$

נבחין כי:

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\beta}=-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sigma e^{-\sigma^2}\sin\beta\sigma\mathrm{d}\sigma=\cancelto{0}{\frac{1}{2}\sin(\beta\sigma)\,e^{-\sigma^2}\Big|_{-\infty}^{\infty}}-\frac{1}{2}\beta\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\sigma^2}\cos(\beta\sigma)\,\mathrm{d}\sigma=-\frac{1}{2}\beta I(\beta)$$

כלומר קיבלנו משוואה דיפרנציאלית עבור $I(\beta)$:

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\beta}=-\frac{1}{2}\beta I$$

נפתור בעזרת הפרדת משתנים:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I}{I}&=-\frac{1}{2}\beta\mathrm{d}\beta\\ \ln I&=-\frac{1}{4}\beta^2+\text{const}\\ I(\beta)&=\text{const}\cdot e^{-\frac{1}{4}\beta^2}=\sqrt{\pi}e^{-\left(\beta^2/4\right)}\end{aligned}$$

מכיוון ש $I(0)=\text{const}$.

ולכן:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-a^2k^2t+i(\xi-x)k}\mathrm{d}k=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a^2t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}$$

ולכן:

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a^2t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi=\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\,e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}\mathrm{d}\xi$$

הפונקציה הנ"ל מקיימת את משוואת החום ותנאי ההתחלה.

נגדיר:

$$G(x,\xi,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi\sigma^2t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}$$

נבחין כי פונקציה זו מקיימת את משוואת החום (זה קצת מסורבל אלגברית, אבל לא מסובך. לא נעשה את זה בכיתה)

כמו כן, נבחין כי:

$$G(x,\xi,t\to 0)=\delta(x-\xi)$$

כי מתי ש $x=\xi$ נקבל כי: $G\underset{t\to 0}{\longrightarrow}\infty$. אבל כאשר $x\neq\xi$ נקבל כי: $G\underset{t\to 0}{\longrightarrow}0$. נרצה להראות כי זו באמת δ ולא איזשהי כפולה שלה.

נסמן: $z=\frac{x-\xi}{2\sqrt{a^2t}}$ ולכן: $\mathrm{d}x=2\sqrt{\sigma^2t}\mathrm{d}z$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(x,\xi,t)\,\mathrm{d}x=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{4\pi a^2t}}e^{-z^2}\mathrm{d}z=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi}=1$$

ולכן:

$$G(x,\xi,t\to 0)=\delta(x-\xi)$$

כאשר $x=\xi$ ואנו ב$t=0$ נקבל כי בנקודה $x=\xi$ יש לנו טמרפטורה אינסופית, אם נתקדם בזמן טיפה קדימה (לא משנה כמה) נקבל כבר טמפרטורה סופית והיא תרד עם הזמן כמו $\frac{1}{\sqrt{t}}$. ובמרחב זה לאט לאט יתפשט כגאוסיאן ש"נמרח" על ציר הx.

ולמעשה היא פונקציית גרין של משוואת החום.

נבחין כי:

$$u(x,t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}G(x,\xi,t)\,f(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

מכיוון שהמשוואה לינארית והומוגנית, גם כל צירוף של פונקציות G הוא יהיה פתרון. במקרה זה $f(\xi)$ מוסיפה משקל לאמפליטודה של G.

נחפש פתרונות פרטיים שהם ניתנים להפרדה:

$$u_p(x,t)=X(x)\,T(t)$$

בדיוק כמו במשוואת הגלים

$$X(x)\,\dot{T}(t)=a^2X''(x)\,T(t)$$

$$\frac{\dot{T}}{a^2T}=\frac{X''}{X}=-k^2$$

נפתור עבור X:

$$X''+k^2X=0$$

הפתרון הוא כמובן:

$$X(x)=A\cos kx+B\sin kx$$

ועבור הזמן:

$$\frac{\dot{T}}{a^2T}=-k^2\Rightarrow T\left(t\right)=\text{const}\cdot e^{-a^2k^2t}$$

ולכן:

$$u_p\left(x,t\right)=\left(a_k\cos\left(kx\right)+b_k\sin\left(kx\right)\right)e^{-a^2k^2t}$$

כאשר k הוא רציף (אין לנו שום מגבלה עליו), ולכן הפתרון הוא לא סכום. נקבל כי הפתרון הוא הביטוי הבא:

$$u\left(x,t\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(a_k\cos\left(kx\right)+b_k\sin\left(kx\right)\right)e^{-a^2k^2t}$$

נשאר למצוא את המקדמים a_k ו-b_k. נציב את תנאי ההתחלה ונקבל:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}a_k\cos\left(kx\right)+b_k\sin\left(kx\right)\mathrm{d}k=f\left(x\right)$$

על מנת למצוא אותם, למעשה צריך למצוא את המקדמי טרנספורם פורייה של $f\left(x\right)$.

✎ **דוגמה 4.7.1 :** $u\left(x,t=0\right)=C\sin\left(k_0x\right)$ נקבל כי במקרה זה:

$$u\left(x,t\right)=C\sin\left(k_0x\right)e^{-a^2k_0^2t}$$

4.7.2 תנאי שפה

בתנאי שפה של נגזרת מתפאסת בקצוות, כלומר:

$$\frac{\partial u}{\partial x}\left(x=0,t\right)=\frac{\partial u}{\partial x}\left(x=L,t\right)=0$$

עם תנאי התחלה:

$$u\left(x,t=0\right)=f\left(x\right)$$

נרצה לחשב את הפתרון.

$$u_\lambda\left(x,t\right)=\left(a\sin\left(\lambda x\right)+b\cos\left(\lambda x\right)\right)e^{-a^2\lambda^2t}$$

$$\frac{\partial u_\lambda}{\partial x}=\left(a\lambda\cos\left(\lambda x\right)-b\lambda\sin\left(\lambda x\right)\right)e^{-a^2\lambda^2t}$$

מתנאי השפה הראשון, (התאפסות הנגזרת ב $x=0$) נקבל כי: $a=0$. מכיוון ש:

$$\begin{aligned} x=0: &\qquad a\lambda e^{-a^2\lambda^2t}=0\Rightarrow a=0\\ x=L: &\qquad -b\lambda\sin\left(\lambda L\right)e^{-a^2\lambda^2t}=0\Rightarrow\lambda_n=\frac{\pi n}{L},\quad n=1,2,3,\ldots\end{aligned}$$

ולכן:

$$u_n\left(x,t\right)=A_n\cos\frac{\pi nx}{L}e^{-\frac{\pi^2a^2n^2t}{L^2}}$$

כאשר $n=0,1,2,3,\ldots$ (מוסיפים את 0 כדי להוסיף את המצב הסופי, הרי כל יתר הפתרונות דועכים לאפס)

נרצה למצוא את A_0:

$$\int_0^L \frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}x = a^2 \int_0^L \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\mathrm{d}x$$

נקבל:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^L u(x,t)\,\mathrm{d}x = a^2 \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_0^L = a^2\ \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=L} - a^2\ \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0}$$

במקרה של התנאי שפה שלנו זה כמובן מתאפס, ולכן:

$$\int_0^L u(x,t)\,\mathrm{d}x = \mathrm{const} = \int_0^L f(x)\,\mathrm{d}x$$

ולכן:

$$\begin{aligned} A_0 L &= \int_0^L f(x)\,\mathrm{d}x \\ A_0 &= \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\,\mathrm{d}x = \langle f(x)\rangle \end{aligned}$$

10/01/2012

4.7.3 בעיות אי הומוגניות

4.7.3.1 במשוואת החום

נניח משוואת חום אי הומוגנית:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

כאשר $0 < x < L$.

תנאי השפה וההתחלה:

$$\begin{aligned} u(x=0,t) &= u_1 \\ u(x=L,t) &= u_2 \\ u(x,t=0) &= f(x) \end{aligned}$$

$$u(x,t>0) = ?$$

כלומר זוהי משוואה הומוגנית עם תנאי שפה אי־הומוגניים.

במצב העמיד, כאשר $t \to \infty$ נקבל: $\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \Leftarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \Leftarrow u_{gen} = A_x + B \Leftarrow$ הפונקציה תגיע בזמן ∞ למצב לינארי.

מקיום תנאי השפה:

$$u_{st} = u_{gen}(x,t=\infty) = \frac{u_2 - u_1}{L}x + u_1$$

נשים לב כי u_{st} הוא פתרון פרטי של הבעיה.

נרשום:

$$u(x,)=u_{st}(x)+v(x,t)$$

ונקבל:

$$\frac{\partial v}{\partial v}=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

$$\begin{aligned} x=0: &\qquad u_{st}(0)+v(0,t)=u_1\Rightarrow v(0,t)=0\\ x=L &\qquad u_{st}(L)+v(L,t)=u_2\Rightarrow v(L,t)=0 \end{aligned}$$

כלומר קיבלנו בעיה הומוגנית עבור u, ולכן u הוא סכום של פתרון פרטי עם פתרון הומוגני

$$u(x,t=0)=f(x)=u_{st}(x)+v(x,t=0)\Rightarrow v(x,t=0)=f(x)-u_{st}=F(x)$$

תנאי התחלה).

נפתור את v ונקבל את u.

גם משוואה אי הומוגנית

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x)$$

עם תנאי שפה:

$$\begin{aligned} u(x=0,t) &= u_1\\ u(x=L,t) &= u_2 \end{aligned}$$

ותנאי התחלה:

$$u(x,t=0)=g(x)$$

בעיה זו היא אי הומוגנית משתי סיבות. גם כאן תנאי השפה לא הומוגניים, וגם המשוואה עצמה אינה הומוגנית.

נבנה פתרון פרטי:

$$u(x,t)=u_p(x)+v(x,t)$$

כאשר v היא הומוגנית. נקבל:

$$a^2u_p''(x)+f(x)=0$$

$$u_p''(x)=-\frac{1}{a^2}f(x)$$

נטנגרל ונקבל:

$$u_p'(x)=-\frac{1}{a^2}\int_0^x f(x')\,\mathrm{d}x'+c_1$$

$$u_p(x)=-\frac{1}{a^2}\int_0^x \mathrm{d}x'\int_0^{x'} f(x'')\,\mathrm{d}x''+c_1x+c_2$$

כלומר, נקבל:

$$\frac{\partial v}{\partial t}=\cancel{a^2u_p''(x)}+a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\cancel{f(x)}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} &= a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\\ v(x=0,t) &= v(x=L,t)=0\end{aligned}$$

תנאי שפה הוא נגזרת

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ \ 0<x<L$$

תנאי השפה הפעם הם:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\ \ \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L}=b^2$$

ותנאי ההתחלה:

$$u(x,t=0)=f(x)$$

ננסה פתרון פרטי:

$$u_p(x,t)=c_0(t)$$

הוא מקיים את המשוואה, אבל לא את תנאי השפה השני. ננסה:

$$u_p(x,t)=c_0(t)+b^2x$$

אבל גם זה מקיים את התנאים כמו שרצינוץ ננסה:

$$u_p(x,t)=c_0(t)+c_1x+c_2x^2$$

זה כבר מקיים את כל התנאים.

$$u(x,t)=u_p(x,t)+v(x,t)=v(x,t)+c_0(t)+c_1x+c_2x^2$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\dot{c}_0(t)=a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+2a^2c_2$$

כלומרת על מנת שהבעיה תהא הומוגניתת נקבל:

$$\dot{c}_0(t)=2a^2c_2$$

$$\begin{aligned}x=0: &\quad \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0}+c_1+2c_2x|_{x=0}=\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=-}+c_1=0\\ x=L: &\quad \left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=L}+2c_2L=b^2\Rightarrow c_2=\frac{b^2}{2L}\Rightarrow c_0(t)=\frac{a^2b^2}{L}t\end{aligned}$$

כי:

$$\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\frac{\partial v}{\partial x}\right|_{L}=0$$

ולכן:

$$u_p\left(x,t\right)=\frac{a^2b^2t}{L}+\frac{b^2x^2}{2L}$$

וגם:

$$\begin{aligned} v_t &= a^2v_{xx} \\ v_x\left(0,t\right) &= v_x\left(L,t\right)=0 \\ v\left(x,0\right) &= f\left(x\right)-\frac{b^2x^2}{2L} \end{aligned}$$

וזו כבר בעיה הומוגנית שאנו יודעים לפתור.

$$u\left(x,t\right)=v\left(x,t\right)+\frac{a^2b^2t}{L}+\frac{b^2x^2}{2L}$$

וכאשר $t\to\infty$ נקבל:

$$u\left(x,t\to\infty\right)=a_0+\frac{b^2x^2}{2L}+\frac{a^2b^2t}{L}$$

4.7.3.2 בעיות אי-הומוגניות במשוואת הגלים

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}=f\left(x,t\right)$$

ננחש $u_p\left(x,t\right)$:

$$u\left(x,t\right)=u_p\left(x,t\right)+v\left(x,t\right)$$

כאשר v הומוגנית. אם אנחנו לא מצליחים לנחש אותו כי הוא מסובך מידי, נפעיל את המכונות הכבודות יותר. יש כאן מערכת שלמה שכבר מצאנו מתי שפתרנו את משוואת הגלים.

$$0<x<L$$

$$u\left(x=0,t\right)=u\left(x=L,t\right)=0$$

$$\sin\frac{k\pi x}{L},k=1,2,3,\ldots$$

$$u\left(x,t\right)=\sum_{k=1}^{\infty}h_k\left(t\right)\sin\frac{k\pi x}{L}$$

נפרוש את:

$$f\left(x,t\right)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k\left(t\right)\sin\frac{k\pi x}{L}$$

כאשר $f_k\left(t\right)$ ידועות כמובן. נרצה להציב את הביטויים למשוואה. נגזור את $u\left(x,t\right)$ לפי הזמן ונקבל:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\ddot{h}_k\left(t\right)\sin\frac{k\pi x}{L}+c^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2\pi^2}{L^2}h_k\left(t\right)\sin\frac{k\pi x}{L}=\sum_{k=1}^{\infty}f_k\left(t\right)\sin\frac{k\pi x}{L}$$

נקבל:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\ddot{h_k}(t)+\frac{k^2\pi^2c^2}{L^2}h_k(t)-f_k(t)\right]\sin\frac{k\pi x}{L}+=0$$

מכאן קיבלנו אין סוף משוואות דיפרנציאליות

$$\ddot{h_k}(t)+\frac{k^2\pi^2c^2}{L^2}h_k(t)=f_k(t)$$

אבל $f_k(t)$ ידועה, וגם כל יתר הפרמטרים פרט ל h_k. נפתור אותם בעזרת וריאציית משתנים. 12/02/2012

4.7.4 משוואת לפלאס - Laplace's equation

משוואת לפלאס היא כמובן: $\nabla^2 u=0$.

בקואורדינטות קרטזיות:

$$\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

בגליליות:

$$\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

ובכדוריות:

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{z^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}$$

אם נתבונן במשוואת החום: $\frac{\partial T}{\partial t}=k\nabla^2 T$, היא כמובן לא משוואת לפלאס, אבל אם אנחנו רוצים לדבר על מצב שהמערכת הגיע כבר לשיווי משקל ואנו רוצים למצוא את $T(\vec{r})$ זו כבר כן משוואת לפלאס. כיוון שנקבל: $\nabla^2 T=0$.

4.7.4.1 יחידות הפתרון

למשוואת לפלאס יש יחידות לפתרון בקונטקסט של בעיית דיריכלה (כלומר על השפה אנו קובעים את הפונקציה, כלומר $u\mid_\Gamma=\tilde{u}$)

כפיסיקאים ברור לנו כי הפיתרון קיים (אם זה היה קורס מתמטי היינו אמורים להוכיח גם זאת), נראה שהפתרון הוא יחיד.

טענה 4.7.2

משוואת לפלאס בקונטקסט של בעיית דיריכלה היא בעלת פתרון יחיד.

הוכחה: נניח בשלילה כי קיימים שני פתרונות $u_1(\vec{r}),u_2(\vec{r})$ אשר פותרים את המשוואה. כלומר:

$$\begin{aligned}\nabla^2 u_1 &= 0\\ \nabla^2 u_2 &= 0\end{aligned}$$

ומתקיים:

$$u_1|_\Gamma=\tilde{u},\qquad u_1|_\Gamma=\tilde{u}$$

נסמן:

$$u_3(\vec{r})=u_1(\vec{r})-u_2(\vec{r})$$

היא גם פתרון של משוואת לפלאס (לפונקציות כאלה נקרא פונקציות הרמוניות, פונקציות המקיימות את משוואת לפלאס באיזור מסויים).

נבחין כי עבור השפה נקבל:

$$u_3|_\Gamma = u_1|_\Gamma - u_2|_\Gamma = \tilde{u} - \tilde{u} = 0$$

כלומר היא לא מקיימת כבר את תנאי השפה, כמו כן, ממשפט גאוס אנו יודעים כי אם $\vec{A}$ שדה וקטורי אזי:

$$\iiint_V \nabla \vec{A} \mathrm{d}V = \oiint_\Gamma \vec{A} \cdot \hat{n} \mathrm{d}\sigma$$

אם ניקח פוטנציאל $\varphi(\vec{r})$, נגדיר את A באופן הבא:

$$\vec{A} = \varphi \nabla \varphi$$

נקבל ממשפט גאוס כי:

$$\iiint_V \left(\varphi \nabla^2 \varphi + \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi\right) \mathrm{d}V = \oiint_\Gamma \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \mathrm{d}\sigma$$

נציב $\varphi = u_3$ ולכן:

$$\iiint_V \left[\cancelto{0}{u_3 \nabla^2 u_3} + (\nabla u_3)^2\right] \mathrm{d}V = \oiint_\Gamma u_3 \frac{\partial u_3}{\partial n} \mathrm{d}\sigma$$

אבל ראינו כי כל השפה מתאפסת ולכן קיבלנו:

$$\iiint_V (\nabla u_3)^2 \, \mathrm{d}V = 0$$

אבל האינטגרל הזה תמיד חיובי (כיוון שיש ריבוע) ולכן בהכרח

$$\nabla u_3 = 0 \Rightarrow u_3 = \text{const}$$

ומתנאי השפה: $u_3 = 0$. ולכן: $u_1 = u_2$. ■

מה קורה אם אנו מדברים על בעיית נוימן? (Neumann)

הפעם תנאי השפה הוא $\frac{\partial u}{\partial n}\big|_\Gamma = \tilde{U}$, הפעם אגף ימין של משפט גאוס יתאפס מסיבה אחרת ($\oiint_\Gamma u_3 \underbrace{\frac{\partial u_3}{\partial n}}_{=0} \mathrm{d}\sigma = 0$)

אבל הפעם לא נקבל פיתרון יחיד, כיוון ש$u_3 = \text{const}$ אשר לא בהכרח אפס. לכן נגיד שהפתרון נכון בדיוק של קבוע, כלומר: $u_1 = u_2 + C$ כלשהו.

4.7.4.2 פתרון במימד 1

קרטזיות

$$\nabla^2 u = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} = 0 \Rightarrow u = Ax + B$$

גליליות

$$\frac{1}{\rho} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\rho}\right) = 0 \Rightarrow \rho \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\rho} = c_1 \Rightarrow \mathrm{d}u = c_1 \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}\rho} = u = c_1 \ln \rho + c_2$$

כדוריות

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}r}\right)=0\Rightarrow u=\frac{c_1}{r}+c_2$$

4.7.4.3 פתרון עבור חצי מישור

נרצה לפתור מערכת עבור חצי מישור($y\geq 0$) כאשר $u(x,y=0)=f(x)$ ומתקיימת משוואת לפלאס: $\nabla^2 u=0$.
כלומר:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

במקרה זה ניתן לפתור בעזרת טרנספורם פורייה, אבל במקרים של גיאומטריות מסובכות יותר זה לא יהיה המצב.
לכן נפתור בהפרדת משתנים, כלומר:

$$u_p(x,y)=X(x)Y(y)$$

נקבל:

$$X''Y+XY''=0$$

כלומר:

$$\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=-\lambda^2$$

למה $-\lambda^2$ (כלומר למה שלילי?) כי אנו נקבל עבור X:

$$X''+\lambda^2 X=0$$

ואנו רוצים פתרון חסום, ובאמת נקבל:

$$X(x)=A_\lambda\cos(\lambda x)+B_\lambda\sin(\lambda x)$$

עבור Y נקבל:

$$Y''-\lambda^2 Y=0$$

במקרה זה נקבל כי הפתרון הוא:

$$Y=C_\lambda e^{-\lambda Y}+D_\lambda e^{\lambda Y}$$

אם האיבר השני יש לנו בעיה (עם המקדם של D_λ יש לנו בעיה כי הפתרון מתבדר באינסוף, ויש לנו תנאי שפה שלא ציינו שאנו רוצים פתרון חסום) ולכן:

$$Y=C_\lambda e^{-\lambda Y}$$

כלומר נקבל:

$$u_\lambda(x,y)=(a_\lambda\cos(\lambda x)+b_\lambda\sin(\lambda x))\,e^{-\lambda y}$$

כאשר:

$$\begin{aligned}a_\lambda &= A_\lambda C_\lambda\\ b_\lambda &= B_\lambda C_\lambda\end{aligned}$$

נבחין כי אין לנו כל הגבלה על λ, כלומר לא מדובר באוסף דיסקרטי, לכן אם נרצה פתרון כולל נאלץ לעשות אינטגרל ולא סכימה על λ.

כמו כן, קצת הדעיכה של כל מוד, תלוי בקצת האוסילציות, אוסילציות צפופות יותר דועדכות "מהר" יותר ביחס ל y.

נפתור את הבעיה עם תנאי השפה (כאשר אנו מדברים על פתרונות ספרביליים, אנו מתעלמים מכל תנאי שפה שהוא לא הומוגני, אז גם כאן):

$$u(x,y)=\int_{0}^{\infty}\left(a_\lambda\cos(\lambda x)+b_\lambda\sin(\lambda x)\right)e^{-\lambda y}\mathrm{d}\lambda$$

נציב $y=0$ ונשתמש בתנאי השפה:

$$f(x)=u(x,0)=\int_{0}^{\infty}a_\lambda\cos(\lambda x)+b_y\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}\lambda$$

נכפול את שני האגפים ב $\cos(\lambda' x)$ כאשר $\lambda'>0$ כלשהו ונטנגרל לפי לפי x נקבל:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos(\lambda' x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}a_\lambda\cos\lambda x\cos\lambda' x+b_\lambda\sin\lambda x\cos\lambda' x\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}x$$

נפתור ראשית את האינטגרל החלקים, נבחין כי:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sin(\lambda x)\cos(\lambda' x)\,\mathrm{d}x=0$$

(מדובר בפונקציה אי זוגית.)

כמו כן:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos(\lambda x)\cos(\lambda' x)\,\mathrm{d}x=$$

נשתמש בזהות: $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right]$ ונקבל:

$$\frac{1}{2}\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty}\cos\left[(\lambda+\lambda')x\right]\mathrm{d}x}_{\to 0}+\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\left[(\lambda-\lambda')x\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(\lambda-\lambda')x}\mathrm{d}x=$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left[2\pi\delta(\lambda-\lambda')\right]=\pi\delta(\lambda-\lambda')$$

אנו מניחים כאן כי אינטגרל של $\cos(\lambda x)$ עבור $\lambda>0$, מתאפס בגלל שלכל שטח חיובי יש שטח שלילי המאפס אותה. מכיוון ש $\lambda,\lambda'>0$ אזי הביטוי הראשון מתאפס, וגם לכל $\lambda\neq\lambda'$ הביטוי מתאפס. ולכן נקבל כי:

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos(\lambda' x)\,\mathrm{d}x=\int_{0}^{\infty}a_\lambda\pi\delta(\lambda-\lambda')\,\mathrm{d}\lambda=\pi a_{\lambda'}$$

לכן, נקבל כי:

$$a_\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos(\lambda x)\,\mathrm{d}x$$

אם במקום $\cos(\lambda' x)$ היינו בוחרים $\sin(\lambda' x)$ היינו מקבלים:

$$b_\lambda=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin(\lambda x)\,\mathrm{d}x$$

$$u(x,y)=$$
$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{n8} f(x')\cos(\lambda x')\,\mathrm{d}x'\right]e^{-\lambda y}\cos\lambda x\mathrm{d}\lambda+\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x')\sin(\lambda x')\,\mathrm{d}x'\right]e^{-\lambda y}\sin\lambda x\mathrm{d}\lambda=$$
$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x')\int_0^{\infty}\cos\left[(x-x')\lambda\right]e^{-\lambda y}\mathrm{d}\lambda\mathrm{d}x'=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x')\frac{y}{(x-x')^2+y^2}\mathrm{d}x'$$

הערה 4.7.3

$$\int_0^{\infty}\cos(\alpha z)\,e^{-z}\mathrm{d}z$$

ניתן לחישוב באינטגרציה בחלקים. ולכן קיבלנו את התוצאה שרצינו.
למעשה קיבלנו קונבולוציה עם פונקצה

$$G(x,x',y)=\frac{1}{\pi}\frac{y}{(x-x')^2+y^2}$$

זוהי פונקציית גרין!

נבחין כי היא בעצמה פותרת את משוואת לפלאס. נקח $f(x)=\delta(x-x_0)$ נקבל:

$$u_\delta(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x'-x_0)\frac{y}{(x-x')^2+y^2}\mathrm{d}x'=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{y}{(x-x_0)^2+y^2}$$

איך פותרים את זה בעזרת טרנספורם פורייה, נצטרך להפעיל אותו ביחס לx, כי x משתנה ממינוס אינסוף לאינסוף, וטרנספורם פורייה צריך תווך אינסופי כזה.

נכפול בe^{ikx} ונעשה אינטגרציה ממינוס אינסוף לאינסוף, נקבל משוואה מסדר שני עבור y במרחב k, נפתור אותה, ונחזור בחזרה בעזרת טרנספורם הפוך.

4.7.4.4 רצועה אינסופית

במקום שנדבר על חצי מישור, נסתכל בתחום $0\le y\le L$. 17/01/2012

נשלים את זה בתרגול.

4.7.4.5 מלבן

נתבונן במקרה בו:

$$\begin{aligned}0 &\le x\le L_x\\ 0 &\le y\le L_y\end{aligned}$$

עם תנאי השפה:

$$\begin{aligned}u(x,y=0) &= f(x)\\ u(x=0,y)=u(x=L_x,y)=u(x,y=L_y) &= 0\end{aligned}$$

כאמור, פתרון פרטי למשוואת לפלאס הוא:

$$u_p(x,y) = (A_\lambda \cos(\lambda x) + B_\lambda \sin(\lambda x))\left(e^{-\lambda y} + C_\lambda e^{\lambda y}\right)$$

נבחין כי מהתנאי $y = L_y \Rightarrow u_p = 0$ נקבל:

$$e^{-\lambda L_y} + C_\lambda e^{\lambda L_y} = 0 \Rightarrow C_\lambda = -\frac{e^{-\lambda L_y}}{e^{\lambda L_Y}} = e^{-2\lambda L_y}$$

נקבל כי המשוואה כעת היא:

$$u_p(x,y) = (A_\lambda \cos(\lambda x) + B_\lambda \sin(\lambda x)) \sinh\left[\lambda (L_y - y)\right]$$

מתנאי השפה $x = 0 \Rightarrow u_p = 0$ נקבל כי $A_\lambda = 0$.

והמתנאי $x = L_\lambda \Rightarrow u_p = 0$ נקבל כי:

$$B_\lambda \sin(\lambda L_x) = 0$$

ולכן:

$$\lambda_n = \frac{\pi n}{L_x}$$

כלומר קיבלנו קוונטיזציה של המודים. ולכן:

$$u_n(x,y) = a_n \sin\left(\frac{\pi n x}{L_x}\right) \sinh\left[\frac{\pi n}{L_x}(L_y - y)\right]$$

ולכן:

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sinh\left[\frac{\pi n}{L_x}(L_y - y)\right] \sin\left(\frac{\pi n x}{L_x}\right)$$

כדי למצוא את המקדמים, נשווה עבור $y = 0$ לפונקציה $f(x)$ (כלומר תנאי השפה האחרון)

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \boxed{a_n \sinh\left(\frac{\pi n L_y}{L_x}\right)} \sin\left(\frac{\pi n x}{L_x}\right) = f(x)$$

כלומר:

$$a_n \sinh\left(\frac{\pi n L_y}{L_x}\right) = \frac{2}{L_x}\int_0^{L_x} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L_x}\right) \mathrm{d}x$$

נקבל:

$$a_n = \frac{2}{L_x \sinh\left(\frac{\pi n L_y}{L_x}\right)} \int_0^{L_y} f(x) \sin\left(\frac{\pi n x}{L_x}\right) \mathrm{d}x$$

כעת נתבונן במקרה בו $u_p(x, y = L_y) = g(x)$ ו: $u_p(x, y = 0) = 0$ (כלומר שיקוף). ברור כי הפתרון יהיה זהה.
נקרא לפתרון של הבעיה הראשונה עם $f(x)$, $u_1(x,y)$ לשניה נקרא $u_2(x,y)$.
הפתרון לבעיה שגם עם $g(x)$ וגם עם $f(x)$ הוא:

$$u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y)$$

ברור כי הוא מקיים את תנאי השפה, ונבחין שכל אחד מהם גם פותר את משוואת לפלאס, לכן גם הסכום שלהם.

וכדי לסבך את העניין עוד יותר, גם בצלעות הנוספות נגדיר פונקציות $u_p(x = 0, y) = h(y)$ ו: $u_p(x = L_x, y) = \mu(y)$. שוב, נפתור גם עבור המקרים האלה, ונקבל כי הפתרון הוא:

$$u(x,y) = u_1(x,y) + u_2(x,y) + u_3(x,y) + u_4(x,y)$$

4.7.4.6 מעגל

נעבוד בקואורדינטות פולאריות

$$u\left(r,\theta\right)$$

אנו יודעים כי הלאפלסיאן בקואורדינטות פולאריות הוא:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0$$

נפתור על ידי הפרדת משתנים:

$$u_p\left(r,\theta\right)=\rho\left(r\right)\Theta\left(\theta\right)$$

נציב במשוואה ונקבל:

$$\rho''\left(r\right)\Theta\left(\theta\right)+\frac{1}{r}\rho'\left(r\right)\Theta\left(\theta\right)+\frac{1}{r^2}\Theta''\left(\theta\right)=0$$

נכפול את שני האגפים ב $\frac{r^2}{\rho\Theta}$ ונקבל:

$$r^2\frac{\rho''\left(r\right)}{\rho}+r\frac{\rho'\left(r\right)}{\rho}+\frac{\Theta''\left(\theta\right)}{\Theta}=0$$

כלומר:

$$r^2\frac{\rho''\left(r\right)}{\rho}+r\frac{\rho'\left(r\right)}{\rho}=-\frac{\Theta''\left(\theta\right)}{\Theta}=\lambda^2$$

קבוע ההפרדה הוא מספר חיובי. למה?

$$\Theta''\left(\theta\right)+\lambda^2\Theta\left(\theta\right)=0$$

אם הקבוע היה שלילי, היינו מקבלים פתרון שהוא שני אקספוננטים, והוא בחיים לא יקיים את תנאי השפה ההומוגניים.

$$\begin{aligned}\lambda\neq 0: &\qquad \Theta\left(\theta\right)=A\cos\left(\lambda\theta\right)+B\sin\left(\lambda\theta\right)\\ \lambda=0: &\qquad \Theta\left(\theta\right)=C+D\theta\end{aligned}$$

ועבור ρ, נקבל:

$$r^2\rho''\left(r\right)+r\rho'\left(r\right)-\lambda^2\rho\left(r\right)=0$$

משוואה מסוג זה נקראת משוואת אויילר.
ננחש פתרון:

$$\lambda\neq 0: \qquad \rho\left(\theta\right)=r^{\mu}$$

נקבל:

$$\mu\left(\mu-1\right)r^{\mu}+\mu r^{\mu}-\lambda^2 r^{\mu}=0$$

נקבל:

$$\mu^2-\lambda^2=0$$

לכן:

$$\mu_1=\lambda,\qquad \mu_2=-\lambda$$

ולכן הפתרון הוא:

$$\rho(r) = C_1 r^{\lambda} + C_2 r^{-\lambda}$$

במקרה בו $\lambda = 0$ נקבל:

$$r^2\rho'' + r\rho' = 0$$

נחלק ב r נקבל:

$$r\rho'' + \rho' = 0$$

ולכן:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r\rho') = 0$$

כלומר:

$$r\rho' = C_3 \Rightarrow \rho' = \frac{C_3}{r} \Rightarrow \rho(r) = C_3 \ln r + C_4$$

כלומר, הפתרון שלנו עבור $\lambda \neq 0$ הוא:

$$u_{\lambda}(r,\theta) = \left(C_1 r^{\lambda} + C_2 r^{-\lambda}\right)\left(A_{\lambda}\cos(\lambda\theta) + B_{\lambda}\sin(\lambda\theta)\right)$$

ואילו עבור $\lambda = 0$:

$$u_0(r,\theta) = (C_3 \ln r + C_4)(C + D\theta)$$

בעיה פנימית נפתור עבור הפנים של המעגל. נבחין כי:

$$C_2 = 0$$

אחרת נקבל פתרון מתבדר בסביבת $r = 0$.
מכיוון שאנו צריכים ש θ תהא מחזורית, נקבל כי $\lambda \neq 0$ ולכן: $n\frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi$ ולכן $\lambda = n$ כאשר $n = 1, 2, 3, \ldots$.
הפתרון היחידי שאפשרי עבור $\lambda = 0$ הוא:

$$u_0(r,\theta) = A_0$$

$C_3 = 0$ גם בגלל הקטע של התבדרות בסביבת 0 .
ולכן:

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \left(A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta)\right)$$

נגדיר את הקוטר של המעגל כR.
נוסיף תנאי שפה:

$$u(r=R,\theta) = \tilde{u}(\theta)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} R^n \left(A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta)\right) = \tilde{u}(\theta)$$

עבור $n \geq 1$ נקבל:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} \tilde{u}(\theta)\cos(n\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ B_n &= \frac{1}{\pi R^n}\int_0^{2\pi} \tilde{u}(\theta)\sin(n\theta)\,\mathrm{d}\theta \end{aligned}$$

בעיה חיצונית בנוסף, יש לנו סגנון נוסף של בעיה. בעיה חיצונית. לדוגמה עיגול המכיל מטענים. מחוץ לעיגול אין לנו מטענים. נרצה למצוא את הפוטנציאל מחוץ במרחב מחוץ לעיגול כאשר על העיגול יש לנו תנאי שפה: $u\mid_{\gamma}=\tilde{u}$.

נקבל את התנאים הבאים:

$$\begin{aligned} C_1 &= 0 \\ C_2 &\neq 0 \end{aligned}$$

(התבדרות באינסוף)

כמו כן, $C_3=0$ מכיוון שלוג מתאפסת באינסוף. שוב נקבל $\lambda=n$. ושוב $D=0$ כדי לשמור על מחזוריות θ. ולכן:

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty} r^{-n}\left(A_n\cos(n\theta)+B_n\sin(n\theta)\right)$$

19/01/2012 (המקדמים הם כמובן שונים ונמצא אותם באותו דרך רק עם R^{-n} ולא R^n)

טבעת נתבונן עכשיו במקרה של טבעת עם רדיוס פנימי R_1 ורדיוס חיצוני R_2. נרצה לפתור את המשוואה לפנים הטבעת. המשוואה שלנו כעת היא:

$$\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0$$

עם תנאי השפה:

$$\begin{aligned} u(R_1,\theta) &= g_1(\theta) \\ u(R_2\theta) &= g_2(\theta) \end{aligned}$$

איך אנחנו פותרים אותה? שוב, הפרדת משתנים כמובן. הפתרון זהה לדוגמה הקודמת, ולכן אנו יודעים כי הפתרון הוא:

$$\begin{aligned} \lambda=0: &\qquad (a+b\ln z)(c+d\theta) \\ \lambda>0: &\qquad \left(Ar^{\lambda}Br^{-\lambda}\right)\left(C\cos(\lambda\theta)+D\sin(\lambda\theta)\right) \end{aligned}$$

גם הפעם $d\theta$ נפסל מכיוון שהוא לא מחזורי, אבל b לא מתאפס, כיוון ש0 ו∞ מחוץ לתחום. ולכן: $a_0+b_0\ln r$ הוא בהחלט פתרון (כאשר $a_0=ac,\ b_0=bc$).

נזכור $\lambda=n$, ראינו עבור $n=0$ קיבלנו כבר, עבור $n>0$ נקבל:

$$\left(a_nr^n+b_nr^{-n}\right)\cos(n\theta)+\left(c_nr^n+d_nr^{-n}\right)\sin(n\theta)$$

ולכן:

$$u(r,\theta)=a_0+b_0\ln r+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_nr^n+b_nr^{-n}\right)\cos(n\theta)+\left(c_nr^n+d_nr^{-n}\right)\sin(n\theta)$$

נשתמש בתנאי השפה. כאשר $r=R_1$ נקבל:

$$a_0+b_0+\ln R_1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(a_nR_1^n+b_nR_1^{-n}\right)\cos(n\theta)+\left(c_nR_1^n+d_nR_1^{-n}\right)\sin(n\theta)\right]=g_1(\theta)$$

וכאשר $r=R_2$:

$$a_0+b_0+\ln R_2+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(a_nR_2^n+b_nR_2^{-n}\right)\cos(n\theta)+\left(c_nR_2^n+d_nR_2^{-n}\right)\sin(n\theta)\right]=g_2(\theta)$$

נבצע אינטגרציה על 2π, נבחין כי הcos ו sin מתאפסים באינטגרציה, ולכן נקבל:

$$a_0+b_0\ln R_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_1(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$
$$a_0+b_0R_2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g_2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

כעת נתייחס למקדמים של הcos והsin כמקדמי פורייה, ולכן נקבל את המשוואות:

$$a_nR_1^n+b_nR_1^{-n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_1(\theta)\cos(n\theta)\,\mathrm{d}\theta$$
$$a_nR_2^n+b_nR_2^{-n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_2(\theta)\cos(n\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

ועבור ה sin נקבל:

$$c_nR_1^n+d_nR_1^{-n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_1(\theta)\sin(n\theta)\,\mathrm{d}\theta$$
$$c_nR_2^n+d_nR_2^{-n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_2(\theta)\sin(n\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

גזרה נתבונן כעת במקרה של גזרה של עיגול ברדיוס R וזווית גזרה α תחת תנאי השפה:

$$\begin{aligned} u(R,\theta) &= g(\theta)\\ u(r,0) &= 0\\ u(r,\alpha) &= 0 \end{aligned}$$

נקבל כי כל הפתרון עבור $\lambda=0$ מתאפס. כיוון שהוא לא יקיים את התנאי שפה ההומוגנים. כמו כן גם $Br^{-\lambda}$ נופל בגלל התבדרות בסביבת 0. נקבל:

$$A^{\lambda}\left(C\cos(\lambda\theta)+D\sin(\lambda\theta)\right)$$

מתנאי השפה ההומוגנים עבור $\theta=0$ נקבל כי הcos מתאפס, וכיוון שאנו צריכים שגם יתאפס בזווית α נקבל כי $\lambda\alpha=\pi n$ ולכן נקבל:

$$\begin{aligned} u_n(r,\theta) &= a_nr^{\lambda n}\sin(\lambda_n\theta)=a_nr^{\frac{\pi n}{\alpha}}\sin\frac{\pi n\theta}{\alpha}\\ u(r,\theta) &= \sum_{n=1}^{\infty}a_nr^{\frac{\pi n}{\alpha}}\sin\frac{\pi n\theta}{\alpha}=a_1r^{\frac{\pi}{\alpha}}\sin\frac{\pi\theta}{\alpha}+a_2r^{\frac{2\pi}{\alpha}}\sin\frac{2\pi\theta}{\alpha}+\dots \end{aligned}$$

$$u(R,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nR^{\frac{\pi n}{\alpha}}\sin\frac{\pi n\theta}{\alpha}=g(\theta)$$

$$a_nR^{\frac{\pi n}{\alpha}}=\frac{2}{\alpha}\int_0^{\alpha}g(\theta)\sin\frac{\pi n\theta}{\alpha}\mathrm{d}\theta\Rightarrow a_n=\frac{2}{\alpha R^{\frac{\pi n}{\alpha}}}\int_0^{\alpha}g(\theta)\sin\frac{\pi n\theta}{\alpha}\mathrm{d}\theta$$

ולכן:

$$u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\dots$$

הערה 4.7.4 ברוך מחק את הלוח אין את סוף המשוואה

פרק 5

חשבון וריאציות

5.1 מבוא

נרצה לבחון את המקרה הבא:

בהינתן 2 נקודות, A, B כאשר B נמצאת "מתחת" ל A (כלומר גרוויטציה מושכת לB) אבל B לא ניצבת על ציר ה y וA בראשית.

נרצה למצוא את המסלול המהיר ביותר כך שחלקיק יעבור מA לB (הנמצאת ב (x_0, y_0)). משימור אנרגיה:

$$\frac{mv^2}{2} + mgy = \text{const}$$

נקבל:

$$\frac{\cancel{m}v^2}{2} + \cancel{m}gy = 0 \Rightarrow v = \sqrt{-2gy}$$

(בהנחה שהמהירות ברגע 0 הייתה 0).

נסמן אלמנט קטן של המסילה ב $\mathrm{d}s$, נבחין כי:

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

אנו רוצים למצוא את $\mathrm{d}t$ כלומר:

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}s}{v}$$

נקבל כי:

$$T_{A\to B} = \int_A^B \frac{\mathrm{d}s}{v}$$

כמו כן, $\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \mathrm{d}x\sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}$.

$$T = \int_0^{x_0} \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2} \frac{1}{\sqrt{-2gy(x)}}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{x_0} \sqrt{\frac{1 + (y')^2}{-y}}\mathrm{d}x$$

נתבונן באינטגרל, נכליל ונסמן:

$$I[y(x)] = \int_a^b F(x, y, y')\,\mathrm{d}x$$

לאינטגרל הנ"ל קוראים פונקציונל (פונקציה של פונקציות).

הערה 5.1.1 פונצקיה מעבירה ממספר למספר, אופרטור מעביר מפונקציה לפונקציה (כגון האופרטור הדיפרנציאלי), פונקציונל לוקח פונקציה ונותנת מספר.

נתבונן בפונקציונל $I[y(x)]$, ונחליף את $y(x) \mapsto y(x)+\varepsilon\eta(x)$ (ל $\varepsilon\eta(x)$ קוראים וריאציה, נרצה שהיא תהא קטנה). נרצה לבחון את:

$$I[y(x)+\varepsilon\eta(x)]$$

24/01/2012 נשווה את הדבר למציאת מקסימום ומינימום של פונקציה.

5.2 משוואות אוילר לגראנז'

נרצה למצוא את נקודות האקסטרימום (כלומר, מקסימום, מינימום, סטציונריות).

בנקודה סטציונרית מתקיים כי אם נזוז $\mathrm{d}x$ מנקודה x_0 אזי הפונקציה $f(x)$ תשתנה "מעט"

הערה 5.2.1 מפיתוח טיילור בסביבת x_0 נקבל:

$$f(x)=f(x_0)+\underbrace{f'(x)}_{=0}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+o\left(x^2\right)$$

נפתח את הפונקציונאל בנקודת האקסטימום:

תהי $y(x)$ (פונקציה) נקודת אקטרימום של I, נוסיף $\Delta y(x)=\varepsilon\eta(x)$ (פונקציית שינוי ב $y(x)$) ונחשב את $I[y(x)+\varepsilon\eta(x)]$ לעומת $I[y(x)]$.

נבחין כי כאשר $\varepsilon\to 0$ נצפה כי: $I[y(x)+\varepsilon\eta(x)]\to I[y(x)]$.

$$I[y(x)+\varepsilon\eta(x)]=\int_a^b F(x,y+\varepsilon y,y'+\varepsilon y')\,\mathrm{d}x \underbrace{=}_{\text{לינאריות}} \int_a^b F(x,y,y')\,\mathrm{d}x+\varepsilon\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta+\frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\right)\mathrm{d}x+o\left(\varepsilon^2\right)$$

כעת, נדרוש כי מתקיים לכל $\eta(x)$:

$$\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial y}\eta+\frac{\partial F}{\partial y'}\eta'\right)\mathrm{d}x=0$$

(כיוון שאנחנו רוצים נקודם אקסטרימום, הסדר הראשון צריך להתאפס).

מאינטגרציה בחלקים:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\eta\right|_a^b+\int_a^b\left[\frac{\partial F}{\partial y}\eta+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta\right]\mathrm{d}x\stackrel{!}{=}0$$

כמו כן, נדרוש כי $\eta(a)=\eta(b)=0$ (אנו חייבים להתחיל ולסיים בנקודות הנתונות) ולכן:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\eta\right|_a^b=0$$

כלומר נקבל כי:

$$\int_a^b\left(\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta(x)\,\mathrm{d}x=0$$

וכדי שזה יתקיים נדרוש כי:

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}=0}$$

זוהי משוואת אויילר לגראנז' - Euler-Lagrange eqn..

נבחין כי זוהי משוואה דיפרנציאלית חלקית מסדר שני עם שני תנאי שפה:

$$\begin{aligned} y(a) &= y_a \\ y(b) &= y_b \end{aligned}$$

נרצה לבחות את משוואת אויילר לגראנז'. נחלק אותה לשני מקרים:

1. $F=F(x,y')$ ואז מתקיים כי: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$ מכאן: $\frac{\partial F}{\partial y'}=C_1$
2. $F=F(y,y')$. במקרה זה אף אחד מחלקי המשוואה לא מתאפס. נפתור את המשוואה:

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}=0\underbrace{\Longrightarrow}_{y'\text{ נכפול ב}} y'\frac{\partial F}{\partial y}-y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}=0\Rightarrow y'\frac{\partial F}{\partial y}-y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}-y''\frac{\partial F}{\partial y'}+y''\frac{\partial F}{\partial y'}=0\Rightarrow$$

$$y'\frac{\partial F}{\partial y}+y''\frac{\partial F}{\partial y'}-\underbrace{y''\frac{\partial F}{\partial y'}-y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\partial F}{\partial y'}}=0$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x,y,y')=\underbrace{\cancelto{0}{\frac{\partial F}{\partial x}}}_{F(y,y')}+\underbrace{\frac{\partial F}{\partial y}y'+\frac{\partial F}{\partial y'}y''}_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)}\Rightarrow\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x,y,y')-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(F-y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right)=0$$

כלומר, נקבל:

$$F(y,y')-y'\frac{\partial F}{\partial y'}=C_1$$

3. $F=F(x,y)$ - לא נדון במקרה זה.

נחזור לבעיית ברנולי, ראינו כי:

$$I(y)=\int_0^{x_0}\sqrt{\frac{1+(y')^2}{-y}}\mathrm{d}x$$

בנקודת $\min I(y)$ מתקיים:

$$F(y,y')=\sqrt{\frac{1+(y')^2}{-y}}$$

נבחין כי זהו המקרה השני, ולכן:

$$\frac{1}{\sqrt{-y\left(1+(y')^2\right)}}=\mathrm{const}$$

31/01/2012

פרק 6

משוואות אינטגרליות

הערה 6.0.2 החומר הנ"ל לא יופיע במועד א'!

בדומה למשוואות דיפרנציאליות, רק הפעם במקום שהפונקציה תופיע תחת דיפרנציאל, הפונקציה תופיע תחת אינטגרל. משוואה כללית היא:

$$\lambda\int_a^b K(x,y)\,f(y)\,\mathrm{d}y+g(x)=h(x)\,f(x)$$

$K(x,y)$ היא הגרעין והיא פונקציה נתונה, וg,h גם הן פונקציות נתונות. ויש לנו מספר λ המשחק תפקיד של פרמטר, או ליתר דיוק משחק תפקיד ערך עצמי.

ל$\int_a^b K(x,y)\,f(y)\,\mathrm{d}y$ קוראים אופרטור אינטגרלי.

למשוואות מסוג זה קוראים Fredholm's eqn. ישנם שני סוגים של משוואות כנל:

1. $h(x)=0$ כלומר, משוואה מהסגנון:

$$\lambda\int_a^b K(x,y)\,f(y)\,\mathrm{d}y=-g(x)$$

   דהיינו, f מופיעה רק בתוך האינטגרל. האם אפשר למצוא את $f(y)$?

2. $h(x)\neq 0$. בד"כ ניתן להניח כי $h(x)=1$, כיוון שאפשר לחלק ב $h(x)$ בשני אגפים ונקבל $\tilde{g}(x)$ חדש וגם $\tilde{K}(x,y)$ חדש (מותר להכניס לתוך האינטגרל כי הוא בכלל על y)
   וזוהי נקראת משווה מהסוג השני.

$g(x)$ יקבע האם מדובר במשוואה הומוגנית או לא הומוגנית, בדומה למשוואות דיפרנציאליות. אם $g(x)=0$ אזי המשוואה הומוגנית, אחר היא אי הומוגנית.

6.1 גרעין מנוון - Degenerate Kernel

מה זה גרעין מנוון בקואורדינטות קרטזיות? גרעין מנוון הוא כאשר ניתן לבטא את הגעין באופן הבא:

$$K(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x)\,\psi_i(y)$$

במקרה של $n=1$ נקבל:

$$K(x,y)=\varphi_1(x)\,\psi_1(y)$$

כלומר, ספרבילי.

במקרה של $n=2$ נקבל:

$$K\left(x,y\right)=\varphi_1\left(x\right)\psi_1\left(y\right)+\varphi_2\left(x\right)\psi_2\left(y\right)$$

כלומר לא ממש ספרבילי, אלא חיבור של שני ספרבילים.

דוגמה 6.1.1 :

$$f(x)=1-6x^2+\lambda\int_{-1}^{1}\left(x^{1/3}+y^{1/3}\right)f(y)\,\mathrm{d}y$$

זוהיא משוואה מהסוג השני, לא הומוגנית, עם גרעין מנוון $x^{1/3}+y^{1/3}$ עבור $n=2$ כאשר:

$$\varphi_1(x)=x^{1/3}\qquad \psi_1(y)=1$$
$$\varphi_2(x)=1\qquad \psi_2(y)=y^{1/3}$$

נבחין כי אנו יודעים הרבה דברים על הפתרון מכיוון ש:

$$=1-6x^2+\lambda x^{1/3}\underbrace{\int_{-1}^{1}f(y)\,\mathrm{d}y}_{A}+\lambda\underbrace{\int_{-1}^{1}y^{1/3}f(y)\,\mathrm{d}y}_{B}$$

מה אנחנו יודעים?
נניח כי הפתרון קיים, אם אנו יודעים את הפונקציה והאינטגרלים הנ"ל קיימים אזי הם פשוט מספרים. ניתן להם שמות כמתואר מעלה. כלומר:

$$=1-6x^2+\lambda Ax^{1/3}+\lambda B$$

אבל נזכור את הגדרת A,B ונקבל כי:

$$\begin{cases}A=\int_{-1}^{1}\left(1-6y^2+\lambda Ay^{1/3}+\lambda B\right)\mathrm{d}y\\ B=\int_{-1}^{1}\left(y^{1/3}-6y^{7/3}+\lambda Ay^{2/3}+\lambda By^{1/3}\right)\mathrm{d}y\end{cases}$$

כלומר קילבנו 2 משוואות עם שני נעלמים. נרצה לחשב את האינטגרלים. למעשה ה-λ תקבע האם למשוואות הנ"ל יש או אין פתרון.
נפתור את האינטגרלים:

$$\begin{aligned}A&=2-6\frac{2}{3}+2\lambda B\\ B&=\frac{3}{5}\lambda A\cdot 2\end{aligned}$$

$$\begin{cases}A+2\lambda B=2\\ \frac{6}{5}\lambda A-B=0\end{cases}$$

הדטרמיננטה הראשית היא:

$$\Delta=\begin{vmatrix}-1 & 2\lambda\\ \frac{6}{5}\lambda & -1\end{vmatrix}1-\frac{12}{5}\lambda^2$$

$$\begin{aligned}\Delta_A&=\begin{vmatrix}2 & 2\lambda\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-2\\ \Delta_B&=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ \frac{6\lambda}{5} & \end{vmatrix}=-\frac{12\lambda}{5}\end{aligned}$$

נבחן ראשית את המקרים בהם $\Delta\neq 0$ כלומר: $\lambda\neq\pm\sqrt{\frac{5}{12}}$ נקבל כי:

$$\begin{aligned}A&=\frac{\Delta_A}{\Delta}=-\frac{2}{1-\frac{12}{5}\lambda^2}\\ B&=-\frac{12\lambda}{5\left(1-\frac{12}{5}\lambda^2\right)}\end{aligned}$$

מה קורה כאשר $\lambda=\pm\sqrt{\frac{5}{12}}$? כלומר שהדטרמיננטה הראשית מתאפס. במקרה זה הדטרמיננטות עזר לא מתאפסות, זה אומר שלבעיה המקורית אין פתרון. אם גם אחת מהדטרמיננטות עזר הייתה מתאפסת אזי ישנה אפשרות של

אז מה הקשר של λ לערך עצמי? נתבונן שוב בבעיה שפתרנו. כאמור היא בעיה אי הומוגנית. נתבונן בגרסה ההומוגנית של הדוגמה שלנו. לכל בעיה הומוגנית תמיד יש פתרון $f(x)=0$. השאלה היא האם קיים עוד פתרון. אם נחזור על כל הפיתוח נקבל כי למעשה אנו רק זורקים את ה2 מהמשוואה הראשונה כלומר נקבל את המשוואות ההומוגניות:

$$\begin{cases} A+2\lambda B=0 \\ \frac{6}{5}\lambda A-B=0 \end{cases}$$

ברור ש$A=B=0$ פותר את המערכת משוואות. זהו הרי הפתרון ההומוגני. האם יש פתרון אחר? כן. וזה קורהכ רק כאשר הדטרמיננטה הראשית מתאפסת (אחרת הם בת"ל ולכן המקדמים חייבים להיות אפס, חזרה ללינארית 1). נבחין כי אם קיימים פתרונות נוספים אזי יהיו אינסוף כאלה (הרי הם תלויים לינארית, כל הכפלה בסקלר תיהיה גם היא פתרון). כמו כן, נשים לב כי יש שני מקרים כאלה, כאמור $\lambda=\lambda_1=\sqrt{\frac{5}{12}}$ ו- $\lambda=\lambda_2=-\sqrt{\frac{5}{12}}$.

עבור λ_1 נקבל כי: $B=\frac{A}{2\lambda}=\frac{A}{2\sqrt{\frac{5}{12}}}$. כלומר:

$$f(x)=\sqrt{\frac{5}{12}}Ax^{1/3}+\sqrt{\frac{5}{12}}\frac{A}{2\sqrt{\frac{5}{12}}}=A\left(\sqrt{\frac{5}{12}}x^{1/3}+\frac{1}{2}\right)$$

באופן דומה, ניתן לפתח עבור λ_2. נקבל פתרון קצת שונה, אבל אותו עיקרון.