מבוא ללוגיקה - 80423

אור דגמי, or@digmi.org

25 בינואר 2013

אתר אינטרנט: http://digmi.org
סיכום הרצאות של פרופ' אליהו ריפס בשנת לימודים 2013.
הספר שבעיקר נשתמש בו הוא: Mathematical Logic/J.Shoenfield

תוכן עניינים

I שפת הלוגיקה 4

1 הגדרת השפה 5

1.1 רכיבים בשפה . . . 5
1.2 ביטויים לוגיים . . . 6
1.2.1 שמות עצם . . . 6
1.2.2 נוסחאות . . . 6
1.3 מבנה . . . 7
1.4 השמות . . . 7
1.5 דוגמאות . . . 8
1.6 משתנה חופשי . . . 9

2 שדות 14

2.1 אי־הבחנה בין $\mathbb{Q}$ ל $\mathbb{R}$ . . . 14
2.2 יחס סדר . . . 15
2.3 מבנה מספק נוסחה . . . 16
2.4 אקסיומות השדה . . . 16

3 מערכת הסק 17

3.1 קבוצת אקסיומות לוגיות . . . 17
3.2 כללי הסק . . . 18
3.3 קצת ממשפט השלמות של גדל . . . 23
3.4 כללים נוספים . . . 23

II טאוטולוגיה 24

4 משפט טאוטולוגיה 25

4.1 הערכה . . . 25
4.2 טאוטולוגיה . . . 26
4.3 פונקציית אורך . . . 27
4.4 משפט הטאוטולוגיה . . . 29

5 הוספת כמתים וכללים נוספים 35

5.1 הכנסת כמתים . . . 35
5.2 משפט ההצבה . . . 36
5.3 כלל הפילוג . . . 38
5.4 משפט הדדוקציה . . . 39
5.5 משפט הקבועים . . . 40
5.6 משפט השקילות . . . 42

6 משפט הוריאנט ומשפטי שיוויון 43
6.1 משפט הוריאנט 43
6.2 משפט השיוויון 44

7 צורת הקדומת 50
7.1 הגדרה 50
7.2 קיום צורת הקדומת 50

III שלמות 56

8 משפט השלמות של גדל 57
8.1 הוכחת משפט השלמות של גדל 57
8.2 קיום מבנה אם לא קיימת סתירה 58
8.3 משפט לינדנבאום 65

חלק I

שפת הלוגיקה

פרק 1

הגדרת השפה

22/10/2012

1.1 רכיבים בשפה

מאגר של שמות של משתנים נניח שמאגר שמות המשתנים הוא גדול כרצוננו. איננו מוגבלים בבחירת המשתנים בתוך השפה שלנו. משמע, נוכל להגדיר כמה משתנים שרק נרצה.

קבוצה של סמלי פונקציות וסמלי יחסים לכל סמל של פונקציה וכל סמל של יחס יש לנו מקומיות מוגדרת (חד מקומי\דו מקומי\n־מקומי ואפילו 0־מקומי).

הכוונה בפונקציה דו מקומית זה שניתן להציב בה שתי מקומות, לדוגמה $f(x,y)$. דוגמה לחד־מקומי: $g(x)$, ולתלת־מקומי $h(x,y,z)$. במקביל פונקציה אפס־מקומי k, שאינה תלויה במשתנים. למעשה, פונקציה אפס־מקומית היא **קבוע**.

באופן דומה, עם סמלי יחסים: $Q(a,b)$, $P(a)$, $R(a,b,c)$. ושוב, ניתן להגדיר יחס אפס־מקומי S, זה אולי נראה דבר חסר משמעות אבל הוא אפשרי.

לכל פונקציה אנו יודעים מה המקומיות שלה.

הערה 1.1.1 בשפה יש הגדרה של קיום פונקציה וקיום יחס. אבל אופן הפעולה שלהם וההגדרה המדוייקת שלהם הן לא חלק מהשפה.

קשרים לוגיים למעשה יש לנו כמה וכמה קשרים לוגיים:

- $\vee$ ־ דיסיונקציה (איווי בעברית, מלשון או). מדובר בקשר דו־מקומי.
- $\neg$ ־ שלילה.
- $\wedge$ ־ קוניונקצייה.
- $\&$
- $\rightarrow$
- $\longleftrightarrow$

כמתים בנוסף בשפה יש לנו כמה כמתים כגון:

- $\exists$ ־ מציין קיום.
- $\forall$ ־ מציין כולל.

ניתן, אנו נעשה זאת בקרוב, לקחת את הכמת של הקיום ובעזרתו לבטא את הכמת של כולל.

1.2 ביטויים לוגיים

אנחנו רוצים בעזרת הסמלים בשפה, לבטא ביטויים לוגים בעלי משמעות. יש לנו שני סוגים של ביטויים כאלה:

- שמות עצם (terms)
- נוסחאות (formulas)

1.2.1 שמות עצם

הגדרה 1.2.1 שם עצם: שם עצם מוגדר ע"י הכללים הבאים:

1. כל משתנה הוא שם עצם.
2. אם f הוא סמל פונקציה n־מקומי, ו $u_1, u_2, \dots, u_n$ הם שמות עצם אז: $f(u_1, u_2, \dots, u_n)$ הוא שם עצם.
3. שמות עצם מתקבלים רק ע"י שימוש בסעיפים א' וב'.

נבחין כי הגדרה זו היא רקורסיבית. אבל זו לא בעיה. מכיוון שאנו מגדירים "סדרת יצירה", כלומר היסטורייה רשומה של בניית אותו שם עצם.

כלומר, אם אנו לוקחים משתנה x אז הכל בסדר, הוא שם עצם. אם לא, אז במקרה של $f(u_1, \dots, u_n)$, אנו בוחנים איך u_1 נוצר, כיוון שהוא יהיה מוגדר ע"י:

$$\underbrace{u_1 = v_k \ \dots \ v_1}_{\text{סדרת יצירה של } u_1}$$

ובמקביל תהיה לנו סדרת יצירה של u_2 וכך עד u_n ולמעשה נקבל:

$$\underbrace{f(u_1, u_2, \dots, u_n) \quad \underbrace{u_n \ \dots}_{\text{סדרת יצירה של } u_n} \quad \underbrace{u_2 \ \dots}_{\text{סדרת יצירה של } u_2} \quad \underbrace{u_1 = v_k \ \dots \ v_1}_{\text{סדרת יצירה של } u_1}}_{\text{סדרת יצירה של } f(u_1, u_2, \dots, u_n)}$$

אם כך לכל שם עצם ניתן לייחס את האורך של סדרת היצירה שלו.

הערה 1.2.2 ייתכן שסדרת היצירה היא אינה יחידה, אבל אנו יכולים להתייחס לאורך בטור האורך הקצר ביותר.

אבל מה קורה עם הקבועים? מסעיף ב' אם c הוא קבוע אז למעשה הוא גם שם עצם. והסדרת יצירה שלו היא מאורך 1.

1.2.2 נוסחאות

הגדרה 1.2.3 נוסחאות:

1. אם P הוא סמל יחס n־מקומי, $u_1, u_2, \dots, u_n$ הם שמות עצם אז: $P(u_1, u_2 \dots u_n)$ הוא נוסחה.
2. אם A, B נוסחאות אז $A \vee B$ נוסחה.
3. אם A נוסחה אז $\neg A$ נוסחה.
4. אם A נוסחה ו x משתנה אז: $(\exists x) A$ היא נוסחה.

הערה 1.2.4 ב4 עשינו פעולת הטלת כמת, אנו אומרים לפי איזה משתנה A.

כמובן שגם כאן ההגדרה היא רקורסיבית וניתן לדבר על סדרת היצירה של הנוסחה באותו אופן כמו של שמות עצם.

הערה 1.2.5 נבחין כי שם עצם הוא אף פעם לא נוסחה, ונוסחה היא אף פעם לא שם עצם. החיתוך בין הקבוצות האלה הוא ריק.

הערה 1.2.6 נתבונן ביחס השיוויון, זהו יחס דו־מקומי. ואותו אנו כותבים בין המשתנים. כלומר $u_1 = u_2$ במקום $=(u_1, u_2)$ אשר מתבקש לפי סעיף 1, זאת אנו עושים על מנת להתאים עם יתר המתמטיקה.

1.3 מבנה

אנו פתחנו את השפה הזו על מנת לתאר תכונות של אובייקטים מתמטיים. אבל איך אנו משתמשים בזה?
קבענו קבוצות של סמלי פונקצייה וסמלי יחסים. קבוצה המכילה את אלה, $\langle\, P\ f \ldots \rangle$, נקראת סיגנטורה של השפה.
בחלק זה, נרצה להגדיר מהו מבנה מתמטי.
ראשית, הקבוצה של המבנה $\mathcal{M}$ (שתסומן $|\mathcal{M}|$), היא תמיד לא ריקה.
כעת, נניח ש f הוא סמל פונקציה n־מקומי:

$$f^{\mathcal{M}} : \underbrace{|\mathcal{M}| \times |\mathcal{M}| \times \ldots \times |\mathcal{M}|}_{n\text{פעמים}} \to |\mathcal{M}|$$

כלומר, אם אנו לוקחים n משתנים מקבוצת המבנה אז אנו מקבלים איבר שגם הוא בקבוצת המבנה, דהיינו, אם $a_1, a_2, \ldots, a_n \in |\mathcal{M}|$ אזי: $f^{\mathcal{M}}\left(a_1, a_2, \ldots, a_n\right) \in |M|$.
מה קורה אם מדובר בפונקציה 0־מקומית? במקרה זה כמובן שמתקיים: $c^{\mathcal{M}} \in |\mathcal{M}|$.
כעת, נבחן את P, סמל יחס n־מקומי. כלומר העתקה:

$$P^{\mathcal{M}} : \underbrace{|\mathcal{M}| \times |\mathcal{M}| \times \ldots \times |\mathcal{M}|}_{n\text{פעמים}} \to \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}$$

כאשר $\mathbb{T}$ מייצג אמת (true), ו $\mathbb{F}$ מייצג שקר (false), הקבוצה $\{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}$ נקראת קבוצת ערכי אמת.

הערה 1.3.1 זה כאשר אנו מדברים על לוגיקה דו־ערכית, יש לוגיקות שבהן יש יותר איברים לדוגמה גם $\mathbb{U}$ (undefined). בקורס נדון רק בלוגיקה דו־ערכית

כלומר, אם $a_1, \ldots, a_n \in |\mathcal{M}|$ אז: $P^{\mathcal{M}}\left(a_1, \ldots, a_n\right) = \begin{cases} \mathbb{T} \\ \mathbb{F} \end{cases}$ (אחד משניהם). ושוב המקרה של 0־מקומי יהיה $\mathbb{T}$ או $\mathbb{F}$ בלי קשר למשתנים.

1.4 השמות

השמה היא פונקציה $\sigma : \text{Var} \to |\mathcal{M}|$ כלומר, אנו מבצעים השמה של משתנה לתוך איבר במבנה.
כמו כן אנו יכולים לתת לכל שם עצם ערך בתוך אברי קבוצת המבנה. כלומר, נגדיר $\tilde{\sigma} : \text{Terms} \to |\mathcal{M}|$. אנו נעשה את זה בהתאם לאותם הסעיפים שהגדרנו את שם עצם.

1. אם שם עצם $u = x$ אז $\tilde{\sigma}\left(u\right) = \sigma\left(x\right)$.
2. אם $u = f\left(u_1, \ldots, u_n\right)$ אז: $\tilde{\sigma}\left(u\right) = f^{\mathcal{M}}\left(\tilde{\sigma}\left(u_1\right), \ldots, \tilde{\sigma}\left(u_n\right)\right)$.

כמו כן, נגדיר: $\overline{\sigma} : \text{Formulas} \to \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}$ באופן הבא:

1. אם $A = P\left(u_1, \ldots, u_n\right)$ אז: $\overline{\sigma}\left(A\right) = P^{\mathcal{M}}\left(\tilde{\sigma}\left(u_1\right), \ldots, \tilde{\sigma}\left(u_n\right)\right) \in \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}$.
2. אם $A = B \vee C$ אז: $\overline{\sigma}\left(A\right) = \overline{\sigma}\left(B \vee C\right) = \overline{\sigma}\left(B\right) \vee \overline{\sigma}\left(C\right)$.

הערה 1.4.1 נבחין כי האיווי השני (הירוק) הוא לא האיווי אשר מוגדר לנו בשפה, אלא על ערכי האמת. כלומר:

$$\begin{aligned} \mathbb{T} \vee \mathbb{T} &= \mathbb{T} \\ \mathbb{F} \vee \mathbb{F} &= \mathbb{F} \\ \mathbb{T} \vee \mathbb{F} &= \mathbb{T} \\ \mathbb{F} \vee \mathbb{T} &= \mathbb{T} \end{aligned}$$

3. אם $A=\neg B$ אז: $\overline{\sigma}\left(A\right)=\overline{\sigma}\left(\neg B\right)=\neg\overline{\sigma}\left(B\right)$.

הערה 1.4.2 שוב, השלילה השניה (הירוקה) היא על ערכי האמת, כלומר:

$$\begin{aligned}\neg\mathbb{T} &= \mathbb{F}\\ \neg\mathbb{F} &= \mathbb{T}\end{aligned}$$

4. אם $A=\left(\exists x\right)B$ אז: $\overline{\sigma}\left(A\right)=\bigvee_{a\in\left|\mathcal{M}\right|}\overline{\sigma\left[{}^{x}/{}_{a}\right]}\left(B\right)$.

הערה 1.4.3 ראשית נבחין כי הגדרנו כאן השמה חדשה: $\sigma\left[{}^{x}/{}_{a}\right]:\mathrm{Var}\to\left|\mathcal{M}\right|$. באופן הבא:

$$\begin{cases}\sigma\left[{}^{x}/{}_{a}\right]\left(x\right)=a\in\left|\mathcal{M}\right|\\ \sigma\left[{}^{x}/{}_{a}\right]\left(y\right)=\sigma\left(y\right) & \left(y\neq x\right)\end{cases}$$

אם קיים $a\in\left|\mathcal{M}\right|$ כך ש $\overline{\sigma\left[{}^{x}/{}_{a}\right]}\left(B\right)=\mathbb{T}$ אז $\bigvee_{a\in\left|\mathcal{M}\right|}\overline{\sigma\left[{}^{x}/{}_{a}\right]}\left(B\right)=\mathbb{T}$. לעומת זאת אם לכל $a\in\left|\mathcal{M}\right|$, $\overline{\sigma\left[{}^{x}/{}_{a}\right]}\left(B\right)=\mathbb{F}$ אז $\bigvee_{a\in\left|\mathcal{M}\right|}\overline{\sigma\left[{}^{x}/{}_{a}\right]}\left(B\right)=\mathbb{F}$.
וגם פה, האיווי הגדול, הוא על ערכי האמת (לא סומן בצבע אחר הפעם).

1.5 דוגמאות

נניח שהסיגנטורה מכילה סמל יחס דו־מקומי אחד, $\prec$. נתבונן במבנה $\mathscr{Z}$ כך ש $\left|\mathscr{Z}\right|=\mathbb{Z}$. כמו כן נניח ש $\prec^{\mathscr{Z}}=<$ (כלומר יחס הסדר הסטנדרטי בשלמים). נסמן גם כאן $x\prec y$ במקום $\prec\left(x,y\right)$. נגדיר השמה $\sigma:\mathrm{Var}\to\left|\mathscr{Z}\right|=\mathbb{Z}$ כך ש $\sigma\left(x\right)=7$ ו $\sigma\left(y\right)=5$.

$$\overline{\sigma}\left(x\prec y\right)=\tilde{\sigma}\left(x\right)\prec^{\mathscr{Z}}\tilde{\sigma}\left(y\right)=\sigma\left(x\right)<\sigma\left(y\right)=7<5=\mathbb{F}$$

דוגמה 1.5.1 : כעת נבחן את $\left(\exists x\right)\left(x\prec y\right)$. נבחין כי:

$$\overline{\sigma}\left(\left(\exists x\right)\left(x\prec y\right)\right)=\bigvee_{a\in\mathbb{Z}}\overline{\sigma\left[{}^{x}/{}_{a}\right]}\left(x\prec y\right)$$

כעת, $\sigma\left[{}^{x}/{}_{a}\right]\left(x\right)=a$ ואילו $\sigma\left[{}^{x}/{}_{a}\right]\left(y\right)=5$ לכן:

$$=\bigvee_{a\in\mathbb{Z}}\left(a<5\right)=\mathbb{T}$$

כיוון שקיימים $a\in\mathbb{Z}$ כך ש $a<5$ (לדוגמה $a=0$).

דוגמה 1.5.2 : $A=\neg\left(\left(\exists x\right)\left(\exists y\right)\left(x\prec y\right)\right)$

$$\overline{\sigma}\left(A\right)=\overline{\sigma}\left(\neg\left(\left(\exists x\right)\left(\exists y\right)\left(x\prec y\right)\right)\right)=\neg\overline{\sigma}\left(\left(\exists x\right)\left(\exists y\right)\left(x\prec y\right)\right)=$$
$$\neg\bigvee_{a\in\mathbb{Z}}\overline{\sigma\left[{}^{x}/_{a}\right]}\left(\left(\exists y\right)\left(x\prec y\right)\right)=\neg\bigvee_{a\in\mathbb{Z}}\bigvee_{b\in\mathbb{Z}}\overline{\left(\sigma\left[{}^{x}/_{a}\right]\right)\sigma\left[{}^{y}/_{b}\right]}\left(x\prec y\right)$$

כעת נבחין כי:

$$\left(\left(\sigma\left[{}^{x}/_{a}\right]\right)\left[{}^{y}/_{b}\right]\right)\left(x\right)=\left(\sigma\left[{}^{x}/_{a}\right]\right)\left(x\right)=a$$
$$\left(\left(\sigma\left[{}^{x}/_{a}\right]\right)\left[{}^{y}/_{b}\right]\right)\left(y\right)=\left(\sigma\left[{}^{x}/_{a}\right]\right)\left(b\right)=b$$

לכן נקבל כי:

$$\overline{\sigma}\left(A\right)=\neg\bigvee_{a\in\mathbb{Z}}\bigvee_{b\in\mathbb{Z}}\left(a<b\right)=\neg\mathbb{T}=\mathbb{F}$$

25/10/2012

1.6 משתנה חופשי

עבור הנוסחה $A\left(\exists x\right)$, כל ההופעות של המשתנה x הן קשורות בכמת. נרצה לדון במקרים שלא כך המצב.

הערה 1.6.1 נוסחה מהסגנון: $\left(\exists x\right)\left(\left(\exists x\right)\left(Q\left(x\right)\right)\right)$ היא חוקית לחלוטין.

הגדרה 1.6.2 משתנה חופשי: המשתנה שאיננו קשור בשום כמת נקרא משתנה חופשי.

ייתכן שבאותה נוסחה אותו משתנה יהיה גם תלוי בכמת וגם חופשי. לדוגמה: $R\left(x,y\right)\vee\left(\exists x\right)Q\left(x\right)$.

משפט 1.6.3

נניח ש A נוסחה, $\sigma,\tau:\mathrm{Var}\to\left|M\right|$ השמות. נניח שלכל משתנה x שמופיע חופשי ב A מתקיים $\sigma\left(x\right)=\tau\left(x\right)$. (דהיינו σ,τ לא חייבים להיות זהים, אבל עבור המשתנים שהם חופשיים בA יש להם את אותו ערך).
אז: $\overline{\sigma}\left(A\right)=\overline{\tau}\left(A\right)$.

הוכחה: נניח ש $A=P\left(u_{1},\ldots,u_{n}\right)$ (כאשר P היא סמל יחס בשפה) אז כל המשתנים שמופיעים ב A הם חופשיים.
לכן, לפי תנאי המשפט, לכל משתנה x כנ"ל, $\sigma\left(x\right)=\tau\left(x\right)$ (מכיוון שבנוסחה A אין כמתים).

בפרט, זה נכון למשתנים שמופיעים בכל אחד משמות העצם u_{i}.

נוכיח תחילה שאם u הוא שם עצם, ולכל משתנה x שמופיע בu מתקיים $\sigma\left(x\right)=\tau\left(x\right)$ אז: $\tilde{\sigma}\left(u\right)=\tilde{\tau}\left(u\right)$.

מדוע? נראה באינדוקציה על אורך סדרת היצירה.

1. מכיוון שאם $u=x$ אז אכן:

$$\tilde{\sigma}\left(u\right)=\tilde{\sigma}\left(x\right)=\sigma\left(x\right)=\tau\left(x\right)=\tilde{\tau}\left(x\right)=\tilde{\tau}\left(u\right)$$

2. כעת, אם $u=f\left(v_{1},\ldots,v_{m}\right)$ אז:

$$\tilde{\sigma}\left(u\right)=f^{\mathcal{M}}\left(\tilde{\sigma}\left(v_{1}\right),\ldots,\tilde{\sigma}\left(v_{m}\right)\right)=f^{\mathcal{M}}\left(\tilde{\tau}\left(v_{1}\right),\ldots,\tilde{\tau}\left(v_{m}\right)\right)=\tilde{\tau}\left(u\right)$$

נבחין כי השיוויון הראשון נובע מההגדרה של $\tilde{\sigma}\left(u\right)$. ואילו שהשיוויון השני מהנחת האינדוקציה על אורך סדרת היצירה של u.

$$\overline{\sigma}\left(A\right)=\overline{\sigma}\left(P\left(u_{1},\ldots,u_{n}\right)\right)=P^{\mathcal{M}}\left(\tilde{\sigma}\left(u_{1}\right),\ldots,\tilde{\sigma}\left(u_{n}\right)\right)=$$
$$P^{\mathcal{M}}\left(\tilde{\tau}\left(u_{1}\right),\ldots,\tilde{\tau}\left(u_{n}\right)\right)=\overline{\tau}\left(P\left(u_{1},\ldots,u_{n}\right)\right)=\overline{\tau}\left(A\right)$$

כעת, נבחן את המקרה של $A = B \vee C$. כל משתנה x שמופיע חופשי בB או ב C מופיע חופשי ב A, ולכן אז: $\sigma(x) = \tau(x)$ לכן:

$$\overline{\sigma}(A) = \overline{\sigma}(B \vee C) = \overline{\sigma}(B) \vee \overline{\sigma}(C) = \overline{\tau}(B) \vee \overline{\tau}(C) = \overline{\tau}(B \vee C) = \overline{\tau}(A)$$

כאשר השיוויון האמצעי (השלישי, כלומר המעבר בין σ ל τ) הוא לפי הנחת האינדוקציה על אורך סדרת היצירה.

כמו כן, כאשר $A = \neg B$ אז:

$$\overline{\sigma}(A) = \overline{\sigma}(\neg B) = \neg\overline{\sigma}(B) = \neg\overline{\tau}(B) = \overline{\tau}(\neg B) = \overline{\tau}(A)$$

נשאר לטפל במקרה האחרון, שהוא המעניין ביותר, $A = (\exists x)\, B$. ראשית נבחין כי כל משתנה $y \neq x$ שמופיע חופשי ב B מופיע גם חופשי ב A. ולכן: $\sigma(y) = \tau(y)$. אנו רוצים להראות כי:

$$\overline{\sigma}(A) = \bigvee_{a \in |\mathcal{M}|} \overline{\sigma[x/a]}(B) = \bigvee_{a \in |\mathcal{M}|} \overline{\tau[x/a]}(B) = \overline{\tau}(A)$$

השיוויון הראשון והאחרון הם מהגדרה. נראה את השיוויון השני. לשם כך, נראה כי לכל המשתנה z שמופיע חופשית ב B מתקיים: $\sigma[x/a](z) = \tau[x/a](z)$ במידה וזה נכון, אזי לפי הנחת האינדוקציה, $\overline{\sigma[x/a]}(B) = \overline{\tau[x/a]}(B)$.

אם $z = x$ אז:

$$\sigma[x/a](x) = a = \tau[x/a](x)$$

לעומת זאת, אם $x \neq z$ אז:

$$\sigma[x/a](z) = \sigma(z) = \tau(z) = \tau[x/a](z)$$

לכן קיבלנו את הנדרש. ■

הגדרה 1.6.4 נוסחה סגורה: נוסחה A נקראת סגורה אם כל המשתנים שמופיעים בה קשורים בכמתים. דהיינו, לא מכילה משתנים חופשיים.

מסקנה 1.6.5

אם A נוסחה סגורה אז לכל שתי השמות $\sigma, \tau : \mathrm{Var} \to |\mathcal{M}|$ מתקיים: $\overline{\sigma}(A) = \overline{\tau}(A)$.

מכיוון שהתנאי של המשפט 1.6.3 מתקיים באופן ריק. ולכן, נוסחה A מביעה תכונה של המבנה $\mathcal{M}$.

נבחין כי אנחנו התייחסנו רק לכמת של $\exists$, אנו אבל גם צריכים לטפל ב $\forall$. אבל נבחין שאנו יכולים להגדיר אותו באופן הבא:

הגדרה 1.6.6

$$(\forall x)\, A = \neg((\exists x)(\neg A))$$

טענה 1.6.7

לכל השמה $\sigma : \mathrm{Var} \to |\mathcal{M}|$, מתקיים: $\overline{\sigma}((\forall x)\, A) = \bigwedge_{a \in |\mathcal{M}|} \overline{\sigma[x/a]}(A)$.

29/10/2012

הוכחה:

$$\overline{\sigma}((\forall x)\, A) = \overline{\sigma}(\neg((\exists x)(\neg A))) = \neg\overline{\sigma}((\exists x)(\neg A)) =$$

$$\neg\left(\bigvee_{a \in |\mathcal{M}|} \overline{\sigma[x/a]}(\neg A)\right) = \neg\left(\bigvee_{a \in |\mathcal{M}|} \neg\left(\overline{\sigma[x/a]}(A)\right)\right) =$$

$$\begin{cases} \mathbb{T} & \text{לכל } a \in |\mathcal{M}| \text{ מתקיים } \overline{\sigma[x/a]}(A) = \mathbb{T} \\ \mathbb{F} & \text{קיים } a \in |\mathcal{M}| \text{ כך ש } \overline{\sigma(x/a)}(A) = \mathbb{F} \end{cases} = \bigwedge_{a \in |\mathcal{M}|} \overline{\sigma[x/a]}(A)$$

כנדרש. ■

באופן כללי מתקיים: $A\wedge B=\neg\left(\left(\neg A\right)\vee\left(\neg B\right)\right)$.

נמנה את המקרים:

$$\begin{aligned}\mathbb{T}\wedge\mathbb{T} &= \neg\left(\left(\neg\mathbb{T}\right)\vee\left(\neg\mathbb{T}\right)\right)=\neg\left(\mathbb{F}\vee\mathbb{F}\right)=\mathbb{T}\\ \mathbb{T}\wedge\mathbb{F} &= \neg\left(\left(\neg\mathbb{T}\right)\vee\left(\neg\mathbb{F}\right)\right)=\neg\left(\mathbb{F}\vee\mathbb{T}\right)=\mathbb{F}\\ \mathbb{F}\wedge\mathbb{T} &= \neg\left(\left(\neg\mathbb{F}\right)\vee\left(\neg\mathbb{T}\right)\right)=\neg\left(\mathbb{T}\vee\mathbb{F}\right)=\mathbb{F}\\ \mathbb{F}\wedge\mathbb{F} &= \neg\left(\left(\neg\mathbb{F}\right)\vee\left(\neg\mathbb{F}\right)\right)=\neg\left(\mathbb{T}\vee\mathbb{T}\right)=\mathbb{F}\end{aligned}$$

כעת, נרצה להגדיר את הגרירה:

הגדרה 1.6.8 גרירה: $A\rightarrow B=\left(\neg A\right)\vee B$.

$$\begin{aligned}\mathbb{T}\rightarrow\mathbb{T} &= \mathbb{T}\\ \mathbb{T}\rightarrow\mathbb{F} &= \mathbb{F}\\ \mathbb{F}\rightarrow\mathbb{T} &= \mathbb{T}\\ \mathbb{F}\rightarrow\mathbb{F} &= \mathbb{T}\end{aligned}$$

וכמו כן, שקילות:

הגדרה 1.6.9 שקילות: $A\leftrightarrow B=\left(A\rightarrow B\right)\wedge\left(B\rightarrow A\right)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{T}\leftrightarrow\mathbb{T} &= \mathbb{T}\\ \mathbb{T}\leftrightarrow\mathbb{F} &= \mathbb{F}\\ \mathbb{F}\leftrightarrow\mathbb{T} &= \mathbb{F}\\ \mathbb{F}\leftrightarrow\mathbb{F} &= \mathbb{T}\end{aligned}$$

דוגמה 1.6.10 : נתונה לנו הסיגנטורה $\prec$. ומבנה $\mathscr{Z}_1$:

$$|\mathscr{Z}_1| = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} \mid \ n \geq 1,\ n \in \mathbb{Z}\right\}$$

וכמו כן, מבנה $\mathscr{Z}_2$ בצורה הבאה:

$$|\mathscr{Z}_2| = \left\{\frac{1}{n} \mid \ n \geq 1,\ n \in \mathbb{Z}\right\}$$

הערה 1.6.11 ההבדל ביניהן היא שב $|\mathscr{Z}_2| \not\ni 0 \in |\mathscr{Z}_1|$.

כמו כן, נגדיר את הסיגנטורה $\prec$ עבור המבנים בתור היחסים: $\prec^{\mathscr{Z}_1} = <$ ו: $\prec^{\mathscr{Z}_2} = <$. נגדיר את הנוסחה:

$$A = (\forall x)\,(\exists y)\,(y \prec x)$$

על $\mathscr{Z}_1$ נקבל $\mathbb{F}$ מכיוון שעבור $x = 0$ לא קיים y כנ"ל. ואילו ב $\mathscr{Z}_2$ נקבל $\mathbb{T}$. נראה זאת.
תהי $\sigma : \mathrm{Var} \to |\mathscr{Z}_1|$ השמה.

$$\overline{\sigma}\,(A) = \bigwedge_{a\in|\mathscr{Z}_1|} \overline{\sigma\,[x/a]}\,((\exists y)\,(y \prec x)) = \bigwedge_{a\in|\mathscr{Z}_1|} \left(\bigvee_{b\in|\mathscr{Z}_1|} \overline{\sigma\,[x/a]\,[y/b]}\,(y \prec x)\right) =$$

כעת נבחין כי:

$$\begin{cases} ((\sigma\,[x/a])\,([y/b]))\,(x) = \sigma\,[x/a]\,(x) = a \\ ((\sigma\,[x/a])\,([y/b]))\,(y) = b \\ ((\sigma\,[x/a])\,([y/b]))\,(z) = \sigma\,[x/a]\,(z) = \sigma\,(z) \quad z \neq x, y \end{cases}$$

ולכן:

$$= \bigwedge_{a\in|\mathscr{Z}_1|} \left(\bigvee_{b\in|\mathscr{Z}_1|} (b \prec a)\right)$$

בפרט, עבור $a = 0$, עבור כל $b \in |\mathscr{Z}_1|$ נקבל כי האיווי הוא $\mathbb{F}$. נבחין כי השורה הנ"ל למעשה שווה גם ל:

$$= \underbrace{\left(\bigvee_{b\in|\mathscr{Z}_1|} (b < 0)\right)}_{\mathbb{F}} \wedge \underbrace{\left(\bigvee_{b\in|\mathscr{Z}_1|} (b < 1)\right)}_{\mathbb{T}} \wedge \underbrace{\left(\bigvee_{b\in|\mathscr{Z}_1|} \left(b < \frac{1}{2}\right)\right)}_{\mathbb{T}} \wedge \ldots = \mathbb{F}$$

מכיוון שהראשון הוא $\mathbb{F}$ לכן הכל $\mathbb{F}$.
כעת באופן דומה, תהי $\tau : \mathrm{Var} \to |\mathscr{Z}_2|$ השמה.

$$\overline{\tau}\,(A) = \bigwedge_{a\in|\mathscr{Z}_1|} \left(\bigvee_{b\in|\mathscr{Z}_1|} (b \prec a)\right) = \underbrace{\left(\bigvee_{b\in|\mathscr{Z}_1|} (b < 1)\right)}_{\mathbb{T}} \wedge \underbrace{\left(\bigvee_{b\in|\mathscr{Z}_1|} \left(b < \frac{1}{2}\right)\right)}_{\mathbb{T}} \wedge \ldots = \mathbb{T}$$

כלומר, הנוסחה A מתארת את התכונה שלקבוצה אין איבר מינימלי. באופן דומה ניתן להגדיר את הנוסחה B:

$$B = \neg\,(\forall x)\,(\exists y)\,(y \prec x)$$

אשר מביעה שלקבוצה **<u>יש</u>** איבר מינימלי.

דוגמה 1.6.12 : בדומה לדוגמה קודמת, בסיגנטורה שלנו יש $\prec$ ואת המבנים: $|\mathscr{Z}_3| = \mathbb{Q}$ כאשר $\prec^{\mathscr{Z}_3}=<$. וכמו כן: $|\mathscr{Z}_4| = \mathbb{R}_4$ וגם כאן $\prec^{\mathscr{Z}_4}=<$.
האם ניתן למצוא נוסחה שמפרידה ביניהן?
ניסוי של תלמיד מהכיתה היה:

$$(\forall x)\,(\forall y)\,((x \prec y) \to (\exists z)\,((x \prec z) \wedge (z < y)))$$

אבל זוהי תכונת הצפיפות, והיא קיימת בשניהם.
נסיון נוסף היה לנסות את תכונת השלמות, כלומר כל שתי קבוצות ב $\mathscr{Z}_4$ יהיה קיים איבר ביניהן. הבעיה שצריך לדבר על קבוצות במבנה, ובלוגיקה מסדר ראשון אנו דנים רק באיברים במבנה.

פרק 2

שדות

2.1 אי־הבחנה בין $\mathbb{Q}$ ל $\mathbb{R}$

משפט 2.1.1

אין נוסחה סגורה A המבחינה בין $(\mathbb{Q},<)$ ו: $(\mathbb{R},<)$.

זאת אומרת, לכל נוסחה סגורה A ולכל השמה: $\sigma:\mathrm{Var}\to\mathbb{Q}$ ולכל השמה $\tau:\mathrm{Var}\to\mathbb{R}$ מתקיים: $\overline{\sigma}(A)=\overline{\tau}(A)$.

הוכחה: נקח נוסחה B ונקח השמות $\sigma:\mathrm{Var}\to\mathbb{Q}$ ו $\tau:\mathrm{Var}\to\mathbb{R}$. נניח שרק המשתנים $x_1,x_2,\ldots,x_n$ מופיעים בנוסחה B בצורה חופשית.

נתבונן ב $\sigma(x_1),\sigma(x_2),\ldots,\sigma(x_n)\in\mathbb{Q}$ וכמו כן בנקודות: $\tau(x_1),\tau(x_2),\ldots,\tau(x_n)\in\mathbb{R}$. במידה והסדר שלהם זהה ב$\sigma$ ובτ (כלומר אם היחס בין x_i לx_j לכל i,j זהה ב σ ובτ) נאמר שσ וτ נותנות אותה קונפיגורציה עבור $x_1,x_2,\ldots,x_n$.

טענה 2.1.2

אם σ וτ נותנות אותה קונפיגורציה עבור $x_1,\ldots,x_n$ אז $\overline{\sigma}(B)=\overline{\tau}(B)$.

הוכחה: באינדוקציה על אורך סדרת יצירה של B.

<u>בסיס:</u>

האפשרויות שלנו לפעולה אטומית הן: $B(x,y)=x\prec y$ או $B(x,y)=(x=y)$. אם הקונפיגורצה היא כך ש $\sigma(x)<\sigma(y)$ וגם $\tau(x)<\tau(y)$ אז:

$$\overline{\sigma}(x\prec y)=\mathbb{T}=\overline{\tau}(x\prec y)$$

וכמו כן, $\sigma(y)<\sigma(x)$ וגם $\tau(y)<\tau(x)$ אז:

$$\overline{\sigma}(x\prec y)=\mathbb{F}=\overline{\tau}(x\prec y)$$

בכל מקרה: $\overline{\sigma}(x\prec y)=\overline{\tau}(x\prec y)$.

<u>צעד:</u>

כעת נניח כי $B=C\vee D$, עם המשתנים החופשיים $x_1,\ldots,x_n$. לכן ב C וD יכולים להופיע בצורה חופשית רק המשתנים $x_1,x_2,\ldots,x_n$.

ונניח כש σ וτ נותנות אותה קונפיגורציה עבור $x_1,x_2,\ldots,x_n$ אז לפי הנחת האינדוקציה $\overline{\sigma}(C)=\overline{\tau}(C)\ ,\ \overline{\sigma}(D)=\overline{\tau}(D)$. אז:

$$\overline{\sigma}(B)=\overline{\sigma}(C\vee D)=\overline{\sigma}(C\vee D)=\overline{\sigma}(C)\vee\overline{\sigma}(D)=\overline{\tau}(C)\vee\overline{\tau}(D)=\overline{\tau}(C\vee D)=\overline{\tau}(B)$$

כמו כן נראה **<u>שלילה:</u>**

$B=\neg C$ נניח ש σ ו τ נותנות אותה קונפיגורציה עבור $x_1,\ldots,x_n$ אז:

$$\overline{\sigma}(B)=\overline{\sigma}(\neg C)=\neg\overline{\sigma}(C)=\neg\overline{\tau}(C)=\overline{\tau}(\neg C)=\overline{\tau}(B)$$

<u>וקיום:</u>

$B=(\exists x)C$ נניח שבנוסחה B מופיעים בצורה חופשית רק משתנים $x_1,\ldots,x_n$ אז ב C מופיעים בצורה חופשית רק משתנים $x,x_1,\ldots,x_n$. נניח ש σ וτ נותנים אותה קונפיגורציה עבור $x_1,\ldots,x_n$.

מכאן, **<u>לא ניתן</u>** להסיק כי $\overline{\sigma}(C)=\overline{\tau}(C)$ כי המצב של $\sigma(x)$ עומת המצב של $\tau(x)$ עלול להיות שונה.

לשם כך נזכר איך אנו מגדירים את $\overline{\sigma}(B)$ ואת $\overline{\tau}(B)$:

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}(B) &= \bigvee_{a\in\mathbb{Q}}\overline{\sigma\left[{}^{x}/_{a}\right]}(C)\\ \overline{\tau}(B) &= \bigvee_{a'\in\mathbb{R}}\overline{\tau\left[{}^{x}/_{a'}\right]}(C)\end{aligned}$$

כלומר, a נמצא בכל המקומות האפשריים של $\mathbb{Q}$ ו a' נמצאים בכל הנקודות האפשריות של $\mathbb{R}$. כלומר $\overline{\sigma\left[{}^{x}/_{a}\right]}(C)$ תלויה רק בקונפיגורציה של $x,x_1,\ldots,x_n$ זאת אומרת: $a,\sigma(x_1),\ldots,\sigma(x_n)$ ואילו $\overline{\tau\left[{}^{x}/_{a'}\right]}(C)$ תלויה רק בקונפיגורציה של $x,x_1,\ldots,x_n$ זאת אומרת: $a',\tau(x_1),\tau(x_2),\ldots,\tau(x_n)$.

$$\bigvee_{a\in\mathbb{Q}}\overline{\sigma\left[{}^{x}/_{a}\right]}(C)=\overline{\sigma\left[{}^{x}/_{a_1}\right]}(C)\vee\overline{\sigma\left[{}^{x}/_{a_2}\right]}(C)\vee\ldots\vee\overline{\sigma\left[{}^{x}/_{a_k}\right]}(C)$$

כלומר, אנו יכולים להפוך את הנ"ל לסופי ע"י בחירה של $a_1,\ldots,a_k$ אשר יעברו על כל האפשרויות מבחינת קונפיגורציה.
לדוגמה a_1 יהיה קטן יותר מכל $\sigma(x_i)$ ואילו a_2 יהיה שווה ל $\sigma(x_i)$ עבור $\sigma(x_i)$ המינימלי וכו' עד a_k אשר גדול מכל $\sigma(x_i)$ לכל i.

באופן דומה:

$$\bigvee_{a\in\mathbb{Q}}\overline{\tau\left[{}^{x}/_{a'}\right]}(C)=\overline{\tau\left[{}^{x}/_{a'_1}\right]}(C)\vee\overline{\tau\left[{}^{x}/_{a'_2}\right]}(C)\vee\ldots\vee\overline{\tau\left[{}^{x}/_{a'_k}\right]}(C)$$

אבל לכל אחד מאברי האיווי הסופי מתקיים שיוויון כלומר: $\overline{\sigma\left[{}^{x}/_{a_i}\right]}(C)=\overline{\tau\left[{}^{x}/_{a'_i}\right]}(C)$ מכיוון שהם שווים מבחינת קונפיגורציה.

לכן $\overline{\sigma}(B)=\overline{\tau}(B)$ כנדרש. ■

ולכן, לכל נוסחה סגורה A ולכל השמה $\sigma:\mathrm{Var}\to\mathbb{Q}$ ו $\tau:\mathrm{Var}\to\mathbb{R}$ מתקיים $\overline{\sigma}(A)=\overline{\tau}(A)$ כנדרש. ■

01/11/2012

2.2 יחס סדר

$(S,<)$ יחס סדר לינארי צפוף ללא איבר מינימלי וללא איבר מקסימלי.

הגדרה 2.2.1 התכונה של יחס סדר לינארי נתונה ע"י:

$$(\forall x)(\forall y)((x\prec y)\vee(x=y)\vee(y\prec x))$$

הערה 2.2.2 זו רק התכונה של לינאריות, לא תכונה ליחס סדר, בתכונה של יחס סדר, אותו נגדיר בהמשך, לא יכול להתקיים שניים מהם בו"ז. תכונה זו רק אומרת שכל שני איברים ניתנים להשוואה.

הגדרה 2.2.3 התכונה של יחס סדר צפוף:

$$(\forall x)(\forall y)((x\prec y)\to(\exists z)((x\prec z)\wedge(z\prec y)))$$

כלומר, בין כל שני איברים $x<y$ קיים איבר z כך ש $x<z<y$.

הגדרה 2.2.4 אין איבר מינימלי:

$$(\forall x)(\exists y)(y \prec x)$$

הגדרה 2.2.5 אין איבר מקסימלי:

$$(\forall x)(\exists y)(x \prec y)$$

הגדרה 2.2.6 יחס סדר: התכונות של יחס סדר הן:

$$(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x \prec y) \wedge (y \prec z) \to (x \prec z))$$
$$(\forall x)(\forall y)((x \prec y) \to \neg(y \prec x))$$
$$(\forall x)(\forall y)((x \prec y) \to \neg(x = y))$$

משפט 2.2.7

אם $(S,<)$ היא קבוצה עם יחס סדר לינארי צפוף וללא איבר מינימלי וללא איבר מקסימלי אז $(S,<)$ שקולה אלמנטרית ל $(\mathbb{Q},<)$.

2.3 מבנה מספק נוסחה

הגדרה 2.3.1 מבנה מספק נוסחה: בהינתן $\mathcal{M}$ מבנה וA נוסחה סגורה נסמן $\mathcal{M} \models A$ ונאמר ש$\mathcal{M}$ מספק נוסחה A אם לכל השמה $\sigma : \mathrm{Var} \to |\mathcal{M}|$ מתקיים: $\overline{\sigma}(A) = \mathbb{T}$.
סימון נוסף: $\models_{\mathcal{M}} A$.

2.4 אקסיומות השדה

הסיגנטורה שלנו במקרה של שדות היא: $\langle +, \cdot, 0, 1 \rangle$.
אקסיומות השדה שלנו הן:

- $\neg(0 = 1)$

אקסיומות החיבור

- $(\forall x)(\forall y)(x + y = y + x)$
- $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x + y) + z = x + (y + z))$
- $(\forall x)(x + 0 = x)$
- $(\forall x)(\exists y)((x + y) = 0)$

אקסיומות הכפל

- $(\forall x)(\forall y)(x \cdot y = y \cdot x)$
- $(\forall x)(\forall y)(\forall z)((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$
- $(\forall y)(x \cdot 1 = x)$
- $(\forall x)(\neg(x = 0) \to (\exists y)(x \cdot y = 1))$

פילוג

- $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z)$

פרק 3

מערכת הסק

נניח ש $\mathcal{F} = \{F \mid F \text{ שדה סופי}\}$.

שאלה האם קיימת נוסחה סגורה A כך ש $F \models A$ כאשר F שדה סופי, אבל A לא מתקיימת ב$\mathbb{Q}$.

טענה 3.0.1

קיים שדה F_0 ממציין 0 (וממילא אין־סופי) כך שכל נוסחה סגורה A שמתקיימת בכל שדה סופי F, בהכרח מתקיימת גם ב F_0.

נבחין שעם נוסחה אפשר להגדיר מהו מציין 3 לדוגמה: $(\forall x)((x+x)+x=0)$. אבל אין לנו דרך בשפה הזו להגיד שהשדה סופי.

נניח $\mathscr{M}$ קבוצה של מבנים בסיגנטורה מסויימת.נסמן $\mathcal{T}h(\mathscr{M})$ קבוצת כל הנוסחאות שמתקיימות בכל המבנים $\mathcal{M} \in \mathscr{M}$ (תיאוריה של קבוצת של מבנים).

$\mathfrak{a}$ קבוצת נוסחאות בשפה מסויימת. נסמן $\text{Mod}(\mathfrak{a})$ קבוצת (ליתר דיוק מחלקה אם אתם קטנוניים על תורת הקבוצות) כל המבנים שמספקים כל הנוסחאות שב $\mathfrak{a}$.

כלומר עברנו מקבוצת מבנים $\mathscr{M}$ ל: $\mathcal{T}h(\mathscr{M})$ וממנו ל $\text{Mod}(\mathcal{T}h(\mathscr{M}))$. כלומר: $\mathscr{M} \rightsquigarrow \mathcal{T}h(\mathscr{M}) \rightsquigarrow \text{Mod}(\mathcal{T}h(\mathscr{M}))$.

ובאופן דומה ניתן לעבור הפוך:$\mathfrak{a} \rightsquigarrow \text{Mod}(\mathfrak{a}) \rightsquigarrow \mathcal{T}h(\text{Mod}(\mathfrak{a}))$.

ברור ש: $\mathscr{M} \subseteq \text{Mod}(\mathcal{T}h(\mathscr{M}))$ וגם: $\mathfrak{a} \subseteq \mathcal{T}h(\text{Mod}(\mathfrak{a}))$.

ההבדלים בין המעברים שאנו עושים הם לעבור בין הצד הסמנטי, כלומר משדות אל התכונות שלהם ואז מחלצים עוד שדות.

05/11/2012 לעומת המעבר מהצד הסינטקטי לסמנטי ובחזרה ובכך מגלים עוד תכונות שכל השדות מקיימים.

3.1 קבוצת אקסיומות לוגיות

1. אקסיומה פרופוזיציונית: לכל נוסחה A, $\neg A \vee A$ (כלומר, הכל A או לא A).

2. אקסיומת ההצבה: $A_x[a] \to (\exists x) A$. x משתנה, a שם עצם. $A_x[a]$ היא תוצאה של הצבת שם עצם a במקום משתנה x כל פעם ש x מופיע חופשית בA.

הערה 3.1.1 לא כל הצבה היא מותרת. נניח שיש לנו $A = (\exists y)(P(x,y))$, בנוסחה זו x מופיע בצורה חופשית וy קשור בכמת. נניח ש $a = y$. אם נציב נקבל: $A_x[y] = (\exists y) P\left(\boxed{y}, y\right)$. מה שקרה זה ש x נקשר בכמת. זה הופך את ההצבה הזו לבלתי חוקית.

הגדרה 3.1.2 הצבה חוקית: הצבה $A_x[a]$ היא חוקית כאשר שום משתנה שיופיע בשם עצם a אינו נקשר בכמתים של הנוסחה A.

בהצבות שאנו כותבים אנו מניחים שההצבה חוקית, אלא אם אנו מציינים במפורש אחרת.

3. אקסיומת הזהות: $x = x$.

4. אקסיומת השיוויון:

$$x_1 = y_1 \to x_2 = y_2 \to \ldots \to x_n = y_n \to f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

ובמקרה זה f מסמל פונקציה. וגם:

$$x_1 = y_1 \to x_2 = y_2 \to \ldots \to x_n = y_n \to P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \to P(y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

כאשר P הוא סמל יחס n־מקומי.

הערה 3.1.3 תמיד הסוגריים מנורמלים מימין. כלומר:

$$a \to b \to c = a \to (b \to c)$$

לכן אם $a = \mathbb{T}$ אז b יכול להיות $\mathbb{F}$ ועדיין התוצאה היא $\mathbb{T}$.
כמו כן, את הגרירה האחרונה ביחס היה ניתן לכתוב עם חץ דו־כיווני, אבל אין בכך צורך כיוון שניתן היה להחליף את כל ה x־ים והy־ים ולמעשה לקבל את זה.

3.2 כללי הסק

1. מהנוסחה A נסיק נוסחה $B \vee A$ (כלל ההרחבה).
2. מהנוסחה $A \vee A$ נסיק נוסחה A (כלל הצמצום).
3. מהנוסחה $A \vee (B \vee C)$ נסיק נוסחה $(A \vee B) \vee C$ (כלל האסוציאטיביות).
4. מהנוסחאות $A \vee B$ ו: $\neg A \vee C$ נסיק נוסחה $B \vee C$ (כלל החתך).
5. מהנוסחה $B \to A$ נסיק נוסחה $(\exists x) A \to B$ בתנאי ש x לא מופיע חופשית ב B (כלל הכנסת כמת $\exists$).

נניח ש $\mathfrak{a}$ קבוצת נוסחאות כלשהי. מה המשמעות של להסיק נוסחה C מקבוצת נוסחאות A?

הגדרה 3.2.1 הסק של נוסחה: הסק של נוסחה C מקבוצת נוסחאות $\mathfrak{a}$ היא רשימה של נוסחאות: $B_1, B_2, \ldots, B_m = C$. כך שעבור כל נוסחה B_i קיימת אחת האפשרויות הבאות:

1. B_i היא אקסיומה לוגית.
2. $B_i \in \mathfrak{a}$.
3. ניתן להסיק את B_i מתוך נוסחה B_j כאשר $j < i$ כאשר מדובר בכללי הסק 1,2,3,5. או שניתן להסיק את B_i מתוך B_j, B_k עבור $j, k < i$ עבור כלל 4 .

משפט 3.2.2 משפט הנאותות

נניח ש $\mathfrak{a}$ קבוצת נוסחאות ו $\mathcal{M}$ הוא מבנה שהוא מודל של $\mathfrak{a}$ (זאת אומרת לכל $A \in \mathfrak{a}$ מתקיים $\mathcal{M} \models A$) אם ניתן להסיק את הנוסחה C מתוך $\mathfrak{a}$ אז $\mathcal{M} \models C$.

המשמעות של משפט זה היא שלא ניתן להסיק נוסחה לא נכונה.

בהוכחת המשפט אנו צריכים לבדוק שני דברים: שכל האקסיומות הלוגיות מסופקות בכל מבנה. **הוכחה:** נראה כי האקסיומות הלוגיות מסופקות בכל מבנה $\mathcal{M}$. תהי $\sigma : \mathrm{Var} \to |\mathcal{M}|$. נקבל:

$$\overline{\sigma}(\neg A \vee A) = \overline{\sigma}(\neg A) \vee \overline{\sigma}(A) = (\neg\overline{\sigma}(A)) \vee \overline{\sigma}(A) = \mathbb{T}$$

(כיוון שאם $\overline{\sigma}(A) = \mathbb{T}$ אז קל וחומר ש $(\neg\mathbb{T}) \vee \mathbb{T} = \mathbb{T}$ ואם: $\overline{\sigma}(A) = \mathbb{F}$ אז $\neg\overline{\sigma}(A) = \mathbb{T}$ ולכן: $\mathbb{T} \vee \mathbb{F} = \mathbb{T}$. לכן בכל מקרה: $(\neg\overline{\sigma}(A)) \vee \overline{\sigma}(A) = \mathbb{T}$).

כמו כן:

$$\overline{\sigma}(x = x) = (\tilde{\sigma}(x) = \tilde{\sigma}(x)) = (\sigma(x) = \sigma(x)) = \mathbb{T}$$

מכיוון ש $\sigma(x)=\sigma(x)$ היא שיוויון ב $|\mathcal{M}|$.
נראה את האקסיומת השיוויון:

$$\overline{\sigma}\left(x_1=y_1\to\ldots\to x_n=y_n\to f\left(x_1,\ldots,x_n\right)=f\left(y_1,\ldots,y_n\right)\right)=$$
$$\overline{\sigma}\left(x_1=y_1\right)\to\ldots\to\overline{\sigma}\left(x_n=y_n\right)\to\left(f^{\mathcal{M}}\left(\tilde{\sigma}\left(x_1\right),\ldots,\tilde{\sigma}\left(x_n\right)\right)=f^{\mathcal{M}}\left(\tilde{\sigma}\left(y_1\right),\ldots,\tilde{\sigma}\left(y_n\right)\right)\right)=$$
$$\left(\sigma\left(x_1\right)=\sigma\left(y_1\right)\right)\to\ldots\to\left(\sigma\left(x_n\right)=\sigma\left(y_n\right)\right)\to\left(f^{\mathcal{M}}\left(\sigma\left(x_1\right),\ldots,\sigma\left(x_n\right)\right)=f^{\mathcal{M}}\left(\sigma\left(y_1\right),\ldots,\sigma\left(y_n\right)\right)\right)$$

הערה 3.2.3 במעבר לשורה השלישית עקרונית חסר לפני מעבר דרך $\tilde{\sigma}$.

אם קיים i, $1\le i\le n$, כך ש $\sigma\left(x_i\right)\neq\sigma\left(y_i\right)$ אז כל ביטוי הוא שווה $\mathbb{T}$ מכיוון ש:

$$A_1\to A_2\to\ldots\to A_i\to\ldots\to A_n\to B=\mathbb{T}$$

כאשר $A_i=\mathbb{F}$. מכיוון הצורה שעובדות הסוגריים, נקבל כי:

$$A_1\to A_2\to\ldots\to\underbrace{\left(A_i\to\ldots\to A_n\to B\right)}_{\mathbb{T}}$$

וכאשר באגף ימין של $\to$ יש לנו $\mathbb{T}$ הביטוי הוא בהכרח $\mathbb{T}$, לכן $A_{i-1}\to\mathbb{T}=\mathbb{T}$, וברוקרסיה כל הביטוי הוא $\mathbb{T}$.
כמו כן, כאשר $\sigma\left(x_i\right)=\sigma\left(y_i\right)$ לכל $1\le i\le n$ אז:

$$f^{\mathcal{M}}\left(\sigma\left(x_1\right),\ldots,\sigma\left(x_n\right)\right)=f^{\mathcal{M}}\left(\sigma\left(y_1\right),\ldots,\sigma\left(y_n\right)\right)$$

ולכן נקבל $\mathbb{T}$.
לבסוף:

$$\overline{\sigma}\left(x_1=y_1\to\ldots\to x_n=y_n\to P\left(x_1,\ldots,x_n\right)\to P\left(y_1,\ldots,y_n\right)\right)=$$
$$\left(\tilde{\sigma}\left(x_1\right)=\tilde{\sigma}\left(y_1\right)\right)\to\ldots\to\left(\tilde{\sigma}\left(x_n\right)=\tilde{\sigma}\left(y_n\right)\right)\to P^{\mathcal{M}}\left(\tilde{\sigma}\left(x_1\right),\ldots,\tilde{\sigma}\left(x_n\right)\right)\to P^{\mathcal{M}}\left(\tilde{\sigma}\left(y_1\right),\ldots,\tilde{\sigma}\left(y_n\right)\right)=$$
$$\left(\sigma\left(x_1\right)=\sigma\left(y_1\right)\right)\to\ldots\to\left(\sigma\left(x_n\right)=\sigma\left(y_n\right)\right)\to\left(P^{\mathcal{M}}\left(\sigma\left(x_1\right),\ldots,\sigma\left(x_n\right)\right)\to P^{\mathcal{M}}\left(\sigma\left(y_1\right),\ldots,\sigma\left(y_n\right)\right)\right)=\mathbb{T}$$

אם קיים i, $1\le i\le n$ כך ש $\sigma\left(x_i\right)\neq\sigma\left(y_i\right)$ אז נקבל $\mathbb{T}$ כמו קודם. לעומת זאת אם לכ לi מתקיים: $1\le i\le n$ אז:

$$P^{\mathcal{M}}\left(\sigma\left(x_1\right),\ldots,\sigma\left(x_n\right)\right)=P^{\mathcal{M}}\left(\sigma\left(y_1\right),\ldots,\sigma\left(y_n\right)\right)$$

וממילא:

$$P^{\mathcal{M}}\left(\sigma\left(x_1\right),\ldots,\sigma\left(x_n\right)\right)\to P^{\mathcal{M}}\left(\sigma\left(y_1\right),\ldots,\sigma\left(y_n\right)\right)=\mathbb{T}$$

ושוב מקבלים שהביטוי הוא שווה ל $\mathbb{T}$.
נרצה להראות את אקסיומת ההצבה, לשם כך נוכיח ראשית את הלמה הבאה:

למה 3.2.4

1. אם a,b שמות עצם, x משתנה, $\sigma:\mathrm{Var}\to|\mathcal{M}|$ השמה, אז $\widetilde{\sigma\left[{}^{x}/_{\tilde{\sigma}(a)}\right]}(b)=\tilde{\sigma}\left(b_x\left[a\right]\right)$.
2. אם a שם עצם, x משתנה, A נוסחה, $A_x\left[a\right]$ הצבה חוקית ו $\sigma:\mathrm{Var}\to|\mathcal{M}|$ השמה אז: $\overline{\sigma}\left(A_x\left[a\right]\right)=\overline{\sigma\left[{}^{x}/_{\tilde{\sigma}(a)}\right]}\left(A\right)$.

הוכחה:

1. נשתמש באינדוקציה על אורך סדרת יצירה של שם עצם b. כאשר $b=z$ אז: או ש $b=x$ או ש $b=y$ כאשר $x\neq y$. אם $b=x$ אז: $b_x[a]=a$ (בשם עצם b מציבים במקום x את a).

$$\tilde{\sigma}\left(b_x\left[a\right]\right)=\tilde{\sigma}\left(a\right)=\sigma\left[{}^{x}/_{\tilde{\sigma}(a)}\right]\left(x\right)=\sigma\widetilde{\left[{}^{x}/_{\tilde{\sigma}(a)}\right]}\left(x\right)=\sigma\widetilde{\left[{}^{x}/_{\tilde{\sigma}(a)}\right]}\left(b\right)$$

אם $x\neq y$ ו $b=y$ אז:

$$\tilde{\sigma}\left(b_x\left[a\right]\right)=\tilde{\sigma}\left(y\right)=\sigma\left(y\right)=\sigma\left[{}^{x}/_{\tilde{\sigma}(a)}\right]\left(y\right)=\sigma\widetilde{\left[{}^{x}/_{\tilde{\sigma}(a)}\right]}\left(y\right)=\sigma\widetilde{\left[{}^{x}/_{\tilde{\sigma}(a)}\right]}\left(b\right)$$

כעת, אם $b=f\left(u_1,\ldots,u_n\right)$ אז:

$$\tilde{\sigma}\left(b_x\left[a\right]\right)=\tilde{\sigma}\left(f\left(u_{1x}\left[a\right],\ldots,u_{mx}\left[a\right]\right)\right)$$

כלומר, להציב את x במקום a בשם עצם u_1 ובu_2 וכו' עד u_m. מההגדרה:

$$=f^{\mathcal{M}}\left(\tilde{\sigma}\left(u_{1x}\left[a\right]\right),\ldots,\tilde{\sigma}\left(u_{mx}\left[a\right]\right)\right)\underbrace{=}_{\text{הנחת האינדוקציה}}f^{\mathcal{M}}\left(\sigma\widetilde{\left[{}^{x}/_{\tilde{\sigma}(a)}\right]}\left(u_1\right),\ldots,\sigma\widetilde{\left[{}^{x}/_{\tilde{\sigma}(a)}\right]}\left(u_m\right)\right)=$$

$$\sigma\widetilde{\left[{}^{x}/_{\tilde{\sigma}(a)}\right]}\left(f\left(u_1,\ldots,u_m\right)\right)=\sigma\widetilde{\left[{}^{x}/_{\tilde{\sigma}(a)}\right]}\left(b\right)$$

כלומר, קיבלנו:

$$\tilde{\sigma}\left(b_x\left[a\right]\right)=\sigma\widetilde{\left[{}^{x}/_{\tilde{\sigma}(a)}\right]}\left(b\right)$$

08/11/2012

כנדרש.

2. כרגיל, נשתמש באינדוקציה על פי אורך סדרת היצירה של A.
כאשר $A=P\left(u_1,u_2,\ldots,u_n\right)$. אז:

$$\overline{\sigma}\left(A_x\left[a\right]\right)=\overline{\sigma}\left(\left(P\left(u_1,\ldots,u_n\right)\right)_x\left[a\right]\right)=\overline{\sigma}\left(P\left(u_{1x}\left[a\right],\ldots,u_{nx}\left[a\right]\right)\right)=$$

$$P^{\mathcal{M}}\left(\tilde{\sigma}\left(u_{1x}\left[a\right]\right),\ldots,\tilde{\sigma}\left(u_{nx}\left[a\right]\right)\right)\underbrace{=}_{\text{סעיף 1 של הלמה}}P^{\mathcal{M}}\left(\sigma\widetilde{\left[{}^{x}/_{\tilde{\sigma}(a)}\right]}\left(u_1\right),\ldots,\sigma\widetilde{\left[{}^{x}/_{\tilde{\sigma}(a)}\right]}\left(u_n\right)\right)=$$

$$\overline{\sigma\left[{}^{x}/_{\tilde{\sigma}(a)}\right]}\left(P\left(u_1,\ldots,u_n\right)\right)=\overline{\sigma\left[{}^{x}/_{\tilde{\sigma}(a)}\right]}\left(A\right)$$

כעת נראה איווי $A=B\vee C$:

$$\overline{\sigma}\left(A_x\left[a\right]\right)=\overline{\sigma}\left(B_x\left[a\right]\vee C_x\left[a\right]\right)=\overline{\sigma}\left(B_x\left[a\right]\right)\vee\overline{\sigma}\left(C_x\left[a\right]\right)\underbrace{=}_{\text{הנחת האינדוקציה}}$$

$$\overline{\sigma\left[{}^{x}/_{\tilde{\sigma}(a)}\right]}\left(B\right)\vee\overline{\sigma\left[{}^{x}/_{\tilde{\sigma}(a)}\right]}\left(C\right)=\overline{\sigma\left[{}^{x}/_{\tilde{\sigma}(a)}\right]}\left(B\vee C\right)=\overline{\sigma\left[{}^{x}/_{\tilde{\sigma}(a)}\right]}\left(A\right)$$

וגם שלילה, $A=\neg B$:

$$\overline{\sigma}\left(A_x\left[a\right]\right)=\overline{\sigma}\left(\neg B_x\left[a\right]\right)=\neg\overline{\sigma}\left(B_x\left[a\right]\right)=\neg\overline{\sigma\left[{}^{x}/_{\tilde{\sigma}(a)}\right]}\left(B\right)=\overline{\sigma\left[{}^{x}/_{\tilde{\sigma}(a)}\right]}\left(\neg B\right)=\overline{\sigma\left[{}^{x}/_{\tilde{\sigma}(a)}\right]}\left(A\right)$$

כעת ל"בשר" של הוכחה, עד כה הדברים היו קלים. כעת נרצה להראות עבור: $A=\left(\exists z\right)B$. נפריד למקרים:

- $z=x$, כלומר: $A=\left(\exists x\right)B$ ואז $A_x\left[a\right]=A$.

$$\overline{\sigma}\left(A_x\left[a\right]\right)=\overline{\sigma}\left(A\right)=\overline{\sigma\left[{}^{x}/_{\tilde{\sigma}(a)}\right]}\left(A\right)$$

נבחין כי:

$$\begin{cases}\sigma\left[{}^{x}/_{\tilde{\sigma}(a)}\right]\left(x\right)=\tilde{\sigma}\left(a\right)\\ \sigma\left[{}^{x}/_{\tilde{\sigma}(a)}\right]\left(y\right)=\tilde{\sigma}\left(y\right)\quad y\neq x\end{cases}$$

לכן ההשמות σ ו $\sigma\left[{}^{x}/_{\tilde{\sigma}(a)}\right]$ מתלכדות על כל המשתנים השונים מx וממילא הן מתלכדות על כל המשתנים שמופיעים בצורה חופשית ב A.

- במקרה ו $x \neq z$ אז $A = (\exists z)\, B$.

$$A_x\,[a] = (\exists z)\,(B_x\,[a])$$

$A_x\,[a]$ היא הצבה חוקית, לכן או ש z אינו מופיע ב a, או ש x אינו מופיע חפשית.

– תחילה, נניח כי x אינו מופיע חופשית ב B. אז:

$$A_x\,[a] = (\exists z)\,(B_x\,[a]) = (\exists z)\,B = A$$

לכן:

$$\overline{\sigma}\,(A_x\,[a]) = \overline{\sigma}\,(A) = \overline{\sigma\,[{}^{x}/_{\tilde{\sigma}(a)}]}\,(A)$$

כי x אינו מופיע חופשית ב A ו σ ו $\sigma\,[{}^{x}/_{\tilde{\sigma}(a)}]$ מתכלדות על כל המשתנים ששונים מ x.

– נעבור למקרה כאשר z אינו מופיע בשם עצם a.

$$\overline{\sigma}\,(A_x\,[a]) = \overline{\sigma}\,((\exists z)\,(B_x\,[a])) = \bigvee_{c\in|\mathcal{M}|} \overline{\sigma\,[{}^{z}/_{c}]}\,(B_x\,[a])$$

עד כה הנחנו שהאינקודציה היא רק על אורך סדרת היצירה, אבל זה לא מספיק לנו. בגלל שבמקום z אנו מציבים ערך שאנו לא יודעים עליו כלום. אבל מה שכן, אנו יודעים כי יש לנו פחות כמתים. לכן נוסיף אותו לאינדוקציה. כלומר, אנו עושים אינדוקציה על אורך סדרת היצירה של A וגם על מספר הכמתים. נבחין כי בשיוויון האחרון למעשה הורדנו כמת.

$$= \bigvee_{c\in|\mathcal{M}|} \sigma\,[{}^{z}/_{c}]\,\left[{}^{x}/_{\widetilde{\sigma[{}^{z}/_{c}]}(a)}\right]\,(B)$$

כעת, נבחין מהכיוון השני כי:

$$\overline{\sigma\,[{}^{x}/_{\tilde{\sigma}(a)}]}\,(A) = \sigma\,[{}^{x}/_{\tilde{\sigma}(a)}]\,((\exists z)\,B) = \bigvee_{c\in|\mathcal{M}|} \overline{\sigma\,[{}^{x}/_{\tilde{\sigma}(a)}]\,[{}^{z}/_{c}]}\,(B)$$

אנו צריכים להשוות בין ההשמות. נבחין כי:

$$\begin{cases} \sigma\,[{}^{z}/_{c}]\,\left[{}^{x}/_{\widetilde{\sigma[{}^{z}/_{c}]}(a)}\right]\,(x) = \widetilde{\sigma\,[{}^{z}/_{c}]}\,(a) \\ \sigma\,[{}^{z}/_{c}]\,\left[{}^{x}/_{\widetilde{\sigma[{}^{z}/_{c}]}(a)}\right]\,(z) = c \\ \sigma\,[{}^{z}/_{c}]\,\left[{}^{x}/_{\widetilde{\sigma[{}^{z}/_{c}]}(a)}\right]\,(y) = \tilde{\sigma}\,(y) \qquad y \neq z, x \end{cases}$$

ומצד שני:

$$\begin{cases} \sigma\,[{}^{x}/_{\tilde{\sigma}(a)}]\,[{}^{z}/_{c}]\,(x) = \tilde{\sigma}\,(a) \\ \sigma\,[{}^{x}/_{\tilde{\sigma}(a)}]\,[{}^{z}/_{c}]\,(z) = c \\ \sigma\,[{}^{x}/_{\tilde{\sigma}(a)}]\,[{}^{z}/_{c}]\,(y) = \tilde{\sigma}\,(y) \quad y \neq z, x \end{cases}$$

כלומר, הן שונות רק עבור a במידה והוא תלוי ב z אבל מההנחה הוא לא.

■

הערה 3.2.5 חלק 2 של הלמה לא היה נכון אם ההצבה לא הייתה חוקית.

12/11/2012

כעת, נוכיח את המשפט בעזרת הלמה:

$$\overline{\sigma}\,(A_x\,[a] \to (\exists x)\,A) = \overline{\sigma}\,(A_x\,[a]) \to \overline{\sigma}\,((\exists x)\,A) =$$

$$\overline{\sigma\,[{}^{x}/_{\tilde{\sigma}(a)}]}\,(A) \to \bigvee_{c\in\mathcal{M}} (\overline{\sigma}\,[{}^{x}/_{c}]\,(A)) = \begin{cases} \mathbb{T} & \overline{\sigma\,[{}^{x}/_{\tilde{\sigma}(a)}]}\,(A) = \mathbb{F} \\ \mathbb{T} & \overline{\sigma\,[{}^{x}/_{\tilde{\sigma}(a)}]}\,(A) = \mathbb{T} \end{cases}$$

מכיוון שאם אגף שמאל של $\to$ הוא $\mathbb{F}$ אנו תמיד מקבלים $\mathbb{T}$. והשורה השניה נובעת מכך שיש איבר ($\tilde{\sigma}\,(a)$) כך שמתקבל $\mathbb{T}$ על A לכן בפרט גם האיווי יחזיר $\mathbb{T}$.

נרצה להראות כי כללי הסק מתקיימים גם.

כלל ההרחבה: מA נובע $B\vee A$. אנו צריכים להוכיח אם $\mathcal{M}\models A$ אז $\mathcal{M}\models B\vee A$. בהינתן $\sigma:\mathrm{Var}\to|\mathcal{M}|$, נתון ש $\overline{\sigma}(A)=\mathbb{T}$.

הערה 3.2.6 בין אם הנוסחה סגורה או לא סגורה, מתקיים $\mathbb{T}$. מכיוון שהמשמעות של נוסחה לא סגורה שמתקיימת במבנה היא שלכל השמה נקבל $\mathbb{T}$.

$$\overline{\sigma}(B\vee A)=\overline{\sigma}(B)\vee\overline{\sigma}(A)=\mathbb{T}$$

כלל הצמצום: מ $A\vee A$ נובע A. צריך להוכיח שאם $\mathcal{M}\models A\vee A$ אז $\mathcal{M}\models A$. תהי $\sigma:\mathrm{Var}\to|\mathcal{M}|$. נתון כי $\overline{\sigma}(A\vee A)=\mathbb{T}$. נבחין כי:

$$\overline{\sigma}(A\vee A)=\overline{\sigma}(A)\vee\overline{\sigma}(A)=\mathbb{T}$$

לכן, $\overline{\sigma}(A)=\mathbb{T}$ כנדרש.

כלל האסוציאטיביות: מ $A\vee(B\vee C)$ נובע $(A\vee B)\vee C$.

נבחין כי:

$$\overline{\sigma}((A\vee B)\vee C)=\overline{\sigma}(A\vee B)\vee\overline{\sigma}(C)=(\overline{\sigma}(A)\vee\overline{\sigma}(B))\vee\overline{\sigma}(C)=$$
$$\overline{\sigma}(A)\vee(\overline{\sigma}(B)\vee\overline{\sigma}(C))=\overline{\sigma}(A)\vee\overline{\sigma}(B\vee C)=\overline{\sigma}(A\vee(B\vee C))$$

כנדרש.

כלל החתך: מ $A\vee B$ ו: $(\neg A)\vee C$ נובע $B\vee C$. נתון: $\overline{\sigma}(A\vee B)=\mathbb{T}$ ו $\overline{\sigma}((\neg A)\vee C)=\mathbb{T}$.

$$\begin{aligned}\overline{\sigma}(A\vee B)&=\overline{\sigma}(A)\vee\overline{\sigma}(B)=\mathbb{T}\\ \overline{\sigma}((\neg A)\vee C)&=\overline{\sigma}(\neg A)\vee\overline{\sigma}(C)=(\neg\overline{\sigma}(A))\vee\overline{\sigma}(C)=\mathbb{T}\end{aligned}$$

כעת:

$$\overline{\sigma}(B\vee C)=\overline{\sigma}(B)\vee\overline{\sigma}(C)=\begin{cases}\mathbb{T} & \overline{\sigma}(A)=\mathbb{F}\Rightarrow\overline{\sigma}(B)=\mathbb{T}\\ \mathbb{T} & \overline{\sigma}(A)=\mathbb{T}\Rightarrow\neg\overline{\sigma}(A)=\mathbb{F}\Rightarrow\overline{\sigma}(C)=\mathbb{T}\end{cases}$$

כלל הכנסת $\exists$: מ $A\to B$ נובע $(\exists x)\,A\to B$ בתנאי ש x אינו מופיע חופשית ב B.
נתון שלכל $\sigma:\mathrm{Var}\to|\mathcal{M}|$ מתקיים $\overline{\sigma}(A\to B)=\mathbb{T}$. צריך להוכיח שלכל $\tau:\mathrm{Var}\to|\mathcal{M}|$ מתקיים $\overline{\tau}((\exists x)\,A\to B)=\mathbb{T}$.

$$\overline{\tau}((\exists x)\,A\to B)=\overline{\tau}((\exists x)\,A)\to\overline{\tau}(B)=\bigvee_{c\in|\mathcal{M}|}\overline{\tau[x/c]}(A)\to\overline{\tau}(B)=$$

אם מקבלים $\overline{\tau}(B)=\mathbb{T}$ אז מקבלים $\mathbb{T}$. אם לכל $c\in|\mathcal{M}|$ מתקיים $\overline{\tau[x/c]}(A)=\mathbb{F}$ אז מקבלים $\mathbb{T}$.
כעת נניח ש $\overline{\tau}(B)=\mathbb{F}$ וקיים $c\in|\mathcal{M}|$ כך ש $\overline{\tau[x/c]}(A)=\mathbb{T}$. במקרה זה נקבל כי:

$$\overline{\tau[x/c]}(B)=\overline{\tau}(B)=\mathbb{F}$$

כי x אינו מופיע חופשית ב B ואז:

$$\overline{\tau[x/c]}(A\to B)=\overline{\tau[x/c]}(A)\to\overline{\tau[x/c]}(B)=\mathbb{F}$$

זאת אומרת, הנוסחה $A\to B$ אינה מתקיימת ב $\mathcal{M}$ בניגוד להנחה. ■

3.3 קצת ממשפט השלמות של גדל

$\mathfrak{a}$ קבוצת נוסחאות, C נוסחה. נניח שלכל מבנה $\mathcal{M}$ שהוא מודל של $\mathfrak{a}$. כלומר: $\mathcal{M} \models A$ לכל $A \in \mathfrak{a}$. גם מתקיים $\mathcal{M} \models C$. האם ניתן להסיק את C מתוך $\mathfrak{a}$?

אז מסתבר שזה מספיק. וכאן נכנס משפט השלמות של גדל.

משפט 3.3.1 השלמות של גדל (K. Gödel)

אם $C \in \mathcal{T}h\left(\text{Mod}\left(\mathfrak{a}\right)\right)$ אז ניתן להסיק את C על ספך $\mathfrak{a}$ (מאקסיומות לוגיות וכללי הסק).

אבל להוכחת המשפט נגיע בהמשך הקורס (בתקווה).

3.4 כללים נוספים

ישנם מספר כללים נוספים שניתן להוכיח מהכללים שכבר ראינו.

טענה 3.4.1 כלל הקומוטטיביות

מ $A \vee B$ נובע $B \vee A$.

הוכחה: נבחין כי לפי האקסיומה הפרופוזיציונית $\neg A \vee A$. לפי כך, החתך מ $B \vee A$ ו $(\neg A) \vee A$ נובע $B \vee A$ כנדרש.
■

טענה 3.4.2 כלל הנתוק (M.P.=Modus Ponens)

מ A ו $A \rightarrow B$ נובע B.

הוכחה: $A \rightarrow B$ דהיינו $\neg A \vee B$. מA על סמך כלל ההרחבה נובע $B \vee A$. על סמך כלל הקומוטטיביות מ $B \vee A$ נובע $A \vee B$.

לבסוף, על סמך כלל החתך, מ $B \vee A$ ו $\neg A \vee B$ נובע $B \vee B$. ולבסוף על סמך כלל הצמצום מ $B \vee B$ נובע B. ■

במקרים אחרים, מניחים את כלל הניתוק וממנו מוכיחים את יתר הדברים, אנו בחרנו ללכת בגישה הפוכה.

טענה 3.4.3 כלל הנתוק המוכלל

מ$A_1, A_2, \ldots, A_n$ ו: $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \ldots \rightarrow A_n \rightarrow B$ נובע B.

הוכחה: ע"י שימוש בכלל הניתוק מ $A_1 \rightarrow A_2 \rightarrow \ldots \rightarrow A_n \rightarrow B$ נקבל: $A_2 \rightarrow \ldots \rightarrow A_n \rightarrow B$. וכן הלאה, לבסוף נקבל כי B מתקיים כנדרש. ■

חלק II

טאוטולוגיה

פרק 4

משפט טאוטולוגיה

4.1 הערכה

הגדרה 4.1.1 נוסחה אלמנטרית: נוסחה אלמנטרית היא נוסחה אטומית $P\left(u_1,\ldots,u_n\right)$ או נוסחה מהצורה $(\exists x)\,A$.

מנוסחאות אלמנטריות ניתן להגיע לכל נוסחה על ידי קשרים לוגיים בלבד.

דוגמה 4.1.2 :

$$P\left(x_1,\ldots,x_n\right)\to\left(Q\left(x_1,x_2\right)\vee(\exists x)\,D\right)$$

מדובר באיווי של $Q\left(x_1,x_2\right)$ ו $(\exists x)\,D$, וגרירה.
כמו כן ניתן גם לכתוב עוד נוסחה אלמנטרית:

$$(\exists x_2)\left(P\left(x_1,\ldots,x_n\right)\to\left(Q\left(x_1,x_2\right)\vee(\exists x)\,D\right)\right)$$

הגדרה 4.1.3 הערכה (Valuation): הערכה V זו פונקציה שנותנת לכל נוסחה אלמנטרית ערך $\mathbb{T}$ או $\mathbb{F}$ בצורה שרירותית ואז נותנת ערך $\mathbb{T}$ או $\mathbb{F}$ לכל נוסחה על פי הקשרים הלוגים.

דוגמה 4.1.4 : בדוגמה שהראינו קודם, אם:

$$\begin{aligned}V\left((\exists x)\,D\right)&=\mathbb{F}\\V\left(Q\left(x_1,x_2\right)\right)&=\mathbb{T}\\V\left(P\left(x_1,\ldots,x_n\right)\right)&=\mathbb{T}\end{aligned}$$

ולכן:

$$V\left(Q\left(x_1,x_2\right)\vee(\exists x)\,D\right)=\mathbb{T}$$

וגם:

$$V\left(P\left(x_1,\ldots,x_n\right)\to\left(Q\left(x_1,x_2\right)\vee(\exists x)\,D\right)\right)=\mathbb{T}$$

אבל לדוגמה, ניתן לקבוע:

$$V\left((\exists x_2)\,P\left(x_1,\ldots,x_n\right)\to\left(Q\left(x_1,x_2\right)\vee(\exists x)\,D\right)\right)=\mathbb{F}$$

נבחין כי זו לא סתירה עם החלק הקודם (הרי אם הנוסחה הייתה נכונה לכל x_2 אז גם קיים x_2 כנ"ל אלא אם המבנה ריק), הסיבה לכך שהערכה לא שואלת שאלות, אלא רק מחזירה $\mathbb{T}$ או $\mathbb{F}$ על נוסחאות אלמנטריות באופן שרירותי.

4.2 טאוטולוגיה

הגדרה 4.2.1 טאוטולוגיה: נוסחה A נקראת טאוטולוגיה אם לכל הערכה V, $V(A)=\mathbb{T}$.

הגדרה 4.2.2 גרירה טאוטולוגית: נוסחה B נקראת גרירה טאוטולוגית של נוסחאות $A_1,A_2,\dots,A_n$ אם עבור כל הערכה V שעבורה: $V(A_1)=\mathbb{T},\dots,V(A_n)=\mathbb{T}$ גם מתקיים $V(B)=\mathbb{T}$.

דוגמה 4.2.3 : $A\vee\neg A$ היא טאוטולוגיה. היות ו:

$$V(A\vee\neg A)=V(A)\vee C(\neg A)=V(A)\vee(\neg V(A))$$

15/11/2012

טענה 4.2.4

B היא גרירה טאוטולוגית של $A_1,A_2,\dots,A_n$ אס"ס $A_1\to A_2\to\dots\to A_n\to B$ היא טאוטולוגיה.

הוכחה: $\Leftarrow$ נניח כי B היא גרירה טאוטולוגית של $A_1,A_2,\dots,A_n$. נוכיח כי:

$$A_1\to A_2\to\dots\to A_n\to B$$

היא טאוטולוגיה.

נקח הערכה V כלשהי. אם קיים i כך ש $V(A_i)=\mathbb{F}$ אז:

$$V(A_1\to A_2\to\dots\to A_n\to B)=V(A_1)\to V(A_2)\to\dots\to V(A_n)\to V(B)=\mathbb{T}$$

כפי שראינו כבר מספר פעמים, אם אחד ב"שרשרת" הזו הוא $\mathbb{F}$, אז כל הבא לפני הוא $\mathbb{T}$ וסיימנו.

כעת, אם לכל i, $1\le i\le n$ מתקיים $V(A_i)=\mathbb{T}$ אז $V(B)=\mathbb{T}$ כי B גרירה טאוטולוגית של $A_1,A_2,\dots,A_n$. וממילא:

$$V(A_1\to A_2\to\dots\to A_n\to B)=V(A_1)\to V(A_2)\to\dots\to V(A_n)\to V(B)=\mathbb{T}$$

לכן היא טאוטולוגיה.

$\Rightarrow$: נניח ש:

$$A_1\to A_2\to\dots\to A_n\to B$$

היא טאוטולוגיה. צריך להוכיח כי B היא גרירה טאוטולוגית של $A_1,A_2,\dots,A_n$. נקח הערכה V שעבורה:

$$\forall i\quad V(A_i)=\mathbb{T}$$

נתון ש:

$$V(A_1\to A_2\to\dots\to A_n\to B)=V(A_1)\to V(A_2)\to\dots\to V(A_n)\to V(B)=\mathbb{T}$$

ומכיוון ש $V(A_i)=\mathbb{T}$ לכל i, אז אם $V(B)$ היה $\mathbb{F}$, היינו מקבלים $\mathbb{F}$, מכיוון ש $\mathbb{T}\to\mathbb{F}=\mathbb{F}$. לכן בהכרח $V(B)=\mathbb{T}$ כי אחרת לא היה מתקיים:

$$V(A_1\to A_2\to\dots\to A_n\to B)=\mathbb{T}$$

כנדרש. ■

טענה 4.2.5

נניח ש $A = A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$ כאשר כל נוסחה A_i היא אלמנטרית או שלילה של נוסחה אלמנטרית.
במקרה כנ"ל, A היא טאוטולוגיה אס"ם קיימים i, j כך ש $A_j = \neg A_i$.

הוכחה: $\Leftarrow$: נניח כי $A_j = \neg A_i$ נקח הערכה V אז:

$$V(A) = V(A_1) \vee V(A_2) \vee \ldots \vee V(A_i) \vee \ldots \vee V(A_j) \vee \ldots \vee V(A_n) = V(A_1) \vee \ldots \vee V(A_i) \vee \ldots \vee (\neg V(A_i)) \vee \ldots \vee V(A_n) = \mathbb{T}$$

מכיוון שאם $V(A_i) = \mathbb{F}$ אז $\neg V(A_i) = \mathbb{T}$ ולהפך, על כל התוצאה תמיד $\mathbb{T}$, ולכן זוהי טאוטולוגיה כנדרש.

$\Rightarrow$: נניח שהתנאי הנ"ל אינו מתקיים, איננה טאוטולוגיה. לשם כך, מספיק למצוא הערכה אחת אשר תיתן $V(A) = \mathbb{F}$.

נעבור על הנוסחאות A_i, אם A_i היא נוסחה אלמנטרית נקבע $V(A_i) = \mathbb{F}$, אם $A_i = \neg B_i$ כאשר B_i אלמנטרית נקבל $V(B_i) = \mathbb{T}$, ולכן ממילא $V(A_i) = \mathbb{F}$.

הבחירה של V היא קונסיסטנטית מכיוון שאנו מניחים שלא קורה $A_j = \neg A_i$ לכל $1 \leq i, j \leq n$. ולכן:

$$V(A) = V(A_1) \vee V(A_2) \vee \ldots \vee V(A_n) = \mathbb{F}$$

ולכן A איננה טאוטולוגיה כנדרש. ■

4.3 פונקציית אורך

הגדרה 4.3.1 פונקציית אורך: נגדיר $\ell(A)$ פונקציית אורך באופן הבא:

1. אם A היא נוחסא אלמנטרית, $\ell(A) = 1$.
2. אם $A = B \vee C$ אז: $\ell(A) = \ell(B) + \ell(C) + 1$.
3. אם $A = \neg B$ אז: $\ell(A) = \ell(B) + 1$.

עבור $A = A_1 \vee \ldots \vee A_n$ נגדיר: $S(A) = \ell(A_1) + \ldots + \ell(A_n)$.

מתי A היא טאוטולוגיה? נרצה להראות קביעה זאת באינדוקציה על $S(A)$.

נבחין כי $S(A) = 1$ אס"ם הפירוק הוא טריוויאלי $A = A_1$ ו A_1 היא נוסחה אלמנטרית. כי אז: $\ell(A_1) = 1$ ו: $S(A) = \ell(A_1) = 1$. במקרה זה, A איננה בהכרח טאוטולוגיה.

כדי לקבוע אם נוסחה בהצגה מסויימת כאיווי היא טאוטולוגיה צריך לפתור את אותה הבעיה עבור שתי נוסחאות שעבורן הערך של S יותר נמוך. למעשה רדוקציה בערך של S.

נקח הצגה של A כאיווי:

$$A = A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$$

במידה וכל אחת מהנוסחאות A_i היא נוסחה אלמנטרית או שלילה של נוסחה אלמנטרית אז כבר פתרנו את הבעיה. נניח כי לא כך המצב. באיזה אופן זה לא יהיה נכון? כאשר A_i כלשהו הוא לא נוסחה אלמנטרית ולא שלילה של נוסחה אלמנטרית. כלומר, ייתכן:

1. $A_i = B \vee C$
2. $A_i = \neg\neg B$
3. $A_i = \neg(B \vee C)$

19/11/2012

לכל תמורה $\sigma \in S_n$, $A = A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$ היא טאוטולוגיה אס"ם $A_{\sigma(1)}, A_{\sigma(2)}, \ldots, A_{\sigma(n)}$ היא טאוטולוגיה.

נבחין כי במקרה הראשון, $A_n = B \vee C$ אז למעשה:

$$A = A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n = A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_{n-1} \vee (B \vee C)$$

ומכיוון שהסדר לא משנה, אנו יכולים לדאוג שהאיבר יהיה בסוף. כעת נבחין כי:

$$\ell(A_n) = \ell(B) + \ell(C) + 1$$

לכן, נקבל כי:

$$S(A) = \ell(A_1) + \ell(A_2) + \ldots + \ell(A_{n-1}) + \ell(B) + \ell(C) < \ell(A_1) + \ell(A_2) + \ldots + \ell(A_{n-1}) + \ell(A_n)$$

לפי הנחת האינדוקציה ניתן לקבוע האם $A_1 \vee \ldots \vee A_{n-1} \vee B \vee C$ הוא טאוטולוגיה או לא, ולכן האם A טאוטולוגיה או לא.

כעת, נניח את המקרה השני: $A_i = \neg\neg B$ נסתכל על הנוסחה:

$$A' = A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_{i-1} \vee B \vee A_{i+1} \vee \ldots \vee A_n$$

לכל הערכה V מתקיים: $V(A') = V(A)$ כי: $V(A_i) = V(\neg\neg B) = V(B)$.

$$S(A') = \ell(A_1) + \ldots + \ell(A_{i-1}) + \ell(B) + \ell(A_{i+1}) + \ldots + \ell(A_n) = S(A) - 2$$

שוב, ניתן להשתמש בהנחת האינדוקציה עבור A'.

כעת, במקרה השלישי: $A_i = \neg(B \vee C)$ אז:

$$A = A_1 \vee \ldots \vee A_{i-1} \vee (\neg(B \vee C)) \vee A_{i+1} \vee \ldots \vee A_n$$

נגדיר נוסחאות A_1', A_2' באופן הבא:

$$\begin{aligned} A_1' &= A_1 \vee \ldots \vee A_{i-1} \vee (\neg B) \vee A_{i+1} \vee \ldots \vee A_n \\ A_2' &= A_1 \vee \ldots \vee A_{i-1} \vee (\neg C) \vee A_{i+1} \vee \ldots \vee A_n \end{aligned}$$

נבחין כי: $S(A_1') < S(A)$ וגם: $S(A_2') < S(A)$ מכיוון ש: $\ell(\neg(B \vee C)) < \ell(\neg C)$ וגם $\ell(\neg B) < \ell(\neg(B \vee C))$.

טענה 4.3.2

A היא טאוטולוגיה אם ורק אם A_1' היא טאוטולוגיה וגם A_2' היא טאוטולוגיה.

הוכחה: $\Leftarrow$ נניח ש A היא טאוטולוגיה ונוכיח כי A_1' ו: A_2' הן טאוטולוגיות.

תהי V הערכה, לפי הנתון $V(A) = \mathbb{T}$. כלומר, קיים j, $1 \le j \le n$ כך ש: $V(A_j) = \mathbb{T}$. אם $j \neq i$ אז A_j מופיע גם ב A_1' ו A_2' ולכן: $V(A_1') = \mathbb{T}$ וגם $V(A_2') = \mathbb{T}$.

נשאר המקרה של $i = j$, כלומר: $V(A_i) = \mathbb{T}$. אבל נבחין כי:

$$\mathbb{T} = V(A_i) = V(\neg(B \vee C)) = \neg(V(B \vee C)) = \neg(V(B) \vee V(C))$$

לכן, $V(B) \vee V(C) = \mathbb{F}$ ולכן: $V(B) = \mathbb{F}$ וגם $V(C) = \mathbb{F}$ ולכן: $V(\neg B) = \mathbb{T}$ וגם $V(\neg C) = \mathbb{T}$. ולכן $V(A_1') = \mathbb{T}$ וגם $V(A_2') = \mathbb{T}$. כלומר A_1' ו A_2' הן טאוטולוגיות כנדרש.

$\Rightarrow$: נניח כי A_1' ו A_2' הן טאוטולוגיות. ונוכיח כי A טאוטולוגיה.

תהי V הערכה, לפי הנתון $V(A_1') = \mathbb{T}$ וגם $V(A_2') = \mathbb{T}$. אם קיים $j \neq i$ כך ש $1 \le j \le n$, כך ש $V(A_j) = \mathbb{T}$ אז קל וחומר ש $V(A) = \mathbb{T}$ ולכן סיימנו.

אם לכל $j \neq i$ מתקיים $V(A_j) = \mathbb{F}$ אז בהכרח $V(\neg B) = \mathbb{T}$ וגם: $V(\neg C) = \mathbb{T}$. ואז נקבל כי: $V(B) = \mathbb{F}$ וגם: $V(C) = \mathbb{C}$ ולכן: $V(B \vee C) = \mathbb{F}$ ואז: $V(\neg(B \vee C)) = \mathbb{T}$ ולבסוף $V(A) = \mathbb{T}$. לכן, בכל המקרים $V(A) = \mathbb{T}$.

כלומר A טאוטולוגיה כנדרש. ■

כלומר בכל מקרה עשינו רדוקציה ל $S(A)$ לנוסחה שקולה.

4.4 משפט הטאוטולוגיה

משפט 4.4.1 משפט הטאוטולוגיה של פוסט (Post)

אם A טאוטולוגיה אז $\vdash A$ (ניתן להסיק את A).

על מנת להוכיח את המשפט נוכיח תחילה מספר טענות עזר.

למה 4.4.2

אם $\vdash A_{i_1} \vee A_{i_2} \vee \ldots \vee A_{i_m}$ ו: $\{i_1, \ldots, i_m\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ אז: $\vdash A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$.

הוכחה: באינדוקציה על m.

נתחיל מהמקרה של $m \geq 3$ ולאחר מכן נוכיח את הבסיס של $m = 1$ ו $m = 2$.

כלל האסוציאטיביות אומר כי מ $\vdash A \vee (B \vee C)$ נובע $\vdash (A \vee B) \vee C$. לכן נקבל כי מ $\vdash A_{i_1} \vee (A_{i_2} \vee (A_{i_3} \vee \ldots A_{i_m}))$ נובע $\vdash (A_{i_1} \vee A_{i_2}) \vee (A_{i_3} \vee \ldots \vee A_{i_m})$.

גורמי האיווי הם: $A_{i_1} \vee A_{i_2}, A_{i_3}, \ldots, A_{i_m}$ ומספרם $m - 1$. לכן מותר להשתמש בהנחת האינדוקציה. ולכן:

$$\vdash (A_{i_1} \vee A_{i_2}) \vee A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$$

נסמן: $A = A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$. לכן קיבלנו:

$$\vdash (A_{i_1} \vee A_{i_2}) \vee A$$

ע"י שימוש בכלל הקומוטטיביות, נקבל כי:

$$\vdash A \vee (A_{i_1} \vee A_{i_2})$$

וע"י אסוציאטיביות:

$$\vdash (A \vee A_{i_1}) \vee A_{i_2}$$

כעת, יש לנו שני גורמי איווי, מהנחת האינדוקציה:

$$\vdash (A \vee A_{i_1}) \vee A_1 \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$$

כלומר:

$$\vdash (A \vee A_{i_1}) \vee A$$

נמשיך עם קומוטטיביות ונקבל:

$$\vdash A \vee (A \vee A_{i_1})$$

ואסוציאטיביות:

$$\vdash (A \vee A) \vee A_{i_1}$$

שוב, יש לנו שני גרומי איווי, משימוש באינדוקציה נקבל:

$$\vdash (A \vee A) \vee A \vee A_1 \vee \ldots \vee A_n$$

כלומר:

$$\vdash (A \vee A) \vee (A \vee A)$$

מכלל הצמצום:

$$\vdash (A \vee A)$$

ושוב:

$$\vdash A$$

כנדרש.

כעת נרצה להראות את הבסיס. $m = 1$. $\vdash A_{i_1}$, נסמן $i = i_1$, כלומר $\vdash A_i$. כלל ההרחבה אומר כי מ $\vdash B$ נובע $\vdash C \vee B$.

במידה ו $i < n$ נבצע את המהלך הבא באמצעות כלל ההרחבה:

$$\vdash (A_{i+1} \vee \ldots \vee A_n) \vee A_i$$

ומקומוטטיביות נקבל כי:

$$\vdash A_i \vee (A_{i+1} \vee \ldots \vee A_n)$$

במידה ו $i > 1$ נבצע את המהלכים הבאים (שנובעים כולם מהרחבה):

$$\begin{array}{ll} \vdash & A_{i-1} \vee (A_i \vee \ldots \vee A_n) \\ \vdash & A_{i-2} \vee (A_{i-1} \vee A_i \vee \ldots \vee A_n) \\ \vdots & \\ \vdash & A_1 \vee (A_2 \vee A_3 \vee \ldots \vee A_n) \end{array}$$

הערה 4.4.3 נבחין כי הוספנו כאן איבר איבר.
נשים לב כי זה הכרחי! מכיוון שסדר הסוגריים לא יהיה נכון אם נעשה:

$$(A_1 \vee \ldots \vee A_{i-1}) \vee (A_i \vee A_{i+1} \vee \ldots \vee A_n)$$

בהמשך נוכיח אסוציאטיביות בצורה יותר נרחבת שכן תאפשר לנו מעבר (נכון לעכשיו הוכחנו רק מעבר של סוגריים שמאלה, כלומר $\vdash X \vee (Y \vee Z)$ אז $\vdash (X \vee Y) \vee Z$.

נשאר לנו להראות את המקרה של $m = 2$. $\vdash A_{i_1} \vee A_{i_2}$. נסמן $i_1 = i$ ו: $j = i_2$. ולכן $\vdash A_i \vee A_j$. אם $i = j$ אז:

$$\vdash A_i \vee A_i$$

ולכן מכלל הצמצום נקבל:

$$\vdash A_i$$

ולכן המקרה שכבר ראינו. לכן, נניח ש $j \neq i$. אם $i < j$ אז מ $\vdash A_j \vee A_i$ נקבל $\vdash A_i \vee A_j$.
לכן, נשאר המקרה של $i < j$, $\vdash A_i \vee A_j$ כאשר $1 \leq i < j \leq n$. כעת נשתמש באינדוקציה לפי n. הערך המינימלי האפשרי הוא כמובן $n = 2$ (הרי יש לנו שני איברים).
עבור $n = 2$ נקבל $i = 1, j = 2$. ואז $\vdash A_1 \vee A_2$ צריך להוכיח $\vdash A_1 \vee A_2$ וזה בדיוק אותו דבר. כלומר טריוויאלי.
עבור $n > 2$. תחילה נניח כי $i > 1$. לפי הנחת האינדוקציה נוכל להסיק כי:

$$\vdash A_2 \vee A_3 \vee \ldots \vee A_n$$

ומהרחבה:

$$\vdash A_1 \vee (A_2 \vee \ldots \vee A_n)$$

22/11/2012 נשאר לטפל במקרה של $i = 1$.
כעת נניח כי $i = 1$, כלומר נתון כי: $\vdash A_1 \vee A_j$. אם $j = 2$ אז $\vdash A_1 \vee A_2$ ומכלל ההרחבה:

$$\vdash (A_3 \vee \ldots \vee A_n) \vee (A_1 \vee A_2)$$

אסוציאטיביות:

$$\vdash ((A_3 \vee \ldots A_n) \vee A_1) \vee A_2$$

קומוטטיביות:

$$\vdash A_2 \vee ((A_3 \vee \ldots \vee A_n) \vee A_1)$$

אסוציאטיביות:

$$\vdash (A_2 \vee (A_3 \vee \ldots \vee A_n)) \vee A_1$$

קומוטטיביות:

$$\vdash A_1 \vee (A_2 \vee (A_3 \vee \ldots \vee A_n))$$

כנדרש.
אם $j > 2$ אז: $\vdash A_1 \vee A_j$ מהנחת האינדוקציה, $\vdash A_1 \vee A_3 \vee \ldots \vee A_n$ (A_2 **לא נמצא!**) (כי יש שם $n - 1$ גורמים, וכל הגורמים בראשון נמצאים גם בשני).
אז יש לנו:

$$\vdash A_1 \vee (A_3 \vee \ldots \vee A_n)$$

מקומוטטיביות:

$$\vdash (A_3 \vee \ldots \vee A_n) \vee A_1$$

ומהרחבה:

$$\vdash A_2 \vee ((A_3 \vee \ldots \vee A_n) \vee A_1)$$

מאסוציאטיביות:

$$\vdash (A_2 \vee (A_3 \vee \ldots \vee A_n)) \vee A_1$$

ומקומוטטיביות שוב:

$$\vdash A_1 \vee (A_2 \vee (A_3 \vee \ldots \vee A_n))$$

כעת, נוכיח את הטענת עזר הבאה: ■

למה 4.4.4

מ $\vdash A \vee B$ נובע $\vdash (\neg\neg A) \vee B$.

הוכחה: $(\neg A) \vee (\neg\neg A) \vdash$ אקסיומה פרופורציונית. מ $\vdash A \vee B$ $\vdash \neg A \vee \neg\neg A$ (קומוטטיביות על הקודם) נובע:

$$\vdash B \vee \neg\neg A$$

(כלל החתך). ולכן מקומוטטיביות נקבל:

$$\vdash (\neg\neg A) \vee B$$

כנדרש.

כעת נוכיח גם את הלמה הבאה: ■

למה 4.4.5

מ $\vdash \neg A \vee C$ ומ: $\vdash \neg B \vee C$ נובע: $\vdash (\neg (A \vee B)) \vee C$.

הוכחה: פרופוזיציונית:

$$\vdash (\neg (A \vee B)) \vee (A \vee B)$$

מקומוטטיביות:

$$\vdash ((\neg (A \vee B)) \vee A) \vee B$$

אבל גם $\vdash \neg B \vee C$ לכן, מחתך:

$$\vdash (\neg (A \vee B) \vee A) \vee C$$

ומקומוטטיביות:

$$\vdash C \vee (\neg (A \vee B) \vee A)$$

מאסוציאטיביות:

$$\vdash (C \vee (\neg (A \vee B))) \vee A$$

ומקומוטטיביות:

$$\vdash A \vee (C \vee (\neg (A \vee B)))$$

אבל גם: $\vdash \neg A \vee C$ לכן מחתך:

$$\vdash (C \vee (\neg (A \vee B))) \vee C$$

ומלמה קודמת נקבל כי:

$$\vdash (\neg (A \vee B)) \vee C$$

■

כעת נרצה להוכיח את המשפט עצמו: **הוכחה:** נניח כי A טאוטולוגיה, צריך להוכיח $\vdash A$.

1. נניח כי $A = A_1 \vee \ldots \vee A_n$ כאשר לכל A_i היא אלמנטרית אזי קיימים $i \neq j$ כך ש $A_j = \neg A_i$ כלומר $\vdash \neg A_i \vee A_i$ (פרופוזיציוניות). לכן: $\vdash A_j \vee A_i$ ולפי הלמה הראשונה נקבל כי: $\vdash A_1 \vee \ldots \vee A_n$ כלומר $\vdash A$ כנדרש.

2. אם לא, נשתמש באינדוקציה על $S(A)$ אם $S(A) = 1$ אז A אלמנטרית ולכן המשפט נכון באופן ריק. נניח $S(A) > 1$ אזי:

(א) $A_i = B \vee C$

(ב) $A_i = \neg\neg B$

(ג) $A_i = \neg(B \vee C)$

נוכיח את המקרים השונים. עבור מקרה (א) אם :

$$A = A_1 \vee \ldots \vee A_{n-1} \vee \underbrace{A_n}_{B \vee C}$$

נסתכל על:

$$S(A) = S(A_1 \vee \ldots \vee A_n) = \ell(A_1) + \ldots + \ell(A_n)$$

אבל גם:

$$A' = A_1 \vee \ldots \vee A_{n-1} \vee B \vee C$$

(והיא כמובן זהה לA) אבל מתקיים:

$$S(A') = \ell(A_1) + \ldots + \ell(B) + \ell(C) = S(A) - 1$$

26/11/2012 ומהנחת האינדוקציה $\vdash A$.

עבור מקרה (ב): אם:

$$A = (\neg\neg B) \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$$

אם A טאוטולוגיה אז $A' = B \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$ היא טאוטולוגיה. אבל $S(A) > S(A')$ לכן לפי הנחת האינדוקציה $\vdash A'$.

כלומר $\vdash B \vee (A_2 \vee \ldots \vee A_n)$ לכן: $\vdash (\neg\neg B) \vee (A_2 \vee \ldots \vee A_n)$ כלומר, $\vdash A$. (נובע מהלמה השניה, שמ: $\vdash A \vee B$ נובע $\vdash \neg\neg A \vee B$).

כעת נראה את (ג):

נבחין כי:

$$A = (\neg(B \vee C)) \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n$$

נגדיר את הנוסאות:

$$\begin{aligned} A_1' &= (\neg B) \vee A_2 \vee \ldots \vee A_n \\ A_2' &= (\neg C) \vee A_2 \vee \ldots \vee A_N \end{aligned}$$

ולכן: $S(A_1') < S(A)$ וגם $S(A_2') < S(A)$. כולמר, הוכחנו ש A היא טאוטולוגיה אם ורק אם A_1' ו A_2' הן טאוטולוגיות. לכן, לפי הנחת האינדוקציה, $\vdash A_1'$ ו $\vdash A_2'$. לכן לפי הלמה האחרונה גם:

$$\vdash (\neg(B \vee C)) \vee (A_2 \vee \ldots \vee A_n)$$

כלומר, $\vdash A$ כנדרש. ■

נזכור כי הוכחנו את הטענה:

טענה 4.4.6

B היא גרירה טאוטולוגית של $A_1, A_2, \ldots, A_n$ אס"ס $A_1 \to A_2 \to \ldots \to A_n \to B$ היא טאוטולוגיה.

מסקנה 4.4.7

אם B היא גרירה טאוטולוגית של $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ו: $\vdash A_1, \vdash A_2, \ldots, \vdash A_n$ אז $\vdash B$.

הוכחה: לפי הטענה הקודמת: $A_1 \to A_2 \to \ldots \to A_n \to B$ היא טאוטולוגיה. ולפי משפט הטאוטולוגיה:

$$\vdash A_1 \to A_2 \to \ldots \to A_n \to B$$

ואז נשתמש בכלל הנתוק n פעמים ונקבל: $\vdash B$ כנדרש. ■

דוגמה 4.4.8 : מ $\vdash A \to B$ נובע: $\vdash \neg B \to \neg A$. נשים לב כי: $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ היא טאוטולוגיה.
מכיוון ש:

$V(A)$	$V(B)$	$V(A \to B)$	$V(\neg B \to \neg A)$	$V((A \to B) \to (\neg B \to \neg A))$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$
$\mathbb{T}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$
$\mathbb{F}$	$\mathbb{F}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$	$\mathbb{T}$

ולכן $\neg B \to \neg A$ היא גרירה טאוטולוגית של $A \to B$. לכן, לפי המסקנה ממשפט הטאוטולוגיה, מ $\vdash A \to B$ נובע: $\vdash \neg B \to \neg A$ וכדומה.

פרק 5

הוספת כמתים וכללים נוספים

5.1 הכנסת כמתים

טענה 5.1.1 כלל הכנסת $\exists$

מ $\vdash A \to B$ נובע $\vdash (\exists x)\, A \to B$ בתנאי שהמשתנה x אינו מופיע חופשית ב B.

טענה 5.1.2 כלל הכנסת $\forall$

מ $\vdash A \to B$ נובע $\vdash A \to (\forall x)\, B$ בתנאי שהמשתנה x אינו מופיע חופשית ב A.

הוכחה: נתון $\vdash A \to B$ ונתון ש x אינו מופיע ב A אז: $\vdash \neg B \to \neg A$.
x אינו מופיע חופשית ב $\neg A$ ולכן לפי כלל הכנסת $\exists$ נקבל:

$$\vdash (\exists x)\,(\neg B) \to \neg A$$

הנוסחה: $\neg\neg A \to \neg\,(\exists x)\,(\neg B)$ היא גרירה טאוטולוגית של $(\exists x)\,(\neg B) \to \neg A$. ולכן: $A \to \neg\,(\exists x)\,(\neg B)$ היא גרירה טאוטולוגית של $\neg\neg A \to \neg\,(\exists x)\,(\neg B)$. לכן:

$$\vdash A \to \neg\,(\exists x)\,(\neg B)$$

כלומר

$$\vdash A \to (\forall x)\, B$$

כנדרש. ■

טענה 5.1.3 כלל הכללה

מ $\vdash A$ נובע $\vdash (\forall x)\, A$.

הוכחה: מ $\vdash A$ נובע $\vdash \neg\,(\forall x)\, A \to A$. (הסבר: נוסחה $A \to B$ היא גרירה טאוטולוגית של A).
לפי כלל הכנסת $\forall$ נקבל: $\vdash \neg\,(\forall x)\, A \to (\forall x)\, A$. נזכור כי $A \to B$ הוא קיצור ל $(\neg A) \vee B$, לכן:

$$\vdash \neg\,(\neg\,(\forall x)\, A) \vee ((\forall x)\, A)$$

אבל A היא גרירה טאוטולוגית של $\neg\neg A$, ולכן נקבל:

$$\vdash (\forall x)\, A \vee (\forall x)\, A$$

ומצמצום נקבל:

$$\vdash (\forall x)\, A$$

כנדרש. ■

5.2 משפט ההצבה

תזכורת 5.2.1 אקסיומת ההצבה: נזכור כי $A_x[b] \to (\exists x)\, A$.

טענה 5.2.2

אם $\vdash A$ אז $\vdash A_x[b]$ כאשר x משתנה, b שם עצם.

הוכחה: לפי כלל ההכללה, $\vdash (\forall x)\, A$, כלומר:

$$\vdash \neg (\exists x)(\neg A)$$

נשתמש באקסיומת ההצבה עבור $\neg A$. נקבל כי:

$$\vdash \neg A_x[x] \to (\exists x)(\neg A)$$

הנוסחה $A_x[b]$ היא גרירה טאוטולוגית של $\neg(\exists x)(\neg A)$ ו: $\neg A_x[b] \to (\exists x)(\neg A)$. מדוע?
נניח ש $V(\neg(\exists x)(\neg A)) = \mathbb{T}$ וגם: $V(\neg A_x[B] \to (\exists x)(\neg A)) = \mathbb{T}$ לכן: $V((\exists x)\neg A) = \mathbb{F}$, לכן בהכרח: $V(\neg A_x[b]) = \mathbb{F}$, אז בהכרח:

$$V(A_x[b]) = \mathbb{T}$$

לכן לפי משפט הטאוטולוגיה, $\vdash A_x[b]$ כנדרש. ■

טענה 5.2.3

אם $\vdash A$ אז $\vdash A_{x_1,x_2,\ldots,x_n}[b_1,b_2,\ldots,b_n]$ כאשר $b_1,\ldots,b_n$ הם שמות עצם.

הערה 5.2.4 לפי הטענה הקודמת אפשר להסיק: $\vdash A_{x_1}[b_1]$. נשתמש שוב בטענה הקודמת, ונקבל: $\vdash (A_{x_1}[b_1])_{x_2}[b_2]$.
אבל אנו צריכים:

$$\vdash A_{x_1,x_2}[b_1,b_2]$$

אבל הם לא חייבים להיות זהים! מכיוון ש x_2 יכול להיופיע ב b_1, ואז נפלנו. כלומר, הוכחה באינדוקציה לא עובדת כאן באופן פשוט!

הוכחה: נקח משתנים חדשים $y_1,y_2,\ldots,y_n$ שאינם מופיעים ב $A,b_1,\ldots,b_n$. מ $\vdash A$ נובע $\vdash A_{x_1}[y_1]$ ולכן:

$$\vdash (A_{x_1}[y_1])_{x_2}[y_2]$$

אבל:

$$(A_{x_1}[y_1])_{x_2}[y_2] = A_{x_1,x_2}[y_1,y_2]$$

ולכן:

$$\left(\ldots\left((A_{x_1}[y_1])_{x_2}[y_2]\right)\ldots\right)_{x_n}[y_n] = A_{x_1,x_2,\ldots,x_n}[y_1,y_2,\ldots,y_n]$$

באינדוקציה: $\vdash \left(\ldots\left((A_{x_1}[y_1])_{x_2}[y_2]\right)\ldots\right)_{x_n}[y_n]$ ולכן: $\vdash A_{x_1,x_2,\ldots,x_n}[y_1,y_2,\ldots,y_n]$. כעת נבחין כי:

$$\left(\ldots\left((A_{x_1}[y_1,\ldots,y_n])_{y_1}[b_1]\right)_{y_2}[b_2]\ldots\right)_{y_n}[b_n] = (A_{x_1,\ldots,x_n}[y_1,\ldots,y_n])_{y_1,\ldots,y_n}[b_1,\ldots,b_n] = A_{x_1,\ldots,x_n}[b_1,\ldots,b_n]$$

ולכן, אחרי $2n$ שימושים בטענה הקודמת, נקבל כי $\vdash A_{x_1,\ldots,x_n}[b_1,\ldots,b_n]$ כנדרש. ■

נרצה להכליל את אקסיומת ההצבה למקרה של n משתנים.

משפט 5.2.5 משפט ההצבה

.1

$$\vdash A_{x_1,x_2,\ldots,x_n}\left[b_1,\ldots,b_n\right]\to\left(\exists x_1\right)\left(\exists x_2\right)\ldots\left(\exists x_n\right)A$$

.2

$$\vdash\left(\forall x_1\right)\left(\forall x_2\right)\ldots\left(\forall x_n\right)A\to A_{x_1,\ldots,x_n}\left[b_1,\ldots,b_n\right]$$

הוכחה:

1. הנוסחה $\vdash A\to\left(\exists x\right)A$ היא מקרה פרטי של אקסיומת ההצבה כי $A=A_x\left[x\right]$. ובאופן דומה:

$$\vdash A\to\left(\exists x_n\right)A,\ \vdash\left(\exists x_n\right)A\to\left(\exists x_{n-1}\right)\left(\exists x_n\right)A,\ldots\ \vdash\left(\exists x_2\right)\ldots\left(\exists x_n\right)A\to\left(\exists x_1\right)\left(\exists x_2\right)\ldots\left(\exists x_n\right)A$$

הנוסחה $A_1\to A_n$ היא גרירה טאוטולוגית של $A_1\to A_2,A_2\to A_3,\ldots,A_{n-1}\to A_n$ ולכן:

$$\vdash A\to\left(\exists x_1\right)\left(\exists x_2\right)\ldots\left(\exists x_n\right)A$$

לפי טענה קודמת:

$$\vdash\left(A\to\left(\exists x_1\right)\ldots\left(\exists x_n\right)A\right)_{x_1,\ldots,x_n}\left[b_1,\ldots,b_n\right]$$

כלומר:

$$\vdash A_{x_1,\ldots,x_n}\left[b_1,\ldots,b_n\right]\to\left(\exists x_1\right)\ldots\left(\exists x_n\right)A$$

כנדרש. 29/11/2012

2. $\vdash A\to\left(\exists x\right)A$ לעומתו: $\vdash\left(\forall x\right)A\to A$. הראשון הוא מקרה פרטי של אקסיומת ההצבה ($\vdash A_x\left[b\right]\to\left(\exists x\right)A$). איך נוכיח את השני? ראשית נפתח את אקסיומת ההצבה בשביל "לא A" כלומר:

$$\vdash\neg A_x\left[b\right]\to\left(\exists x\right)\neg A$$

ועל כן:

$$\vdash\neg\left(\exists x\right)\left(\neg A\right)\to\neg\neg A_x\left[b\right]$$

כלומר:

$$\vdash\left(\forall x\right)A\to A_x\left[b\right]$$

נתבונן בהצבה: $A_x\left[x\right]=A$. הצבה זו חוקית מכיוון שמצבים את x איפה שהוא מופיע בצורה חופשית, ועל כן הוא לא קשור בכמת. ולכן:

$$\vdash\left(\forall x\right)A\to A$$

כעת, אנו הולכים להשתמש בנוסחה זו מספר פעמים:

$$\begin{aligned}\vdash\left(\forall x_n\right)A&\to A\\ \vdash\left(\forall x_{n-1}\right)\left(\forall x_n\right)A&\to\left(\forall x_n\right)A\\ \vdash\left(\forall x_{n-2}\right)\left(\forall x_{n-1}\right)\left(\forall x_n\right)A&\to\left(\forall x_{n-1}\right)\left(\forall x_n\right)A\\ &\vdots\\ \vdash\left(\forall x_1\right)\left(\forall x_2\right)\ldots\left(\forall x_n\right)A&\to\left(\forall x_2\right)\ldots\left(\forall x_n\right)A\end{aligned}$$

נזכיר כי הנוסחה $B_1 \to B_n$ היא גרירה טאוטולוגית של:

$$B_1 \to B_2, \quad B_2 \to B_3, \quad \ldots, \quad B_{n-1} \to B_n$$

נניח כי V הערכה כך ש:

$$\begin{aligned} V(B_1 \to B_2) &= \mathbb{T} \\ V(B_2 \to B_3) &= \mathbb{T} \\ &\vdots \\ V(B_{n-1} \to B_n) &= \mathbb{T} \end{aligned}$$

אם $V(B_n) = \mathbb{T}$ אז כמובן $V(B_1 \to B_n) = \mathbb{T}$. נניח ש $V(B_n) = \mathbb{F}$, לכן, מ $V(B_{n-1} \to B_n) = \mathbb{T}$ נובע כי $V(B_{n-1}) = \mathbb{F}$. באופן דומה: $V(B_{n-2}) = \mathbb{F}$ וכו' עד $V(B_1) = \mathbb{F}$. לכן: $V(B_1 \to B_n) = \mathbb{T}$ כנדרש.
לכן נקבל:

$$\vdash (\forall x_1)(\forall x_2)\ldots(\forall x_n) A \to A$$

הוכחנו כלל מ $\vdash A$ נובע: $\vdash A_{x_1,\ldots,x_n}[b_1,\ldots,b_n]$ נשתמש בו ונקבל:

$$\vdash ((\forall x_1)(\forall x_2)\ldots(\forall x_n) A \to A)_{x_1,\ldots,x_n}[b_1,\ldots,b_n]$$

בהתחלה, כל הx־ים קשורים בכמתים לכן נשארים כמו שהם, ולכן נקבל:

$$\vdash (\forall x_1)(\forall x_2)\ldots(\forall x_n) A \to A_{x_1,\ldots,x_n}[b_1,\ldots,b_n]$$

כנדרש.

■

5.3 כלל הפילוג

טענה 5.3.1 כלל הפילוג

1. מ $\vdash A \to B$ נובע: $\vdash (\exists x) A \to (\exists x) B$.
2. מ: $\vdash A \to B$ נובע: $\vdash (\forall x) A \to (\forall x) B$.

הוכחה: ■

1. כבר ידוע כי: $\vdash B \to (\exists x) B$. נתון $\vdash A \to B$ ולכן לפי משפט הטאוטולוגיה: $\vdash A \to (\exists x) B$ מכיוון ש x איננו מופיע חופשי ב $(\exists x) B$ נשתמש בכלל להכנסת: $\exists$.

$$\vdash (\exists x) A \to (\exists x) B$$

2. נרשום $\vdash (\forall x) A \to A$ וכן נתון $\vdash A \to B$. לכן, לפי משפט טאוטולוגיה: $\vdash (\forall x) A \to B$. מכיוון ש x אינו מופיע חופשי ב $(\forall x) A$ נוכל להשתמש בכלל הכנסת $\forall$ ונקבל:

$$\vdash (\forall x) A \to (\forall x) B$$

כנדרש.

טענה 5.3.2

$\vdash A$ אס"ס $\vdash (\forall x) A$.

הוכחה: כבר הוכחנו את כלל ההכללה: מ $\vdash A$ נובע $\vdash (\forall x) A$. נראה את הכיוון השני.
נניח ש $\vdash (\forall x) A$. גם ידוע ש:

$$\vdash (\forall x) A \to A$$

ולכן, לפי כלל הניתוק: $\vdash A$, כנדרש. ■

5.4 משפט הדדוקציה

כאשר ניתן להסיק נוסחה C על סמך קבוצת נוסחאות $\mathfrak{a}$ נסמן זאת: $\vdash_{\mathfrak{a}} C$.

משפט 5.4.1 משפט הדדוקציה

נניח ש A נוסחה סגורה, אז: $\vdash_{\mathfrak{a}\cup\{A\}} B$ אם ורק אם: $\vdash_{\mathfrak{a}} A \to B$.

הוכחה: $\Rightarrow$ נניח כי $\vdash_{\mathfrak{a}} A \to B$ אזי כמובן: $\vdash_{\mathfrak{a}\cup\{A\}} A \to B$. מצד שני: $\vdash_{\mathfrak{a}\cup\{A\}} A$, ולפי כלל להניתוק: $\vdash_{\mathfrak{a}\cup\{A\}} B$.
$\Leftarrow$ נתון $\vdash_{\mathfrak{a}\cup\{A\}} B$ צריך להוכיח: $\vdash_{\mathfrak{a}} A \to B$. ההוכחה תתבצע באינדוקציה לפי אורך ההסק של B. אם אורך ההסק הוא 1, $\vdash_{\mathfrak{a}\cup\{A\}} B$ זה אומר שאו ש B אקסיומה לוגית או: $B \in \mathfrak{a} \cup \{A\}$ כלומר או ש: $B \in \mathfrak{a}$ או ש $B = A$.

1. אם B אקסיומה לוגית, אז: $\vdash B$ ואז ממשפט הטאוטולוגיה: $\vdash A \to B$ ולכן: $\vdash_{\mathfrak{a}} A \to B$
2. $\vdash_{\mathfrak{a}} B$ ואז לפי משפט הטאוטולוגיה: $\vdash_{\mathfrak{a}} A \to B$.
3. $B = A$, מתקיים $\vdash_{\mathfrak{a}\cup\{A\}} A$ אבל תמיד מתקיים:: $\vdash A \to A$ ובפרט גם: $\vdash_{\mathfrak{a}} A \to A$, דהיינו: $\vdash_{\mathfrak{a}} A \to B$.

03/12/2012

הערה 5.4.2 אם הנוסחה C היא גרירה טאוטולוגית של $B_1, \ldots, B_n$ אז הנוסחה $A \to C$ היא גרירה טאוטולוגית של:

$$A \to B_1,\ A \to B_2,\ \ldots,\ A \to B_n$$

נניח ש V הערכה כך ש:

$$\begin{aligned} V(A \to B_1) &= \mathbb{T} \\ &\vdots \\ V(A \to B_n) &= \mathbb{T} \end{aligned}$$

אם: $V(C) = \mathbb{T}$ אז כמובן: $V(A \to C) = \mathbb{T}$. נניח ש $V(C) = \mathbb{F}$ אז קיים i כך ש $1 \le i \le n$ ומתקיים: $V(B_i) = \mathbb{F}$. מצד שני, $V(A \to B_i) = \mathbb{T}$ ולכן: $V(A) = \mathbb{F}$ ונקבל כי: $V(A \to C) = \mathbb{T}$ כפי שהערנו.

בכל כללי ההסק, יש לנו גרירה טאוטולוגית של הנחות:

- כלל ההרחבה: מ$\vdash X$ נובע $\vdash Y \vee X$ (אנו מניחים את X, $\vdash X$, $Y \vee X$ היא גרירה טאוטולוגית של X).
- כלל הצמצום: מ$\vdash X \vee X$ נובע $\vdash X$ (X היא גרירה טאוטולוגית של $X \vee X$).
- אסוציאטיביות: מ $\vdash X \vee (Y \vee Z)$ נובע $\vdash (X \vee Y) \vee Z$ ($(X \vee Y) \vee Z$ היא גרירה טאוטולוגית של $X \vee (Y \vee Z)$).
- כלל החתך: מ $\vdash X \vee Y$ ו $\vdash \neg X \vee Z$ נובע $\vdash Y \vee Z$ ($Y \vee Z$ היא גרירה טאוטולוגית של $X \vee Y$ ו: $\neg X \vee Z$).

כלומר:

- $A \to (Y \vee X)$ היא גרירה טאוטולוגית של $A \to X$.
- $A \to X$ היא גרירה טאוטולוגית של $A \to (X \vee X)$.
- $A \to ((X \vee Y) \vee Z)$ היא גרירה טאוטולוגית של $A \to (X \vee (Y \vee Z))$.
- $A \to (Y \vee Z)$ היא גרירה טאוטולוגית של $A \to (X \vee Y)$ ו: $A \to (\neg X \vee Z)$.

בעובדות אלה נשתמש בהמשך ההוכחה.

נראה רק את המקרה של כלל החתך וכלל הכנסת $\exists$, נתון $\vdash_{\mathfrak{a}\cup\{A\}} B$ כך $B = Y \vee Z$ (כלומר בסדרת ההסק של B בשלב מוקדם יותר היו $\vdash_{\mathfrak{a}\cup\{A\}} X \vee Y$ וגם: $\vdash_{\mathfrak{a}\cup\{A\}} \neg X \vee Z$), לפי הנחת האינדוקציה: $\vdash_{\mathfrak{a}} A \to (X \vee Y)$ ו: $\vdash_{\mathfrak{a}} A \to (\neg X \vee Z)$. הנוסחה $A \to (Y \vee Z)$ היא גרירה טאוטולוגית של $A \to (X \vee Y)$ ו: $A \to (\neg X \vee Z)$, לכן, לפי משפט טאוטולוגיה: $\vdash_{\mathfrak{a}} A \to (Y \vee Z)$, כלומר: $\vdash_{\mathfrak{a}} A \to B$.

נראה כלל הכנסת $\exists$: מ $\vdash X \to Y$ נובע: $\vdash (\exists x)\, X \to Y$ (x אינו מופיע חופשית ב Y). השיקול שהיה לנו קודם לא עובד, אין גרירה טאוטולוגית בין הראשון לשני, מכיוון שהוספנו כמת בהתחלה, לכן כל הערכה יכולה לתת לו ערך באופן

שרירותי. לכן, כעת: $B = (\exists x)\, X \to Y$, לכן באיזשהו שלב קודם בסדרת ההסק היה חייב להיות $\vdash_{\mathfrak{a}\cup\{A\}} X \to Y$.
לפי הנחת האינדוקציה: $\vdash_{\mathfrak{a}} A \to (X \to Y)$. הנוסחה $X \to A \to Y$ היא גרירה טאוטולוגית של $A \to X \to Y$
ולכן, לפי משפט הטאוטולוגיה: $\vdash_{\mathfrak{a}} X \to (A \to Y)$. A היא נוסחה סגורה, על כן, x אינו מופיע חופשית ב Y ולכן
אינו מופיע חופשית ב $A \to Y$. לכן ניתן להשתמש בכלל הכנסת $\exists$ ולקבל: $\vdash_{\mathfrak{a}} (\exists x)\, X \to (A \to Y)$. עוד שימוש
במשפט הטאוטולוגיה ונקבל: $\vdash_{\mathfrak{a}} A \to ((\exists x)\, X \to Y)$ כלומר: $\vdash_{\mathfrak{a}} A \to B$ כנדרש. ■

הערה 5.4.3 אם A איננה סגורה, אז הטענה של משפט הדדוקציה **איננה נכונה**.
למשל נניח שהשפה כוללת נוסחה $x = 0$. לפי כלל ההצבה נובע: מ $\vdash x = 0$ נובע: $\vdash (x = 0)_x [y]$. כלומר: $\vdash y = 0$.
זאת אומרת: $\vdash_{\{x=0\}} y = 0$. אבל אין להסיק: $\vdash (x = 0) \to (y = 0)$. כיוון שאם נתבונן במבנה $\mathcal{M}$ עם קבוצת
המבנה: $|\mathcal{M}| = \{0,1\}$. נקח השמה $\sigma : \mathrm{Var} \to |\mathcal{M}|$ כך ש $\sigma(x) = 0$ ו $\sigma(y) = 1$ אז נקבל:

$$\overline{\sigma}\left((x = 0) \to (y = 0)\right) = \mathbb{F}$$

אבל אם $\vdash (x = 0) \to (y = 0)$ היה נכון, היינו חייבים לקבל $\mathbb{T}$ מכיוון שמשפט הנאותות קובע כי אם ניתן להסיק
את טענה אזי כל השמה חייבת להחזיר עבורה $\mathbb{T}$. וזו כמובן סתירה.
לעומת זאת:

$$\vdash (\forall x)\,(x = 0) \to (\forall y)\,(y = 0)$$

היא כן נכונה. מכיוון שאנו לוקחים נוסחה סגורה $A = (\forall x)\,(x = 0)$. לכן יש לנו סדרת הסק:

$$\vdash_{\{A\}} A$$
$$\vdash_{\{A\}} (\forall x)\, x = 0$$
$$\vdash_{\{A\}} x = 0$$
כלל ההצבה: $\vdash_{\{A\}} y = 0$
כלל ההכללה: $\vdash_{\{A\}} (\forall y)\,(y = 0)$

ולכן:

$$\vdash A \to (\forall y)\,(y = 0)$$

כלומר:

$$\vdash (\forall x)\,(x = 0) \to (\forall y)\,(y = 0)$$

5.5 משפט הקבועים

משפט 5.5.1 משפט הקבועים

נרחיב את השפה באמצעות הוספת קבועים חדשים. נניח ש A נוסחה בשפה המקורית אז $\vdash_{\mathfrak{a},T} A$ אם ורק אם:
$\vdash_{\mathfrak{a},T} A_{x_1,\ldots,x_n}[e_1,\ldots,e_n]$ כאשר $e_1, e_2, \ldots, e_n$ הם קבועים חדשים.

הוכחה: $\Leftarrow$: נניח כי $\vdash_{\mathfrak{a},T} A$ אז $\vdash_{\mathfrak{a},T'} A$. ולפי כלל ההצבה: $\vdash_{\mathfrak{a},T} A_{x_1,\ldots,x_n}[e_1,\ldots,e_n]$.

$\Rightarrow$: נניח: $\vdash_{\mathfrak{a},T'} A_{x_1,\ldots,x_n}[e_1,\ldots,e_n]$. נכניס משתנים חדשים $y_1, y_2, \ldots, y_n, y_{n+1}, \ldots, y_s$ כנגד כל הקבועים
הדחשים שפגשנו אותם בהסק הנ"ל.

נבצע שכתוב של ההיסק כאשר כל קבוע חדש שמופיע בהיסק מוחלף במשתנה y_i המתאים לו.

כאמור, מתקיים: $\vdash_{\mathfrak{a},T'} A_{x_1,\ldots,x_n}[e_1,\ldots,e_n]$, ולכן יש לנו סדרת הסדק:

$$\begin{aligned}\vdash_{\mathfrak{a},T'} C_1 & \\ \vdash_{\mathfrak{a},T'} C_2 & \\ \vdots & \\ \vdash_{\mathfrak{a},T'} C_m &= A_{x_1,\ldots,x_n}[e_1,\ldots,e_n]\end{aligned}$$

נסמן: $C'_1, C'_2 \ldots, C'_m$ כך שבסופו של דבר: $C'_m = A_{x_1,\ldots,x_n}[y_1,\ldots,y_n]$. אנו רוצים להראות $\vdash_{\mathfrak{a},T} A_{x_1,\ldots,x_n}[y_1,\ldots,y_n]$.
נשתמש בכלל ההצבה:

$$\vdash_{\mathfrak{a},T} \left(A_{x_1,\ldots,x_n}[y_1,\ldots,y_n]\right)_{y_1,\ldots,y_n}[x_1,\ldots,x_n]$$

זאת אומרת:

$$\vdash_{\mathfrak{a},T} A$$

נשאר לנו רק להוכיח את הטענה הבאה:

טענה 5.5.2

יש לנו סדרת הסק:

$$\begin{aligned}&\vdash_{\mathfrak{a},T} C'_1\\ &\vdash_{\mathfrak{a},T} C'_2\\ &\vdots\\ &\vdash_{\mathfrak{a},T} C'_m\end{aligned}$$

הוכחה: נתון לנו $\vdash_{\mathfrak{a},T'} C_i$ אנו רוצים לבנות את C'_i. יש לנו מספר מקרים:

1. $C_i \in \mathfrak{a}$. הנוסחאות מ $\mathfrak{a}$ הן בשפה המקורית, לכן אין בהן קבועים חדשים ונקבל כי $C'_i = C_i \in \mathfrak{a}$ ולכן בפרט $\vdash_{\mathfrak{a},T} C'_i$.
2. C_i היא אקסיומה לוגית.
   (א) $C_i = \neg X \vee X$ אז נקבל: $C'_i = \neg X' \vee X'$.
   (ב) $C_i = (x = x)$. $C_i = C'_i = (x = x)$.
   (ג)

$$C_i = x_1 = y_1 \to \ldots \to x_n = y_n \to f(x_1,\ldots,x_n) = f(y_1,\ldots,y_n)$$

אקסיומת השיוויון: גם כאן נקבל: $C'_i = C_i$. ובאופן דומה:

$$C_i = x_1 = y_1 \to \ldots \to x_n = y_n \to P(x_1,\ldots,x_n) \to P(y_1,\ldots,y_n)$$

ונקבל: $C'_i = C_i$.

הערה 5.5.3 מה קורה אם יש לנו $\vdash e_j = e_j$? אז לאחר תהליך השכתוב נקבל: $\vdash y_j = y_j$.

(ד) **אקסיומת ההצבה:**

$$C_i = (B_x[b] \to (\exists x) B)$$

אבל נזכור כי B יכול להכיל קבועים ולכן:

$$C'_i = B'_x[b'] \to (\exists x)(B')$$

06/12/2012

3. C_i היא כלל הסק.

(א) **כלל ההרחבה:** מ $\vdash X$ נובע $\vdash Y \vee X$. לאחר תהליך השכתוב: מX' נובע $Y' \vee X'$.

(ב) **כלל הצמום:** מ $\vdash X \vee X$ נובע $\vdash X$. לאחר תהליך השכתוב: מ$X' \vee X'$ נובע X'.

(ג) **כלל האסוציאטיביות:** מ $\vdash X\vee(Y \vee Z)$ נובע: $\vdash (X \vee Y)\vee Z$. לאחר תהליך השכתוב: מ $X'\vee(Y' \vee Z')$ נובע $(X' \vee Y') \vee Z'$.

(ד) **כלל החתך:** מ $\vdash X \vee Y$ ו: $\vdash \neg X \vee Z$ נובע $\vdash Y \vee Z$. לאחר תהליך השכתוב: מ $X' \vee Y'$ ו: $\neg X' \vee Z'$ נובע $Y' \vee Z'$.

(ה) **כלל הכנסת** $\exists$: מ $\vdash X \to Y$ נובע $\vdash (\exists x)\, X \to Y$ בתנאי ש x אינו מופיע חופשית ב Y. לאחר תהליך השכתוב: אם $X' \to Y'$ נובע: $(\exists x)\, X' \to Y'$ מכיוון שכל y_i שונה מ x ולכן x אינו מופיע חופשית ב Y'.

המסקנה היא, ש:

$$\begin{gathered}\vdash_{\mathfrak{a},T} C_1' \\ \vdash_{\mathfrak{a},T} C_2' \\ \vdots \\ \vdash_{\mathfrak{a},T} C_m'\end{gathered}$$

היא באמת היסק לגיטימי. ■

זאת אומרת: $\vdash_{\mathfrak{a},T} A_{x_1,\ldots,x_n}[y_1,\ldots,y_n]$. ולכן, לפי כלל ההצבה: $\vdash_{\mathfrak{a},T} (A_{x_1,\ldots,x_n}[y_1,\ldots,y_n])_{y_1,\ldots,y_n}[x_1,\ldots,x_n]$.
זאת אומרת: $\vdash_{\mathfrak{a},T} A$ כנדרש. ■

5.6 משפט השקילות

משפט 5.6.1 משפט השקילות

נניח ש $\mathfrak{a}$ קבוצת נוסחאות. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ו: $B_1, B_2, \ldots, B_n$ נוסחאות, ונתון ש:

$$\begin{aligned}\vdash_{\mathfrak{a}} A_1 &\longleftrightarrow B_1 \\ \vdash_{\mathfrak{a}} A_2 &\longleftrightarrow B_2 \\ &\vdots \\ \vdash_{\mathfrak{a}} A_n &\longleftrightarrow B_n\end{aligned}$$

נניח ש A נוסחה, ושנוסחה B מתקבלת מ A ע"י כך שבכמה מקומות ב A כותבים כותבים במקום A_i את B_i אז: $\vdash_{\mathfrak{a}} A \longleftrightarrow B$.

הוכחה: ראשית, נסתכל על המקחרה המיוחד כאשר קיים i, $n \geq i \geq 1$, כך ש: $A = A_i$ אז $B = B_i$ או ש $A = A_i = B$. בכל מקרה נקבל $A \longleftrightarrow B$.

כעת, נשתמש באינדוקציה על אורך סדרת היצירה של A:

1. $A = P(u_1, \ldots, u_m)$ ואז מלבד המקרה המיוחד אין עוד אפשרויות.
2. $A = C \vee D$. במקרה כזה: $B = C' \vee D'$ ולפי הנחת האינדוקציה: $\vdash_{\mathfrak{a}} C \longleftrightarrow C'$ ו: $\vdash_{\mathfrak{a}} D \longleftrightarrow D'$. לכן, לפי משפט הטאוטולוגיה, נקבל כי: $\vdash_{\mathfrak{a}} C \vee D \longleftrightarrow C' \vee D'$. ז"א: $\vdash_{\mathfrak{a}} A \longleftrightarrow B$.
3. $A = \neg C$. אז: $B = \neg C'$. לפי הנחת האינדוקציה $\vdash_{\mathfrak{a}} C \longleftrightarrow C'$. ולפי משפט הטאוטולוגיה: $\vdash_{\mathfrak{a}} (\neg C) \longleftrightarrow (\neg C')$ ז"א: $\vdash_{\mathfrak{a}} A \longleftrightarrow B$.
4. $A = (\exists x)\, C$. לכן: $B = (\exists x)\, C'$. לפי הנחת האינדוקציה: $\vdash_{\mathfrak{a}} C \longleftrightarrow C'$. מכאן: $\vdash_{\mathfrak{a}} C \to C'$ ו: $\vdash_{\mathfrak{a}} C' \to C$. לפי כלל הפלוג,: $\vdash_{\mathfrak{a}} (\exists x)\, C \to (\exists x)\, C'$ וגם: $\vdash_{\mathfrak{a}} (\exists x)\, C' \to (\exists x)\, C$. ואז, לפי משפט הטאוטולוגיה: $\vdash_{\mathfrak{a}} (\exists x)\, C \longleftrightarrow (\exists x)\, C'$. ז"א: $\vdash_{\mathfrak{a}} A \longleftrightarrow B$.

וכלן הטענה נכונה, כנדרש. ■

10/12/12

פרק 6

משפט הוריאנט ומשפטי שיוויון

6.1 משפט הוריאנט

משפט 6.1.1 משפט הוריאנט

נניח שמשתנה y אינו מופיע חופשית בנוסחה B, אזי:

$$\vdash (\exists x)\, B \longleftrightarrow (\exists y)\left(B_x\left[y\right]\right)$$

הוכחה: לפי אקסיומת ההצבה:

$$\vdash B_x\left[y\right] \to (\exists x)\, B$$

מכיוון ש y לא מופיע חופשית בB, הוא גם לא מופיע חופשית ב $(\exists x)\, B$. ולכן מכלל הכנסת כמת $\exists$ נקבל כי:

$$\vdash (\exists y)\left(B_x\left[y\right]\right) \to (\exists x)\, B$$

כעת, מכיוון שy לא מופיע חופשית ב B מתקיים:

$$\left(B_x\left[y\right]\right)_y\left[x\right] = B$$

לפי אקסיומת ההצבה:

$$\vdash \left(B_x\left[y\right]\right)_y\left[x\right] \to (\exists y)\left(B_x\left[y\right]\right)$$

כלומר:

$$\vdash B \to (\exists y)\left(B_x\left[y\right]\right)$$

בגלל ההצבה, x אינו מופיע חופשית באגף הימני. לכן אפשר להשתמש בכלל הכנסת כמת ונקבל:

$$\vdash (\exists x)\, B \to (\exists y)\left(B_x\left[y\right]\right)$$

ולפי משפט הטאוטולוגיה נקבל ש:

$$\vdash (\exists x)\, B \longleftrightarrow (\exists y)\left(B_x\left[y\right]\right)$$

■

6.2 משפט השיוויון

לפני שנוכיח את משפט השיוויון, נוכיח את המשפט הבא:

משפט 6.2.1

עבור a, b שמות עצם, $\vdash a = b \longleftrightarrow b = a$.

הערה 6.2.2 זו טענה סמנטית, לא סנטקטית ולכן דורשת הוכחה.

הוכחה: על פי אקסיומת השיוויון:

$$\vdash (x_1 = y_1) \to \ldots \to (x_n = y_n) \to P(x_1, \ldots, x_n) \to P(y_1, \ldots, y_n)$$

ולכן, עבור P שהו יחס השוויון:

$$\vdash (x_1 = y_1) \to (x_2 = y_2) \to (x_1 = x_2 \to y_1 = y_2)$$

ובפרט:

$$\vdash (x = y) \to (x = x) \to ((x = x) \to (y = x))$$

מאקסיומת הזהות: $\vdash x = x$. אז, לפי משפט הטאוטולוגיה נקבל כי:

$$\vdash x = y \to y = x$$

ולפי כלל ההצבה:

$$\vdash (x = y \to y = x)_{x,y}[y, x]$$

נקבל:

$$\vdash y = x \to x = y$$

ולכן, לפי משפט הטאוטולוגיה:

$$\vdash x = y \longleftrightarrow y = x$$

ומכלל ההצבה:

$$\vdash (x = y \longleftrightarrow y = x)_{x,y}[a, b]$$

נקבל:

$$\vdash a = b \longleftrightarrow b = a$$

כנדרש. ■

כעת, נוכיח את משפט השיוויון.

משפט 6.2.3 משפט השיויון

נניח $a_1,\dots,a_n$ ו $b_1,\dots,b_n$ שמות עצם. כמו כן, נניח כי: $\vdash_{\mathfrak{a}} a_i = b_i$ לכל i.

1. נניח כי שם עצם c' מתקבל משם עצם c ע"י מספר החלפות של a_i בb_i אז: $\vdash_{\mathfrak{a}} c = c'$.
2. נניח שנוסחה A' מתקבלת מנוסחה A ע"י מספר החלפות של a_i בb_i (להוציא מקרה בו ב $(\exists z)\, B$, לא נחליף את הz שעומדת לאחר הכמתים), אז $\vdash_{\mathfrak{a}} A \longleftrightarrow A'$.

הוכחה:

1. ראשית, נדון במקרה הפרטי של: $c = a_i$ ו $b' = b_i$. נתון כי:

$$\vdash_{\mathfrak{a}} a_i = b_i$$

ולכן, מאקסיומת השיויון:

$$\vdash_{\mathfrak{a}} c = c'$$

כנדרש.
כעת, נשתמש באינדוקציה על אורך סדרת היצירה של c. אם $c = z$, משתנה אז מהמקרה הפרטי שהראנו, הטענה נכונה.
אם $c = f\left(u_1,\dots,u_m\right)$ כאשר u_i שמות עצם. מלבד המקרה המיוחד אשר טופל, נקבל כי:

$$c' = f\left(u_1',\dots,u_m'\right)$$

כאשר שם עצם u_i' מתקבל מ u_i ע"י מספר החלפות של a_i ב b_i. אבל, נבחין כי אורך סדרת היצירה של u_i הוא קטן מאורך סדרת היצירה של c ולכן והנחת האינדוקציה: $\vdash_{\mathfrak{a}} u_i = u_i'$ לכל $i = 1,\dots,m$. ולכן:

$$\vdash x_1 = y_1 \to x_2 = y_2 \to \dots \to x_m = y_m \to f\left(x_1,\dots,x_m\right) = f\left(y_1,\dots,y_m\right)$$

מכלל ההצבה:

$$\vdash u_1 = u_1' \to \dots \to u_m \to u_m' \to f\left(u_1,\dots,u_m\right) = f\left(u_1',\dots,u_m'\right)$$

מכלל הניתוק (בשילוב עם ההנחה) נקבל:

$$\vdash_{\mathfrak{a}} f\left(u_1,\dots,u_m\right) = f\left(u_1',\dots,u_m'\right)$$

כלומר:

$$\vdash_{\mathfrak{a}} c = c'$$

2. באינדוקציה על אורך סדרת היצירה של הנוסחה A.

(א) **בסיס לאינדוקציה:** $A = P\left(u_1,\dots,u_m\right)$. אז: $A' = P\left(u_1',\dots,u_m'\right)$. כאשר שם עצם u_i' מתקבל מ u_i ע"י מספר החלפות של a_j בb_j כאשר $j = 1,\dots,n$.
מחלק 1, $\vdash_{\mathfrak{a}} u_i = u_i'$ לכל $i = 1,\dots,m$.

$$\vdash \left(x_1 = y_1\right) \to \dots \to \left(x_n = y_n\right) \to P\left(x_1,\dots,x_n\right) \to P\left(y_1,\dots,y_n\right)$$

מכלל ההצבה נקבל כי:

$$\vdash \left(u_1 = u_1'\right) \to \dots \to \left(u_m = u_m'\right) \to P\left(u_1,\dots,u_m\right) \to P\left(u_1',\dots,u_m'\right)$$

ומכלל הניתוק:

$$\vdash_{\mathfrak{a}} P\left(u_1,\dots,u_m\right) \to P\left(u_1',\dots,u_m'\right)$$

לפי משפט שהוכחנו: $\vdash u_i' = u_i$ לכל $i = 1,\dots,m$. עוד שימוש בכלל ההצבה נותן:

$$\vdash u_1' = u_1 \to \dots \to u_m' = u_m \to P\left(u_1',\dots,u_m'\right) \to P\left(u_1,\dots,u_m\right)$$

ומכלל הניתוק:

$$\vdash_{\mathfrak{a}} P(u'_1,\ldots,u'_m) \to P(u_1,\ldots,u_m)$$

ולכן, ממשפט הטאוטולוגיה:

$$\vdash_{\mathfrak{a}} P(u_1,\ldots,u_m) \longleftrightarrow P(u'_1,\ldots,u'_m)$$

(ב) כאשר $A = B \vee C$, אזי $A' = B' \vee C'$ כאשר B', C' מתקבלים מ B, C ע"י מספר החלפות של a_i ב b_i. לB, C יש אורך סדרת יצירה קצר יותר מאשר לA. לכן, לפי הנחת האינדוקציה:

$$\vdash_{\mathfrak{a}} B \longleftrightarrow B'$$
$$\vdash_{\mathfrak{a}} C \longleftrightarrow C'$$

לכן, לפי משפט הטאוטולוגיה:

$$\vdash_{\mathfrak{a}} (B \vee C) \longleftrightarrow (B' \vee C')$$

כלומר $\vdash_{\mathfrak{a}} A \longleftrightarrow A'$.

(ג) $A = \neg B$. אז $A' = \neg B'$ כאשר B' מתקבל מB ע"י מספר החלפות של a_i בb_i. לכן, לפי הנחת האינדוקציה:

$$\vdash_{\mathfrak{a}} B \longleftrightarrow B'$$

וממשפט הטאוטולוגיה:

$$\vdash_{\mathfrak{a}} (\neg B) \longleftrightarrow (\neg B')$$

דהיינו:

$$\vdash_{\mathfrak{a}} A \longleftrightarrow A'$$

(ד) $A = (\exists x)\, B$. במקרה זה אני נזקקים לתנאי שהתנינו בניסוח המשפט. $A' = (\exists x)\, B'$ כאשר B' מתקבל מB ע"י מספר החלפות של a_i נb_i. מהנחת האינודקציה:

$$\vdash B \longleftrightarrow B'$$

לפי משפט הטאוטולוגיה:

$$\vdash_{\mathfrak{a}} B \to B'$$
$$\vdash_{\mathfrak{a}} B' \to B$$

מכלל הפילוג:

$$\vdash_{\mathfrak{a}} (\exists x)\, B \to (\exists x)\, B'$$
$$\vdash_{\mathfrak{a}} (\exists x)\, B' \to (\exists x)\, B$$

ולכן, ממשפט הטאוטולוגיה:

$$\vdash_{\mathfrak{a}} (\exists x)\, B \longleftrightarrow (\exists x)\, B'$$

כלומר:

$$\vdash_{\mathfrak{a}} A \longleftrightarrow A'$$

כנדרש.

■

טענה 6.2.4

נניח כי $a_1,\ldots,a_n$ שמות עצם. אזי:

$$\vdash a_1=b_1\to\ldots\to a_n=b_n\to c_{x_1,\ldots,x_n}[a_1,\ldots,a_n]=c_{x_1,\ldots,x_n}[b_1,\ldots,b_n]$$

הערה 6.2.5 היינו רוצים להשתמש במשפט הדדוקציה, אבל יש לנו בעיה. משפט הדדוקציה נכון אך ורק לנוסחאות סגורות! ומכיוון ש $a_i=b_i$ אינה סגורה (מכיוון שייתכן ויש משתנים ב a_i ו b_i). כמו כן, הם שם עצם, לכן אין בהם כמתים.

הוכחה: נצרף לשפה סמלי קבועים חדשים בכמות הנדרשת. נחליף את המשתנים המופיעים בשמות העצם: $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n$ בקבועים חדשים. נקבל שמות עצם: $a'_1,\ldots,a'_n,b'_1,\ldots,b'_n$ שאינם מכילים משתנים. וכמו כן c' שמתקבל מ c ע"י החלפת כל המשתנים מלבד $x_1,\ldots,x_k$. כעת אנו רוצים להראות כי:

$$\vdash a'_1=b'_1\to\ldots\to a'_n=b'_n\to c'_{x_1,\ldots,x_n}[a'_1,\ldots,a'_n]=c'_{x_1,\ldots,x_n}[b'_1,\ldots,b'_n]$$

נבחין כי כל הנוסחאות מלבד c' הן סגורות. לאחר ההחלפה נקבל כי כל הנוסחאות סגורות - לא נותר שום משתנה חופשי. לכן, לפי משפט השיוויון (חלק 1):

$$\vdash_{\{a'_1=b'_1,\ldots,a'_n=b'_n\}} c'_{x_1,\ldots,x_n}[a'_1,\ldots,a'_n]=c'_{x_1,\ldots,x_n}[b'_1,\ldots,b'_n]$$

על סמך משפט הדדוקציה (כעת כל הנוסחאות סגורות לכן אנו יכולים להשתמש בו) נקבל כי:

$$\vdash a'_1=b'_1\to\ldots\to a'_n=b'_n\to c'_{x_1,\ldots,x_n}[a'_1,\ldots,a'_n]=c'_{x_1,\ldots,x_n}[b'_1,\ldots,b'_n]$$

כעת, ממשפט הקבועים נקבל כי:

$$\vdash a_1=b_1\to\ldots\to a_n=b_n\to c_{x_1,\ldots,x_n}[a_1,\ldots,a_n]=c_{x_1,\ldots,x_n}[b_1,\ldots,b_n]$$

כנדרש. ■

13/12/2012

טענה 6.2.6

$$\vdash a_1=b_1\to\ldots\to a_n=b_n\to(A_{x_1,\ldots,x_n}[a_1,\ldots,a_n]\longleftrightarrow A_{x_1,\ldots,x_n}[b_1,\ldots,b_n])$$

כאשר a_i,b_i שמות עצם ו: A נוסחה.

הוכחה: נצרף סמלי קבועים חדשים לשפה ונציב אותם במקום כל המשתנים שמופיעים בשמות עצם $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n$. נקבל שמות עצם: $a'_1,\ldots,a'_n,b'_1,\ldots,b'_n$ שאין בהם משתנים ולכן כל הנוסחאות:

$$a'_1=b'_1,a'_2=b'_2,\ldots,a'_n=b'_n$$

הן סגורות.

לפי משפט השיוויון , חלק 2, אם עבור קבוצת נוסחאות $\mathfrak{a}$ מתקיים:

$$\begin{aligned}\vdash_{\mathfrak{a}} a'_1 &= b'_1\\ \vdash_{\mathfrak{a}} a'_2 &= b'_2\\ &\vdots\\ \vdash_{\mathfrak{a}} a'_n &= b'_n\end{aligned}$$

והיות ונוסחה:

$$A_{x_1,\ldots,x_n}[b'_1,\ldots,b'_n]$$

מתקבלת מנוסחה:

$$A_{x_1,\ldots,x_n}\left[a'_1,\ldots,a'_n\right]$$

ע"י מספר החלפות של a'_i ב b'_i. אז:

$$\vdash_{\mathfrak{a}} A_{x_1,\ldots,x_n}\left[a'_1,\ldots,a'_n\right] \longleftrightarrow A_{x_1,\ldots,x_n}\left[b'_1,\ldots,b'_n\right]$$

נקח:

$$\mathfrak{a}=\left\{a'_1=b'_1,a'_2=b'_2,\ldots,a'_n=b'_n\right\}$$

לכן נקבל:

$$\vdash_{\left\{a'_i=b'_i,\ldots,a'_n=b'_n\right\}} A_{x_1,\ldots,x_n}\left[a'_1,\ldots,a'_n\right] \longleftrightarrow A_{x_1,\ldots,x_n}\left[b'_1,\ldots,b'_n\right]$$

כעת, נוכל להשתמש במשפט הדידוקציה ונקבל:

$$\vdash a'_1=b'_1\to a'_2=b'_2\to\ldots\to a'_n=b'_n\to\left(A_{x_1,\ldots,x_n}\left[a'_1,\ldots,a'_n\right] \longleftrightarrow A_{x_1,\ldots,x_n}\left[b'_1,\ldots,b'_n\right]\right)$$

לפי הכיוון השני של משפט הקבועים נקבל כי:

$$\vdash a_1=b_1\to\ldots\to a_n=b_n\to\left(A_{x_1,\ldots,x_n}\left[a_1,\ldots,a_n\right] \longleftrightarrow A_{x_1,\ldots,x_n}\left[b_1,\ldots,b_n\right]\right)$$

כנדרש. ■

טענה 6.2.7

אם x אינו מופיע בשם עצם b אז:

$$\vdash A_x\left[b\right] \longleftrightarrow \left(\exists x\right)\left(\left(x=b\right)\wedge A\right)$$

הוכחה: לפי הטענה הקודמת:

$$\vdash x=b\to\left(A_x\left[x\right]\longleftrightarrow A_x\left[b\right]\right)$$

זאת אומרת:

$$\vdash x=b\to\left(A\longleftrightarrow A_x\left[b\right]\right)$$

לכן, לפי משפט הטאוטולוגיה:

$$\vdash\left(x=b\wedge A\right)\to A_x\left[b\right]$$

מכיוון שאם בשלילה V נותנת $\mathbb{F}$ אז: $V\left(A_x\left[b\right]\right)=\mathbb{F}$. ואז: $V\left(\left(x=b\right)\wedge A\right)=\mathbb{T}$ זאת אומרת:

$$V\left(x=b\right)=\mathbb{T}\quad V\left(A\right)=\mathbb{T}$$

לכן:

$$V\left(A\longleftrightarrow A_{x}\left[b\right]\right)=\mathbb{F}$$

ולכן:

$$V\left(\left(x=b\right)\rightarrow\left(A\longleftrightarrow A_{x}\left[b\right]\right)\right)=\mathbb{F}$$

וזו סתירה מכיוון ש:

$$\vdash x=b\rightarrow\left(A\longleftrightarrow A_{x}\left[b\right]\right)$$

לכן כל הערכה צריכה לתת $\mathbb{T}$.
היות וx אינו מופיע חופשית ב b, אז x אינו מופיע חופשית ב $A_{x}\left[b\right]$. ולכן, לפי כלל הכנסת $\exists$ נקבל כי:

$$\vdash\left(\exists x\right)\left(\left(x=b\right)\land A\right)\rightarrow A_{x}\left[b\right]$$

נזכיר את אקסיומת ההצבה: $C_{y}\left[d\right]=\left(\exists y\right)C$. נשתמש בה עבור: $C=\left(x=b\right)\land A$.
ולכן נקבל כי:

$$\vdash\left(\left(x=b\right)\land A\right)_{x}\left[b\right]\rightarrow\left(\exists x\right)\left(\left(x=b\right)\land A\right)$$

ומההצבה, נקבל:

$$\vdash\left(\left(b=b\right)\land A_{x}\left[b\right]\right)\rightarrow\left(\exists x\right)\left(\left(x=b\right)\land A\right)$$

מאקסיומת הזהות $\vdash x=x$ נקבל ע"י הצבה: $\vdash b=b$. ולפי משפט הטאוטולוגיה נקבל:

$$\vdash A_{x}\left[b\right]\rightarrow\exists x\left(\left(x=b\right)\land A\right)$$

לכן, לפי משפט הטאוטולוגיה:

$$\vdash A_{x}\left[b\right]\longleftrightarrow\exists x\left(\left(x=b\right)\land A\right)$$

כנדרש. ■

17/12/2012

פרק 7

צורת הקדומת

7.1 הגדרה

הגדרה 7.1.1 צורת הקדומת (Prenex Form): נוסחה A היא בצורת הקדומת כאשר:

$$A = (Q_1 x_1)(Q_2 x_2)\dots(Q_n x_n)\, B$$

כאשר כל Q_i הוא כמת $\exists$ או $\forall$ ובB אין כמתים בכלל.

7.2 קיום צורת הקדומת

משפט 7.2.1

לכל נוסחה A קיימת נוסחה A' בצורת הקידומת כך ש: $\vdash A \longleftrightarrow A'$.

הוכחה: נשתמש באינדוקציה לפי אורך סדרת היצירה של הנוסחה A.

בסיס: $A = P(u_1, \dots, u_n)$ - במקרה זה A בעצמה בצורת הקדומת (אין פה כמתים בכלל).

צעדים:

1. $A = B \vee C$. זהו מקרה יותר קשה. ונדחה אותו לסוף ההוכחה.
2. $A = (\neg B)$. על פי הנחת האינדוקציה, עבור B אפשר למצוא B' בצורת הקדומת כך ש:

$$\vdash B \longleftrightarrow B'$$

ו:

$$B' = (Q_1 y_1)(Q_2 y_2)\dots(Q_r y_r)\, C$$

כאשר בC אין כמתים. אז נגדיר:

$$A' = (Q'_1 y_1)(Q'_2 y_2)\dots(Q'_2 y_2)(\neg C)$$

כאשר אם $Q_i = \exists$ אז $Q'_i = \forall$ ואם: $Q_i = \forall$ אז $Q'_i = \exists$. נרצה להראות כי $\vdash A \longleftrightarrow A'$. לשם כך, מספיק להראות את הלמה הבאה:

למה 7.2.2

לכל נוסחה D מתקיים:

$$\vdash \neg((\exists z)\, D) \longleftrightarrow (\forall z)\neg D$$

וגם:

$$\vdash \neg(\forall z)\, D \longleftrightarrow (\exists z)\neg D$$

הוכחה: לשם הוכחה זו, נזכור כיצד הגדרנו את הכמת $\forall$. נזכיר כי: $(\forall x)\, K$ דהיינו: $\neg\,(\exists x)\,(\neg K)$. ולכן כדי להוכיח את החלק הראשון, אנו רוצים להראות:

$$\vdash \neg\,(\exists z)\, D \longleftrightarrow \neg\,(\exists z)\,\neg\neg D$$

וזה נובע, למשל, ממשפט השקילות.

כדי להראות את החלק השני, נתרגם שוב את הכולל ונקבל:

$$\vdash \neg\neg\,(\exists z)\,\neg D \longleftrightarrow (\exists z)\,\neg D$$

וגם כאן, זה נובע ממשפט השקילות. ■

אנו רוצים להוכיח כי מ־$\vdash B \longleftrightarrow B'$ נובע: $\vdash A \longleftrightarrow A'$. זאת אומרת:

$$\vdash \neg B \longleftrightarrow (Q_1' y_1) \ldots (Q_r' y_r)\,(\neg C)$$

מהלמה, נקבל כי:

$$\begin{array}{ll}
\vdash & A \longleftrightarrow \neg B \\
\vdash & \neg B \longleftrightarrow \neg B' \\
\vdash & \neg\,((Q_1 y_1) \ldots (Q_2 y_2)\, C) \longleftrightarrow (Q_1' y_1)\,\neg\,((Q_2 y_2) \ldots (Q_r y_r)\, C) \\
\vdash & (Q_1' y_1)\,\neg\,((Q_2 y_2) \ldots (Q_r y_r)\, C) \longleftrightarrow (Q_1' y_1)\,(Q_2' y_2)\,\neg\,((Q_3 y_3) \ldots (Q_r y_r)\, C) \\
 & \vdots \\
\vdash & A \longleftrightarrow (Q_1' y_1) \ldots (Q_r' y_r)\,(\neg C)
\end{array}$$

כלומר: $\vdash A \longleftrightarrow A'$ כנדרש.

3. $A = (\exists x)\, B$. לפי הנחת האידוקציה קיימת נוסחה B' בצורת הקדומת כך ש $\vdash B \longleftrightarrow B'$. כך ש: $B' = (Q_1 y_1) \ldots (Q_r y_r)\, C$. ואז נקח:

$$A' = (\exists x)\,(Q_1 y_1) \ldots (Q_r y_r)\, C$$

אנו יודעים כי:

$$\begin{array}{lll}
\vdash & B & \to B' \\
\vdash & B' & \to B
\end{array}$$

מכלל הפילוג:

$$\begin{array}{ll}
\vdash & (\exists x)\, B \to (\exists x)\, B' \\
\vdash & (\exists x)\, B' \to (\exists x)\, B
\end{array}$$

וממשפט השקילות:

$$\begin{array}{lll}
\vdash & A & \to A' \\
\vdash & A' & \to A
\end{array}$$

כלומר:

$$\vdash A \longleftrightarrow A'$$

כנדרש.

נשאר לנו רק להוכיח את המקרה של 1. כלומר כאשר $A = B \vee C$. לפי הנחת האינדוקציה קיימות נוסחאות B' ו C' בצורת הקדומת. כך ש:

$$\begin{aligned}\vdash \; B \; &\longleftrightarrow B' \\ \vdash \; C \; &\longleftrightarrow C'\end{aligned}$$

וכאמור מתקיים:

$$\begin{aligned}B' &= (Q_1 y_1)\dots(Q_r y_r)\, D \\ C' &= (R_1 z_1)\dots(R_s z_s)\, K\end{aligned}$$

ע"י שימוש במשפט הוריאנט נוכל להחליף את המשתנים $y_1, \dots, y_r$ ו: $z_1, \dots, z_s$ במשתנים אחרים שבכלל לא מופיעים יותר ב D ובK. כדי לא להרבות בסימון, נוכל להניח שזה כבר נכון עבור B' ו C'. כאן נרצה להוכיח את הלמה הבאה:

למה 7.2.3

1. $\vdash (\exists x)\, A \vee B \longleftrightarrow (\exists x)\,(A \vee B)$ - בתנאי ש x אינו מופיע חופשית ב B.
2. $\vdash (\forall x)\, A \vee B \longleftrightarrow (\forall x)\,(A \vee B)$ - בתנאי ש x אינו מופיע חופשית ב B.
3. $\vdash A \vee (\exists x)\, B \longleftrightarrow (\exists x)\,(A \vee B)$ - בתנאי ש x אינו מופיע חופשית ב A.
4. $\vdash A \vee (\forall x)\, B \longleftrightarrow (\forall x)\,(A \vee B)$ - בתנאי ש x אינו מופיע חופשית ב A.
5. $\vdash (\exists x)\, A \wedge B \longleftrightarrow (\exists x)\,(A \wedge B)$ - בתנאי ש x אינו מופיע חופשית ב B.
6. $\vdash (\forall x)\, A \wedge B \longleftrightarrow (\forall x)\,(A \wedge B)$ - בתנאי ש x אינו מופיע חופשית ב B.

הוכחה: נבחין כי 3 נובע מיידית מ 1 ו4 נובע מיידית ב 2. את 5 ו6 נשאיר כתרגיל (הם גם לא רלוונטים להוכחה).
נראה את 1. צריך להוכיח כי:

$$\vdash ((\exists x)\, A) \vee B \rightarrow (\exists x)\,(A \vee B)$$

לפי אקסיומת ההצבה:

$$\vdash A \vee B \rightarrow (\exists x)\,(A \vee B)$$

לפי משפט הטאוטולוגיה, נקבל כי:

$$\vdash A \rightarrow (\neg B \vee (\exists x)\,(A \vee B))$$

נבדוק את המעבר הזה, כלומר נראה כי $X \rightarrow \neg Y \vee Z$ היא גרירה של $X \vee Y \rightarrow Z$. נבחין כי:

$$\begin{gathered}(X \vee Y) \rightarrow Z \\ \neg\,(X \vee Y) \vee Z \\ (\neg X) \wedge (\neg Y) \vee Z \\ (\neg X \vee Z) \wedge (\neg Y \vee Z) \\ (X \rightarrow Z) \wedge (Y \rightarrow Z)\end{gathered}$$

לכן $(X \vee Y) \rightarrow Z$ היא גרירה טאוטולוגית של $X \rightarrow Z$ ו: $Y \rightarrow Z$. צריך להוכיח כי $\vdash (\exists x)\, A \rightarrow (\exists x)\,(A \vee B)$ ו: $\vdash B \rightarrow (\exists x)\,(A \vee B)$.

נבחין כי עבור הראשון:

$$\begin{aligned} &\vdash \quad A \to (A \vee B) \\ &\vdash \quad (\exists x)\, A \to (\exists x)\, (A \vee B) \end{aligned}$$

(המעבר מכלל הפילוג).
ואילו במקרה השני:

$$\vdash B \to A \vee B$$

מאקסיומת ההצבה:

$$\vdash (A \vee B) \to (\exists x)\, (A \vee B)$$

וממשפט הטאוטולוגיה:

$$\vdash B \to (\exists x)\, (A \vee B)$$

ולכן:

$$\vdash (((\exists x)\, A) \vee B) \to (\exists x)\, (A \vee B)$$

כעת, צריך להוכיח:

$$\vdash (\exists x)\, (A \vee B) \to (\exists x)\, A \vee B$$

מאאקסיומת ההצבה: $\vdash A \to (\exists x)\, A$. ממשפט הטאוטולוגיה:

$$\vdash A \vee B \to ((\exists x)\, A) \vee B$$

ומהכנסת $\exists$ נקבל:

$$\vdash (\exists x)\, (A \vee B) \to ((\exists x)\, A) \vee B$$

כלומר, הוכחנו:

$$\vdash (\exists x)\, A \vee B \longleftrightarrow (\exists x)\, (A \vee B)$$

כעת נוכיח את 2. צריך להוכיח כי:

$$\vdash (\forall x)\, A \vee B \to (\forall x)\, (A \vee B)$$

ממשפט ההצבה:

$$\vdash (\forall x)\, A \to A$$

ממשפט הטאוטולוגיה:

$$\vdash ((\forall x)\, A) \vee B \to A \vee B$$

מכלל הכנסת $\forall$ נקבל:

$$\vdash (\forall x)\, A \vee B \to (\forall x)\, (A \vee B)$$

כעת נראה בכיוון שני. כלומר צריך להראות:

$$\vdash (\forall x)\, (A \vee B) \to (\forall x)\, A \vee B$$

נבחין כי:

$$\vdash (\forall x)\, (A \vee B) \to A \vee B$$

וממשפט הטאוטולוגיה:

$$\vdash ((\forall x)\, (A \vee B)) \wedge \neg B \to A$$

מהכנסת $\forall$ נקבל:

$$\vdash (\forall x)\, (A \vee B) \wedge \neg B \to (\forall x)\, A$$

נבחין כי:

$$\begin{gathered} \boxed{X \to Y \vee Z} \\ \neg X \vee (Y \vee Z) \\ (\neg X \vee Y) \vee Z \\ \neg\, (X \wedge \neg Y) \vee Z \\ \boxed{X \wedge (\neg Y) \to Z} \end{gathered}$$

ולכן, כל אחת מהנוסחאות היא גרירה טאוטולוגית של השניה. נשתמש בכך ונקבל כי:

$$\vdash (\forall x)\, (A \vee B) \to (\forall x)\, A \vee B$$

ומכיוון שראינו את שני הכיוונים למעשה קיבלנו כי:

$$\vdash (\forall x)\, A \vee B \longleftrightarrow (\forall x)\, (A \vee B)$$

כנדרש. ■

כעת, נבחין כי:

$$B' \vee C' = ((Q_1 y_1) \ldots (Q_r y_r)\, D) \vee ((R_1 z_1) \ldots (R_s z_s)\, K)$$

וכאמור:

$$\begin{aligned} &\vdash \quad B \longleftrightarrow B' \\ &\vdash \quad C \longleftrightarrow C' \\ &\vdash \quad A \longleftrightarrow B' \vee C' \end{aligned}$$

כעת נרצה להשתמש בטענת עזר. נבחין כי:

$$B' \vee C' = \left((Q_1 y_1) \underbrace{(Q_2 y_2) \dots (Q_r y_r)\, D}_{\mathcal{A}} \right) \vee \underbrace{((R_1 z_1) \dots (R_s z_s)\, K)}_{\mathcal{B}}$$

כאשר $\mathcal{A}$ ו $\mathcal{B}$ הם A וB מהלמה בהתאמה. ולכן, מהלמה נקבל כי:

$$B' \vee C' \longleftrightarrow (Q_1 y_1) \left(\underbrace{(Q_2 y_2) \dots (Q_r y_r)}_{\mathcal{A}} \vee \left((R_1 z_1) \underbrace{(R_2 z_2) \dots (R_s z_s)}_{\mathcal{B}} K \right) \right)$$

הערה 7.2.4 אם $Q_1 = \exists$ השתמשנו ב 1 ואם $Q_1 = \forall$ השתמשנו ב 2 .

כעת נחזור מהלמה נקבל כי:

$$\longleftrightarrow (Q_1 y_1) ((R_1 z_1) ((Q_2 y_2) \dots (Q_r y_r) \vee ((R_2 z_2) \dots (R_s z_s) K)))$$

הערה 7.2.5 אם $R_1 = \exists$ השתמשנו ב 3 ואם $R_1 = \forall$ השתמשנו ב 4.

לאחר $r+s$ צעדים נקבל נוסחה מצורת הקדומת כנדרש. ■

הערה 7.2.6 אפשר להוסיף ללמה האחרונה גם:

$$\vdash ((\exists x)\, A \to B) \longleftrightarrow (\forall x)\, (A \to B)$$

כאשר x אינו מופיע חופשית ב B. וגם:

$$\vdash ((\forall x)\, A \to B) \longleftrightarrow (\exists x)\, (A \to B)$$

וגם זאת, נשאיר כתרגיל.

20/12/2012

חלק III

שלמות

פרק 8

משפט השלמות של גדל

8.1 הוכחת משפט השלמות של גדל

משפט 8.1.1 משפט השלמות של גדל

נניח $\mathfrak{a}$ קבוצת נוסחאות. וכמו כן, נתבונן ב $\mathrm{Mod}(\mathfrak{a})$. נניח ש A נוסחא כך ש $\mathcal{M} \models A$ לכל $\mathcal{M} \in \mathrm{Mod}(\mathfrak{a})$.
אז $\vdash_{\mathfrak{a}} A$.

נוכיח אותו עוד רגע, אבל לשם ההוכחה נזדקק למשפט הבא:

משפט 8.1.2

לקבוצת נוסחאות $\mathfrak{a}$ קיים מודל, כלומר מבנה $\mathcal{M}$ כך ש $\mathcal{M} \models \mathfrak{a}$ אס"ם לא ניתן להסיק מ $\mathfrak{a}$ את הסתירה: $\nvdash_{\mathfrak{a}} B \wedge \neg B$.

הגדרה 8.1.3 תיאוריה נקראת עקבית אם לא ניתן להסיק בה סתירה.

נוכיח תחילה את משפט השלמות של גדל: **הוכחה:** נניח כי $\mathcal{M}$ מודל של $\mathfrak{a}$ כך ש: $\mathcal{M} \models \mathfrak{a}$. אם $\vdash_{\mathfrak{a}} A$ אז לפי משפט הנאותות: $\mathcal{M} \models A$.

נבחין כי $\mathfrak{a}$ עקבית מפני ש: תהי $\sigma : \mathrm{Var} \to |\mathcal{M}|$ אזי:

$$\overline{\sigma}(B \wedge \neg B) = \overline{\sigma}(B) \wedge (\neg \overline{\sigma}(B)) = \mathbb{F}$$

ואם $\mathcal{M} \models A$ אז: $\overline{\sigma}(A) = \mathbb{T}$. לכן, לא ניתן להסיק את הסתירה מתוך $\mathfrak{a}$. כלומר: $\nvdash_{\mathfrak{a}} B \wedge \neg B$ כנדרש.

נראה כיוון שני:

נניח על דרך השלילה כי לכל $\mathcal{M} \in \mathrm{Mod}(\mathfrak{a})$ מתקיים $\mathcal{M} \models A$ אבל לא ניתן להסיק את A, כלומר $\nvdash_{\mathfrak{a}} A$.

טענה 8.1.4

במקרה זה, $\mathfrak{a} \cup \{\neg A\}$ היא עקבית.

הוכחה: אם $\mathfrak{a} \cup \{\neg A\}$ איננה עקבית, אז מתוך ניתן להסיק: $\vdash_{\mathfrak{a} \cup \{\neg A\}} B \wedge \neg B$.

בלי הגבלת הכלליות, נניח כי A סגורה. מכיוון שאם היא לא הייתה סגורה, היינו מחליפים אותה בסגור שלה (כלומר, הוספת כמתים של כולל עבור כל המשתנים המופיעים בצורה חופשית ב A).

אז, לפי משפט הדדוקציה נקבל:

$$\vdash_{\mathfrak{a}} \neg A \to (B \wedge \neg B)$$

A היא גרירה טיאוטולוגית של $\neg A \to (B \wedge \neg B)$, ולכן, לפי משפט הטאוטולוגיה: $\vdash_{\mathfrak{a}} A$, וזה סתירה לנתון, ולכן היא עקבית. ■

ולכן, לפי המשפט הנ"ל (שטרם הוכחנו אותו), ל $\mathfrak{a} \cup \{\neg A\}$ קיים מודל $\mathcal{M}$ כך ש: $\mathcal{M} \models \mathfrak{a}$, ו: $\mathcal{M} \models \neg A$. ז"א A אינה מתקיימת במבנה $\mathcal{M}$ שהוא מודל של $\mathfrak{a}$ בניגוד להנחה.

ולכן, כנדרש. ■

8.2 קיום מבנה אם לא קיימת סתירה

כעת נרצה לחזור ולהוכיח את המשפט:

משפט 8.2.1

לקבוצת נוסחאות $\mathfrak{a}$ קיימת מודל, כלומר מבנה $\mathcal{M}$ כך ש $\mathcal{M} \models \mathfrak{a}$ אס"ם לא ניתן להסיק מ $\mathfrak{a}$ את הסתירה: $\nvdash_{\mathfrak{a}} B \wedge \neg B$.

הוכחה: ראשית, נניח שבסיגנטורה של השפה קיימים סמלי קבועים, כלומר סמלי פונקציה 0־מקומיים.

נסתכל בקבוצת כל שמות עצם ללא משתנים ונסמנה N. ונגדיר יחס שקילות על N: $a \sim b$ אס"ם $\vdash_{\mathfrak{a}} a = b$

ברור כי זה יחס שקילות:

- $\vdash a = a$ מאקסיומת השיוון
- אנו יודעים גם כי: $\vdash a = b \to b = a$ (הוכחנו זאת).
- נראה גם כי: $\vdash a = b \to b = c \to a = c$:

  הוכחה:

$$\vdash a = b \to a = c \to a = a \to b = c$$

זה נכון מכיוון שזו הצבה באקסיומת השיוויון $a = b$, $a = c$. ומכיוון שמאקסיומת הזהות $\vdash a = a$. אז מכלל הניתוק נקבל:

$$\vdash (a = b) \to (a = c) \to (b = c)$$

■

הערה 8.2.2 פרופ' ריפס עבר לעבוד כאן עם משתנים, זה קצת יותר נכון, אבל נראה לי קצת מיותר... פשוט במקום a שמים x, b שמים y ובמקום c שמים z. ובסוף מציבים את a, b, c.

24/12/2012

נסתכל בקבוצת מחלקות השקילות: ${}^{N}\!/\!_{\sim}$.

נניח ש f סמל פונקציה n־מקומית. נרצה לבנות מבנה כך ש: $|\mathcal{M}| = {}^{N}\!/\!_{\sim}$. במבנה זה $f^{\mathcal{M}} : |\mathcal{M}|^n \to |\mathcal{M}|$, כלומר: $f^{\mathcal{M}} : \left({}^{N}\!/\!_{\sim}\right)^n \to {}^{N}\!/\!_{\sim}$.

נגדיר:

$$f^{\mathcal{M}}\left([a_1], \ldots, [a_n]\right) = [f\left(a_1, \ldots, a_n\right)]$$

הערה 8.2.3 מכיוון ש $f\left(a_1, \ldots, a_n\right) \in N$ אזי: $[f\left(a_1, \ldots, a_n\right)] \in {}^{N}\!/\!_{\sim}$.

נבדוק ש $f^{\mathcal{M}}$ מוגדרת היטב. נניח ש:

$$[a_1] = [b_1],\ [a_2] = [b_2], \ldots,\ [a_n] = [b_n]$$

צריך להראות כי:

$$[f\left(a_1, \ldots, a_n\right)] = [f\left(b_1, \ldots, b_n\right)]$$

נתון ש:

$$\begin{aligned} \vdash_{\mathfrak{a}} a_1 &= b_1 \\ &\vdots \\ \vdash_{\mathfrak{a}} a_n &= b_n \end{aligned}$$

תזכורת 8.2.4 אקסיומת השיוויון קובעת כי:

$$\vdash x_1 = y_1 \to \ldots \to x_n = y_n \to f(x_1, \ldots, x_n) = f(y_1, \ldots, y_n)$$

לכן, ע"י כלל ההצבה, נקבל כי:

$$\vdash a_1 = b_1 \to \ldots \to a_n = b_n \to f(a_1, \ldots, a_n) = f(b_1, \ldots, b_n)$$

לכן, על סמך, כלל הניתוק נקבל כי:

$$\vdash_{\mathfrak{a}} f(a_1, \ldots, a_n) = f(b_1, \ldots, b_n)$$

דהיינו (נובע מההגדרה של מחלקות השקילות):

$$[f(a_1, \ldots, a_n)] = [f(b_1, \ldots, b_n)]$$

ולכן, ההגדרה של $f^{\mathcal{M}}$ מוגדרת היטב.
P סמל יחס n־מקומי: $P^{\mathcal{M}} : \mathcal{M}^n \to \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}$ כלומר, $P^{\mathcal{M}} : (N/\sim)^n \to \{\mathbb{T}, \mathbb{F}\}$.
נגדיר:

$$P^{\mathcal{M}}([a_1], \ldots, [a_n]) = \begin{cases} \mathbb{T} & \vdash_{\mathfrak{a}} P(a_1, \ldots, a_n) \\ \mathbb{F} & \text{אחרת} \end{cases}$$

$P(a_1, \ldots, a_n)$ היא נוסחה סגורה כי $a_1, \ldots, a_n$ הם שמות עצם ללא משתנים.
נבדוק ש $P^{\mathcal{M}}$ מוגדר היטב. נניח כי: $[a_1] = [b_1], \ldots, [a_n] = [b_n]$ צריך להוכיח כי:

$$P^{\mathcal{M}}([a_1], \ldots, [a_n]) = P^{\mathcal{M}}([b_1], \ldots, [b_n])$$

נתון כי:

$$\begin{aligned} \vdash_{\mathfrak{a}} a_1 &= b_1 \\ &\vdots \\ \vdash_{\mathfrak{a}} a_n &= b_n \end{aligned}$$

תזכורת 8.2.5 אקסיומת השיוויון קובעת כי:

$$\vdash x_1 = y_1 \to \ldots \to x_n = y_n \to P(x_1, \ldots, x_n) \to P(y_1, \ldots, y_n)$$

לכן, ע"י כלל ההצבה, נקבל כי:

$$\vdash a_1 = b_1 \to \ldots \to a_n = b_n \to P(a_1, \ldots, a_n) \to P(b_1, \ldots, b_n)$$

לכן, על סמך, כלל הניתוק נקבל כי:

$$\vdash_{\mathfrak{a}} P(a_1, \ldots, a_n) \to P(b_1, \ldots, b_n)$$

ובאופן דומה, מסימטריות נקבל גם:

$$\begin{aligned} \vdash_{\mathfrak{a}} b_1 &= a_1 \\ &\vdots \\ \vdash_{\mathfrak{a}} b_n &= a_n \end{aligned}$$

ולכן, נקבל בסוף גם כי:

$$\vdash_{\mathfrak{a}} P(b_1,\ldots,b_n) \to P(a_1,\ldots,a_n)$$

לכן, קיבלנו כי: $\vdash_{\mathfrak{a}} P(a_1,\ldots,a_n)$ אם"ם $\vdash_{\mathfrak{a}} P(b_1,\ldots,b_n)$. ז"א:

$$P^{\mathcal{M}}([b_1],\ldots,[b_n]) = P^{\mathcal{M}}([a_1],\ldots,[a_n])$$

$\sigma : \mathrm{Var} \to |\mathcal{M}| = N/\sim$ השמה. לכל שם עצם u מתקיים: $\tilde{\sigma}(u) \in |\mathcal{M}| = N/\sim$.

נניח ש $a \in N$ שם עצם ללא משתנים.

טענה 8.2.6

$\tilde{\sigma}(a) = [a]$.

הוכחה: נשתמש באינדוקציה לפי אורך סדרת היצירה של a.

1. $a = c$ כאשר c סמל קבוע:

$$\tilde{\sigma}(a) = \tilde{\sigma}(c) = c^{\mathcal{M}} = [c] = [a]$$

הערה 8.2.7 המעבר לפני אחרון, זה מכיוון ש $f^{\mathcal{M}}([a_1],\ldots,[a_n]) = [f(a_1,\ldots,a_n)]$. אז במקרה הפרטי של פונקציה 0 מקומית נקבל $c^{\mathcal{M}} = [c]$.

2. $a = f(u_1,\ldots,u_n)$ כאשר $u_1,\ldots,u_n$ שמות עצם ללא משתנים:

$$\tilde{\sigma}(a) = \tilde{\sigma}(f(u_1,\ldots u_n)) = f^{\mathcal{M}}(\tilde{\sigma}(u_1),\ldots,\tilde{\sigma}(u_n)) = f^{\mathcal{M}}([u_1],\ldots,[u_n]) = [f(u_1,\ldots,u_n)] = [a]$$

כנדרש. ■

טענה 8.2.8

נניח ש $P(a_1,\ldots,a_n)$ נוסחה אטומית ללא משתנים. בהינתן $\sigma : \mathrm{Var} \to |\mathcal{M}| = N/\sim$ השמה, אז:

$$\overline{\sigma}(P(a_1,\ldots,a_n)) = P^{\mathcal{M}}([a_1],\ldots,[a_n])$$

הוכחה:

$$\overline{\sigma}(P(a_1,\ldots,a_n)) = P^{\mathcal{M}}(\tilde{\sigma}(a_1),\ldots,\tilde{\sigma}(a_n)) = P^{\mathcal{M}}([a_1],\ldots,[a_n])$$

כנדרש. ■

נניח ש $A = (\exists x) B$. בהינתן $\sigma : \mathrm{Var} \to |\mathcal{M}| = N/\sim$ השמה אז:

$$\overline{\sigma}(A) = \bigvee_{b \in |\mathcal{M}| = N/\sim} \overline{\sigma[x/b]}(B) = \bigvee_{[a] \in N/\sim} \overline{\sigma[x/[a]]}(B)$$

אבל כאן מתחילה לנו בעיה, ייתכן ש $\vdash_{\mathfrak{a}} A$, כלומר: $\vdash_{\mathfrak{a}} (\exists x) B$. אבל לא יהיה קיים איבר במבנה אשר יקיים את B. זאת מכיוון שייתכן שאין לנו מספיק איברים במבנה (במבנה חייבים להיות יותר איברים מאשר רק הקבועים).

לכן, נדרשת תכונה נוספת:

הגדרה 8.2.9 תכונת הנקין: לכל נוסחה סגורה $(\exists x)\, B$ בסיגנטורה של השפה קיים סמל קבוע כך ש: $\vdash_{\mathfrak{a}} (\exists x)\, B \to B_x\, [e]$.

אם תכונת הנקין תתקיים, המכשול שהיה לנו הרגע יפתר, מכיוון שאז קיים קבוע אשר יקיים את התכונה B במקרה זה, ואז נקבל כי $\overline{\sigma}\,(A) = \mathbb{T}$ במקרה של $\vdash_{\mathfrak{a}} A$.

אבל זה עדיין לא מספיק לנו. אנו נדרשים להגדרה נוספת של תיאוריה שלמה:

הגדרה 8.2.10 תיאוריה שלמה: התיאוריה היא שלמה כאשר לכל נוסחה סגורה A או ש: $\vdash_{\mathfrak{a}} A$ או ש: $\vdash_{\mathfrak{a}} (\neg A)$ (אך לא שניהם).

ואז נקבל את המשפט הבא:

משפט 8.2.11

אם התיאורייה $\mathfrak{a}$ היא בעלת תכונת הנקין ושלמה, אז $\mathcal{M} \models \mathfrak{a}$ (המבנה שהגדרנו).

נניח ש A נוסחה סגורה $\vdash_{\mathfrak{a}} A$ צריך להוכיח כי $\mathcal{M} \models A$. זאת אומרת, צריך להוכיח שלכל השמה: $\sigma : \mathrm{Var} \to |\mathcal{M}| = {}^{N}\!/_{\sim}$ מתקיים: $\overline{\sigma}\,(A) = \mathbb{T}$.

נוכיח באינדוקציה על אורך סדרת היצירה של A:

אם $\vdash_{\mathfrak{a}} A$ אז: $\overline{\sigma}\,(A) = \mathbb{T}$.

ואם: $\vdash_{\mathfrak{a}} \neg A$ אז: $\overline{\sigma}\,(A) = \mathbb{F}$.

1. $A = P\,(a_1, \ldots, a_n)$ אטומית ללא משתנים. אם $\vdash_{\mathfrak{a}} A$ לפי הטענה הקודמת נקבל כי:

$$\overline{\sigma}\,(A) = \overline{\sigma}\,(P\,(a_1, \ldots, a_n)) = P^{\mathcal{M}}\,([a_1]\,, \ldots, [a_n]) = \mathbb{T}$$

נניח ש $\vdash_{\mathfrak{a}} \neg A$. ז"א: $\vdash_{\mathfrak{a}} \neg P\,(a_1, \ldots, a_n)$ ואז נקבל:

$$\overline{\sigma}\,(A) = \overline{\sigma}\,(P\,(a_1, \ldots, a_n)) = P^{\mathcal{M}}\,([a_1]\,, \ldots, [a_n]) = \mathbb{F}$$

2. $A = B \vee C$. במצב זה יש לנו כמה אפשרויות:

(א) $\vdash_{\mathfrak{a}} B,\ \vdash_{\mathfrak{a}} C$

(ב) $\vdash_{\mathfrak{a}} B,\ \vdash_{\mathfrak{a}} \neg C$

(ג) $\vdash_{\mathfrak{a}} \neg B,\ \vdash_{\mathfrak{a}} C$

(ד) $\vdash_{\mathfrak{a}} \neg B,\ \vdash_{\mathfrak{a}} \neg C$

בשלושת האפשרויות הראשונות, ניתן להסיק את $\vdash_{\mathfrak{a}} B \vee C$, כלומר: $\vdash_{\mathfrak{a}} A$. ובאמת:

$$\overline{\sigma}\,(A) = \overline{\sigma}\,(B) \vee \overline{\sigma}\,(C) = \mathbb{T}$$

אבל במקרה האחרון, $\vdash_{\mathfrak{a}} \neg B,\ \vdash_{\mathfrak{a}} \neg C$ ולכן ניתן להסיק: $\vdash_{\mathfrak{a}} (\neg B) \wedge (\neg C)$ כלומר: $\vdash_{\mathfrak{a}} \neg\,(B \vee C)$ כלומר: $\vdash_{\mathfrak{a}} \neg A$ ולכן נקבל כי:

$$\overline{\sigma}\,(A) = \overline{\sigma}\,(B) \vee \overline{\sigma}\,(C) = \mathbb{F}$$

3. $A = \neg B$. אם $\vdash_{\mathfrak{a}} B$ אז: $\vdash_{\mathfrak{a}} \neg A$ ואז:

$$\overline{\sigma}\,(A) = \neg\overline{\sigma}\,(B) = \mathbb{F}$$

ואם $\vdash_{\mathfrak{a}} \neg B$ אז: $\vdash_{\mathfrak{a}} A$ ואז:

$$\overline{\sigma}\,(A) = \neg\overline{\sigma}\,(B) = \mathbb{T}$$

4. במקרה של $A = (\exists x) B$. אם $\vdash_{\mathfrak{a}} A$ כלומר, $\vdash_{\mathfrak{a}} (\exists x) B$. לפי תכונת הנקין קיים סמל קבוע e כך ש:

$$\vdash_{\mathfrak{a}} (\exists x) B \rightarrow B_x [e]$$

ואז, לפי כלל הניתוק:

$$\vdash_{\mathfrak{a}} B_x [e]$$

בהינתן $\sigma : \text{Var} \rightarrow |\mathcal{M}| = {}^N/_\sim$ הצבה:

$$\overline{\sigma} (A) = \overline{\sigma} ((\exists x) B) = \bigvee_{[a] \in {}^N/_\sim} \overline{\sigma [{}^x/_{[a]}]} (B)$$

נזכר ש: $\overline{\sigma [{}^x/_{[e]}]} (B) = \overline{\sigma [{}^x/_{\tilde{\sigma}(e)}]} (B_x [e]) = \overline{\sigma} (B_x [e])$. אבל נבחין כי $[e] \in {}^N/_\sim$ ומכיוון ש:

$$\overline{\sigma [{}^x/_{[e]}]} (B) = \overline{\sigma} (B_x [e]) = \mathbb{T}$$

אזי:

$$\overline{\sigma} (A) = \mathbb{T}$$

כעת, נניח כ $\vdash_{\mathfrak{a}} \neg A$, זאת אומרת: $\vdash_{\mathfrak{a}} \neg ((\exists x) B)$. נזכיר את אקסיומת ההצבה:

$$\vdash B_x [a] \rightarrow (\exists x) B$$

לכן, $\vdash_{\mathfrak{a}} \neg B_x [a]$. לפי משפט הטאוטולוגיה ולפי הנחת האינדוקציה $\overline{\sigma} (B_x [a]) = \mathbb{F}$. זה נכון לכל $a \in N$, $[a] \in {}^N/_\sim$ ולכן מכלל הניתוק ומשפט הטאוטולוגיה:

$$\overline{\sigma} (A) = \bigvee_{[a] \in {}^N/_\sim} \overline{\sigma} (B_x [a]) = \mathbb{F}$$

כנדרש

27/12/2012

■

דוגמה 8.2.12 : נתבונן בדוגמה נגדית למתי שלא מתקיימת הנחת הנקין.
נקח שפה עם הסימנים: $+,\cdot,0,1$. ונתבונן באקסיומות של שדות:

$$(\forall x)(\forall y)(x+y=0)$$
$$(\forall x)(\exists y)(\neg(x=0)\to(x\cdot y=1))$$

וכו'... היתר לא חשובים להוכחה. נסמן את קבוצת האקסיומות אלה $\mathfrak{a}$.
קיימים שמות עצם ללא משתנים, לדוגמה:

$$a=((1+1)\cdot((1+0)+1)+(0+1))\cdot(1+1)$$

וכמו כן:

$$\vdash_{\mathfrak{a}}(1+1)(1+1)=(((1+1)+1))+1$$

נבחין כי:

$$N/\sim=\{[0],[1],[1+1],[(1+1)+1],\ldots\}$$

במקרה זה, לא נקבל שזהו מודל של השפה. (קל לראות שאין לנו כאן נגדי\הופכי).
היא לא מקיימת את ההנחה של הנקין מכיוון ש:

$$(\exists x)(x+1=0)$$

מההנחה של הנקין היה חייב להיות קיים לנו קבוע e כך ש:

$$\vdash_{\mathfrak{a}'}(\exists x)(x+1=0)\to(e+1=0)$$

אבל ברור שאין לנו קבוע כזה. לכן היינו רוצים להוסיף אותו. אבל נניח שעשינו את זה.

נניח שהייתה לנו שפה $T_0=\langle L_0,\mathfrak{a}_0\rangle$. נרצה להרחיב את השפה ל L_1. לכל נוסחה סגורה מהצורה: $(\exists x)B$ נכניס סמל קבוע חדש המתאים במיוחד לנוסחה זו. נקרא לו: $e_{(\exists x)B}$ כך שמתקיים: $(\exists x)B\to B_x\left[e_{(\exists x)B}\right]$. אבל אז: $T_1=\langle L_1,\mathfrak{a}_1\rangle$ עדיין לא מקיימת את תכונת הנקין. מכיוון ש:

$$(\exists x)C$$

כאשר C תכיל קבועים חדשים. לכן אנו נזקקים לעוד קבועים $e_{(\exists x)C}$ כך ש: $(\exists x)C\to C_x\left[e_{(\exists x)C}\right]$. ובכך נבנה את $T_2=\langle L_2,\mathfrak{a}_2\rangle$.
אבל שוב יצרנו עוד קבועים, ושוב עוד נוסחאות. ולכן אנו ניצור בהתאם את $T_3,T_4,\ldots$.
לכן אם נתבונן ב:

$$L'=\bigcup_{n\geq0}L_n$$
$$\mathfrak{a}'=\bigcup_{n\geq0}\mathfrak{a}_n$$

ונתבונן ב:

$$T'=\langle L',\mathfrak{a}'\rangle$$

31/12/2012 כעת, ברור כי T' מקיימת את תכונת הנקין, אבל לא ברור כי היא עקבית.

טענה 8.2.13

ל־T' יש תכונת הנקיון.

הוכחה: נקח נוסחה סגורה ב T' מהצורה: $(\exists x)\, D$.

קיים $n \geq 0$ כך ש $(\exists x)\, D$ הוא נוסחה ב T_n. ואז, ב L_{n+1} ישנו קבוע $e_{(\exists x) D}$ וב: $\mathfrak{a}_{n+1}$ יש אקסיומה: $(\exists x)\, D \rightarrow D_x \left[e_{(\exists x) D}\right]$ וממילא הם שייכים ל T'. ■

טענה 8.2.14

אם A נוסחה בתיאוריה המקורית T_0 ו: $\vdash_{\mathfrak{a}', L'} A$ (כלומר $\vdash_{T'} A$) אז: $\vdash_{\mathfrak{a}_0, L_0} A$ (כלומר $\vdash_{T_0} A$).
במקרה זה אומרים כי T' היא הרחבה שמרנית של T_0).

הוכחה: בכל הסקת נעשה שימוש בקבוצה סופית של אקסיומות. כגון $D_1, D_2, \ldots, D_k$, ז"א:

$$\vdash_{\mathfrak{a}_0 \cup \{D_1, D_2, \ldots, D_k\}, L'} A$$

כאשר כל D_j הן אקסיומות הנקין. כל האקסיומות הן סגורות, ולכן יש מקום להשתמש במשפט הדדוקציה:

$$\vdash_{\mathfrak{a}_0, L'} D_1 \rightarrow D_2 \rightarrow \ldots \rightarrow D_k \rightarrow A$$

בה"כ ניתן להנחי כי $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_k$ (כאשר n_i זה השלב שבו הוספנו את האקסיומה n_i)

$$D_1 = (\exists x_1)\, B_1 \rightarrow B_{1 x_1} \left[e_{(\exists x_1) B_1}\right]$$

בה"כ $B_i \neq B_j$ (עבור $i \neq j$).

לכן, הקבוע $e_{(\exists x_1) B_1}$ לא מופיע פעם נוספת ב: $D_1 \rightarrow D_2 \rightarrow \ldots \rightarrow D_k \rightarrow A$.

למה זה נכון? מדוע הוא לא מופיע ב A? מכיוון שהיא מקורית, ולכן אין בה קבועים חדשים.

למה זה לא מופיע בשאר הנוסחאות? נקח איזשהו

$$D_i = (\exists x_i)\, B_i \rightarrow B_{i, x_i} \left[e_{(\exists x_i) B_i}\right]$$

אבל, הנחנו כי $n_i \leq n_1$, ולכן הקבוע הנ"ל הוא קיים רק ב $i \geq 2$. ולכן, לא ייתכן כי:

$$e_{(\exists x_i) B_i} \neq e_{(\exists x_1) B_1}$$

מכיוון ש: $D_i \neq D_1$.

אם $D_i = (\exists x_i)\, B_i \rightarrow B_{i, x_i} \left[e_{(\exists x_i) B_i}\right]$ התווספה ברמה ה n_i אז: $(\exists x_i)\, B_i$ היא נוסחה סגורה בשפה: $L_{n_i - 1}$ כאשר: $n_i \leq n_1$ ומתקיים: $L_{n_i - 1} \subseteq L_{n_1 - 1}$. ולכן אין בה את הקבוע: $e_{(\exists x_1) B_1}$ שהתווסף ברמה n_1 ב L_{n_1}.

לכן, $e_{(\exists x_1) B_1}$ לא מופיע ב: $(\exists x_i)\, B_i \rightarrow B_{i, x_i} \left[e_{(\exists x_i) B_i}\right]$. זאת אומר שת $e_{(\exists x_i) B_1}$ בכלל לא מופיע ב:

$$D_2 \rightarrow D_3 \rightarrow \ldots \rightarrow D_k \rightarrow A$$

במקום $e_{(\exists x_1) B_1}$ נשכתב משתנה חדש y באופן הבא:

$$\vdash_{a_0, L'} ((\exists x_1)\, B_1 \rightarrow B_{1, x_1} [y]) \rightarrow D_2 \rightarrow D_3 \rightarrow \ldots \rightarrow D_k \rightarrow A$$

לפי משפט הקבועים (חלק שני).

לפי כלל הכנסת $\exists$:

$$\vdash_{\mathfrak{a}_{0, L'}} (\exists y)\, ((\exists x_1)\, B_1 \rightarrow B_{1, x_i} [y]) \rightarrow D_2 \rightarrow \ldots \rightarrow D_k \rightarrow A$$

לפי משפט הוריאנט:

$$\vdash (\exists x_1)\, B_1 \to (\exists y)\, B_{1,x_1}[y]$$

ולפי משפט הקידומת:

$$\vdash (\exists y)\, ((\exists x_1)\, B_1 \to B_{1,x_1}[y])$$

לפי כלל הנתוק:

$$\vdash_{\mathfrak{a}_0,L'} D_2 \to \ldots \to D_k \to A$$

אחרי k שלבים נקבל: $\vdash_{\mathfrak{a}_0,L'} A$.

לפי משפט הקבועים, נקבל כי: $\vdash_{\mathfrak{a}_0,L_0} A$ כנדרש. ■

8.3 משפט לינדנבאום

משפט 8.3.1 משפט לינדנבאום

אם $T' = \langle \mathfrak{a}', L', \ldots \rangle$ היא עקבית, אזי אפשר למצוא קבוצת אקסיומות $\mathfrak{a}''$ בשפה L' כך ש $\mathfrak{a}' \subseteq \mathfrak{a}''$ כך ש: $T'' = \langle \mathfrak{a}'', L', \ldots \rangle$ היא שלמה.

הערה 8.3.2 אם T' היא בעלת תכונת הנקין אז גם T'' היא בעלת תכונת הנקין.
אכן, השפה של T'' היא L' כמו השפה L' של T'. לכן נשארו בדיוק אותן נוסחאות סגורות מהצורה: $(\exists x)\, B$ כמו קודם.
לפי תכונת הנקין עבור T' ב L', קיים קבוע e כך ש: $\vdash_{\mathfrak{a}',L'} (\exists x)\, B \to B_x[e]$.
וממילא:

$$\vdash_{\mathfrak{a}'',L'} (\exists x)\, B \to B_x[e]$$

ז"א, T'' היא בעלת תכונת הנקין ושלמה, לכן לT'' יש מודל $\mathcal{M}$.

ולכן $\mathcal{M}$ הוא גם מודל של $T_0 = \langle \mathfrak{a}_0, L_0, \ldots \rangle$, וזה מסיים את הוכחת משפט השלמות.

נרצה להוכיח את משפט לינדנבאום, אבל רשית נדון בכמה דברים אחרים:

נניח ש E קבוצה, $\mathcal{P}(E)$ קבוצת כל תת־הקבוצות של E. $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}(E)$.

הגדרה 8.3.3 $\mathcal{J}$ נקראת מטיפוס סופי אם: $D \in \mathcal{J}$ אס"ם כל תת קבוצה סופית $D_0 \subseteq D$ שייכת ל$\mathcal{J}$.

למה 8.3.4 טיירמילר טיוקי

אם $\mathcal{J}$ מטפוס סופי, אזי יש בה איבר מקסימלי.

אם הלמה הזו נקבל כאקסיומה, מכיון שהיא למעשה גרסה מוחלשת של אקסיומת הבחירה (זה אפילו נראה כמו הלמה של צורן).

נסמן ב E את קבוצת כל הנוסחאות הסגורות בשפה L'. ונסמן:

$$F_{\mathfrak{a}'} = \{A \in E \mid \vdash_{\mathfrak{a}'} A\} \subseteq E$$

ונסמן:

$$F_B = \{A \in E \mid \vdash_B A\} \subseteq E$$

כאשר: $B \subseteq \mathfrak{a}'$, אזי: $F_{\mathfrak{a}'} \subseteq F_B$

נסמן:

$$\mathcal{J} = \left\{D \subseteq E \mid \nvdash_D X \wedge \neg X\right\}$$

טענה 8.3.5

$\mathcal{J}$ היא מטיפוס סופי. כי אם לא ניתן להסיק סתירה מאף תת־קבוצה סופית של D אז לא ניתן להסיק סתירה מ D.

03/01/2013 למה זה נכון? מכיוון שהסק הוא סופי!

כעת נוכיח את משפט לינדנבאום. **הוכחה:** נתונה תיאוריה $T' = \langle \mathfrak{a}', L', \ldots \rangle$ נסמן ב E את קבוצת כל הנוסחאות הסגורות בשפה. נגדיר $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{P}(E)$ באופן הבא:

$D \in \mathcal{J}$ אס"ם: $\langle \mathfrak{a}' \cup D, L', \ldots \rangle$ עיקבית. ברור ש: $\varnothing \in \mathcal{J}$ כי: $\langle \mathfrak{a}', L', \ldots \rangle$ עיקבית.

$\mathcal{J}$ היא מטיפוס סופי כי $D \in \mathcal{J}$ אס"ם כל תת־קבוצה סופית $D \supseteq D_0 \in \mathcal{J}$.

לכן, לפי הלמה של טיירמילר־טיוקי ב $\mathcal{J}$ ישנו איבר מקסימלי $M \in \mathcal{J}$. ז"א אם $M \subseteq N \subseteq E$, $N \in \mathcal{J}$ אז $N = M$.

נגדיר: $\mathfrak{a}'' = \mathfrak{a}' \cup M$. ונבדוק כי: $T'' = \langle \mathfrak{a}'', L', \ldots \rangle$ היא שלמה. נקח נוסחה סגורה A. אם $\vdash_{\mathfrak{a}''} A$ אז $A \in M$ כי אז התיאוריה:

$$\langle \mathfrak{a}' \cup M \cup \{A\}, L', \ldots \rangle$$

היא עקבית. מכיוון שהתיאוריה בלי $\{A\}$ היא עקבית, אבל ניתן להסיק את A מתוך $\mathfrak{a}'' = \mathfrak{a}' \cup M$, והיא תיאוריה עקבית. לכן ברור שלא נקבל סתירה. ולכן:

$$M \cup \{A\} \in \mathcal{J}$$

ולכן אם $A \notin M$ זה היה בסתירה למקסימליות של M, לכן בהכרח $A \in M$.

נניח שלא ניתן להסיק את A מתוך $\mathfrak{a}''$, כלומר $\nvdash_{\mathfrak{a}''} A$.

נסתכל ב $M \cup \{\neg A\}$. אם $\neg A \notin M$ אזי:

$$\langle \mathfrak{a}' \cup M \cup \{\neg A\}, L', \ldots \rangle$$

איננה עקבית, $\vdash_{\mathfrak{a}' \cup M \cup \{\neg A\}} B \wedge \neg B$. לפי משפט הדדוקציה:

$$\vdash_{\mathfrak{a}' \cup M} \neg A \to B \wedge \neg B$$

ואז, לפי משפט הטאוטולוגיה נקבל כי:

$$\vdash_{\mathfrak{a}' \cup M} A$$

מכיוון שאם יש הערכה שנותנת ל $\neg A$ ערך $\mathbb{T}$ אזי אנו מקבלים $\mathbb{F}$ בטענה הכללית. לכן בהכרח צריך לקבל ערך $\mathbb{T}$ ל A.

כלומר:

$$\vdash_{\mathfrak{a}''} A$$

וזה בסתירה להנחה שלא ניתן להסיק את A! לכן: $\neg A \in M$ ולכן: $\vdash_{\mathfrak{a}' \cup M} \neg A$, זאת אומרת: $\vdash_{\mathfrak{a}''} \neg A$ כנדרש.

לכן: $T'' = \langle \mathfrak{a}'', L', \ldots \rangle$ שלמה כנדרש. ∎

07/01/2013 פה נגמר הקורס. המרצה מתחיל לדבר על הכל מהתחלה.

ההרצאה לא סוכמה, לא נאמר בה שום דבר חדש, רק חזרה על ההרצאות הראשונות. את ההרצאה העביר אהוד הרושובסקי