תורת המידה ־ 80517

אור דגמי, or@digmi.org

23 בינואר 2013

אתר אינטרנט: http://digmi.org
סיכום הרצאות של פרופ' אילון לינדנשטראוס בשנת לימודים 2013.
המרצה נמצא בחדר 103 בבניין מתמטיקה. שעת קבלה ביום רביעי אחרי השיעור.

תוכן עניינים

1 הקדמה **5**
1.1 מהי מידה? 5
1.2 מנהלות 5
1.2.1 מבנה הקורס 5
1.2.2 תרגילים והציון 6

I מידת לבג **7**

2 מידה של קבוצה **8**
2.1 מידה חיצונית 8
2.1.1 תכונות בסיסיות 8
2.2 קבוצה מדידה 10

3 קבוצות לא חסומות וקבוצות לא מדידות **14**
3.1 σ־אלגברה 14
3.2 קבוצות לא חסומות 15
3.3 קבוצה לא מדידה 16
3.4 מהי פונקציה מדידה? 18

II מרחבי מידה כלליים **19**

4 חוג, אלגברה, σ־חוג ו־σ־אלגברה **20**
4.1 הגדרות ודוגמאות 20
4.2 תכונות 21

5 מידה **22**
5.1 הגדרת המידה ותכונות בסיסיות 22
5.2 מידה חיצונית 23
5.2.1 מעבר ממידה למידה חיצונית 23
5.2.2 מעבר ממידה חיצונית למידה 24
5.3 σ־אלגברת בורל 30

6 מרחבי מידה **31**
6.1 דוגמה למרחב מידה 31
6.2 מידות האוסדורף 32
6.3 חזרה לדברים כלליים 33

III פונקציות 35

7 פונקציות מדידות 36

8 סדרות של פונקציות 38
8.1 התכנסויות . . . 39

IV אינטגרציה 43

9 אינטגרציה 44
9.1 אינטגרל לבג . . . 44
9.2 פונקציות פשוטות . . . 45
9.2.1 תכונות . . . 46
9.3 פונקציות אינטגרביליות . . . 47

V מידות מסומנות ומשפט רדון ניקודין 58

10 מידות מסומנות 59
10.1 הקדמה . . . 59
10.2 σ־אדיטיביות . . . 59
10.3 חיוביות על קבוצה . . . 61
10.3.1 משפט פירוק האן . . . 61
10.4 מידות סינגולריות . . . 64

11 משפט רדון ניקודים 66
11.1 טענת המשפט . . . 66
11.2 פונקציה קמורה . . . 66
11.2.1 תכונות של פונקציות קמורות . . . 66
11.2.2 דוגמאות . . . 67
11.3 מרחב הסתברות . . . 67

VI מרחבי $\mathcal{L}^P$ 70

12 מרחבי $\mathcal{L}^P$ 71
12.1 הגדרה . . . 71
12.2 אי שיוויני Minkowski & Holder . . . 73
12.3 מרחב בנך ומרחב הילברט . . . 76

13 הוכחת רדון ניקודין 81
13.1 תזכורת . . . 81
13.2 משפט רדון ניקודין והוכחתו . . . 81
13.3 מסקנות מהמשפט . . . 83
13.4 שימושים . . . 84
13.5 משפט לוז'ין . . . 88

14 מרחב מכפלה 90
14.1 הגדרה . . . 90
14.2 משפט פוביני . . . 93

VII ובחזרה ללבג... 95

15 משפט הצפיפות של לבג 96

15.1 המשפט 96

VIII חומר למבחן 100

פרק 1

הקדמה

23/10/2012

1.1 מהי מידה?

מידה היא דרך לתת גודל לקבוצה. המקרה הכי בסיסי היא מידת לבג על הישר ומתקשר ישירות לאינפי מהשנה הראשונה.

המוטיבציה העיקרית לפיתוח מידת לבג היא שבתורה של אינטגרל רימן יש מספר בעיות, מידת לבג באה לפתור אותן.

למשל, המשפט הבסיסי של האינפי קובע:

משפט 1.1.1

> אם f פונקציה גזירה על הקטע $[a,b]$ אזי: $\int\limits_a^c f'(t)\,\mathrm{d}t = f(c) - f(a)$ (כאשר $a<c<b$).

אם f גזירה ברציפות אז הוכחנו את המשפט באינפי 2. אבל מתברר שיש פונקציות שגזירות בכל נקודה בקטע $[a,b]$ נגזרתם קטנה מ1 בכל נקודה בקטע a,b אבל הנגזרת היא אינה אינטגרבילית רימן.

בעיה אחרת עם אינטגרל רימן: נתבונן במרחב $L^2_{\mathrm{Riemann}}[0,1] = \left\{ f:[0,1]\to\mathbb{R} \mid \int\limits_0^1 f^2\mathrm{d}x < \infty \text{ אינטגרבילית רימן} \right\}$.

זהו מרחב (מכפלה פנימית) וקטורי. המכפלה הפנימית בו היא: $\langle f,g\rangle = \int_0^1 fg\mathrm{d}x$. ולכן, בפרט, הוא מרחב מטרי. אבל, מרחב זה אינו שלם. ישנן סדרות קושי שאין להן גבול.

לבג מצא דרך יפה לתקן בעיות אלה.

סיבה נוספת להסתכל על תורת המידה: תורת המידה היא דרך טובה לתאר את תורת ההסתברות. אם שואלים אותנו מה ההסתברות שבהינתן הטלה של 7 מטבעות לקבל ו7 פעמים עץ, הבעיה קלה. אבל אם שואלים אותנו על הטלה אינסופית של מטבע. מה הסיכוי שמההתחלה עד הסוף יהיו תמיד יותר עץ מפלי? המסגרת הנוחה והמקובלת לשים את תורת ההסתברות על קרקע מוצקת היא תורת המידה.

אנו גם נראה שתורת המידה תאפשר לנו לחקור פרקטלים (מידת האוסדורף).

1.2 מנהלות

1.2.1 מבנה הקורס

במהלך הקורס נתמקד בנושאים הבאים לפי סדר:

1. מבוא על עבודתו של לבג, ובנייה ישירה של מידת לבג על הישר (או למעשה כדי לפשט את העניינים נדון על קטע סופי). (הספר של לינדנשטראוס, פזי, וייס).
2. מסגרת כללית של תורת המידה(מרחבי מידה, מרחבי מכפלה, מידה ואינטגרל ...). (ספר־ Halmos - Measure Theory).
3. תורת מידה על מרחבים מטריים (טופולוגיים).
4. מידות על $\mathbb{R}^d$ (על $\mathbb{R}$) $\leftarrow$ משפט גזירה וכיסוי.

5. מידות ומימד האוסדורף.
6. שימושים נוספים.

בנושאים היותר מתקדמים, ספר שימושי הוא: Princeton lecutres in analysis - Real Analysis של Stein

1.2.2 תרגילים והציון

תרגילים יהיו פעם בשבוע, והציון יהיה ממוצע על התרגילים (רק הנמוך ביותר יוצא מהממוצע) והאחוזים יהיו כפי שהיו שנה שעברה.

חלק I

מידת לבג

פרק 2

מידה של קבוצה

ראשית נזכר בהגדרה של מידה 0:

הגדרה 2.0.1 קבוצה בעלת מידה 0: תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ תת קבוצה. A תקרא בעלת מידה 0 אם לכל $\varepsilon > 0$ יש אוסף בן מניה של קטעים $I_i = (a_i, b_i)$ כך שהקבוצה $A \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} I_i$ ו: $\sum\limits_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) < \varepsilon$.

דוגמה 2.0.2 : הרציונליים או כל קבוצה בת מנייה אחרת.

אין חובה שיהיה מדובר רק על קבוצה בת מנייה, דוגמה נגדית לכך היא קבוצת קנטור.

דוגמה 2.0.3 קבוצת קנטור: קבוצת קנטור היא כאשר אנו לוקחים את הקטע $[0,1]$ ואנו מוציאים ממנו את הקטע $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$, ומאז מכל קטע שנשאר אנו מוציאים את השליש האמצעי וכך חוזר חלילה. קבוצת קנטור היא $\mathcal{C} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathcal{C}^{(n)}$.
כאשר כל $\mathcal{C}^{(n)}$ הוא איחוד של 2^n קטעים סגורים באורך 3^{-n}.

כפי שראינו כבר בשנים קודמות. כעת נרצה להרחיב את ההגדרה:

2.1 מידה חיצונית

הגדרה 2.1.1 מידה חיצונית (עפ"י לבג): תהי $A \subset \mathbb{R}$ קבוצה כלשהי. נגדיר את המידה החיצונית שלה (עפ"י לבג) $m^*(A)$ להיות:

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (a_i, b_i) \right\}$$

במילים אחרות, לקבוצה יש מידה חיצונית 0, אס"ם היא קבוצה בעלת מידה 0 על פי ההגדרה הישנה והמוכרת.

הערה 2.1.2 על מנת לא להתבלבל בהמשך, בתורת המידה אנו נדבר על כל מיני סוגי מידות וכל מיני סוגי מידות חיצוניות. המידה החיצונית שהגדרנו כאן היא מקרה פרטי של מושג שנדבר עליו בהמשך (לכן מצויין במפורש עפ"י לבג).

2.1.1 תכונות בסיסיות

כפי שראינו באינפי בעבר, קטע הוא אינו ממידה 0. תכונות בסיסיות של מידה חיצונית הן:

- אם נתבונן בקטע $I = [a,b]$, על פי ההגדרה, המידה החיצונית שלו היא: $m^*(I) = b - a$, כלומר פשוט האורך.

הערה 2.1.3 כמובן שאין כן משמעות לקטע סגור בהכרח, הדבר נכון גם לקטע פתוח או חצי פתוח חצי סגור וכו'.

הוכחה: נניח כי $I=[a,b]$ (היתר כתרגיל), בוודאי מתקיים $m^*(I)\le b-a$. הסיבה לכך שהיא שלכל $\varepsilon>0$ נקח: $\left(a-\frac{\varepsilon}{2},b+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ והוא כמובן מכסה את I. אבל זה מתקיים לכל ε לכן ברור כי $m^*(I)\le b-a$.

נראה כי בהכרח $m^*(I)\ge b-a$, לצורך כך נראה כי אם $\{(a_i,b_i)\}_{i=1}^{\infty}$ כיסוי פתוח של הקטע $[a,b]$ אזי $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i-a_i\ge b-a$.

מקומפקטיות של הקטע $[a,b]$ לכיסוי $\{(a_i,b_i)\}_{i=1}^{\infty}$ יש תת כיסוי סופי: $\{(a_{i_\ell},b_{i_\ell})\}_{\ell=1}^{N}$, ברור כי:

$$\sum_{\ell=1}^{N} b_{i_\ell}-a_{i_\ell}\le\sum_{i=1}^{\infty} b_i-a_i$$

לכן, בה"כ, הכיסוי המקורי היה כיסוי סופי:

$$(a_1,b_1),(a_2,b_2),\ldots,(a_N,b_N)$$

ומותר לנו להניח כי כל קטע בכיסוי זה מכיל לפחות נקודה אחת מהקטע $[a.b]$, אחרת הוא מיותר וניתן להשמיט אותו.

מותר לנו להניח שאין קטע אחד מהנ"ל שמוכל בשני (כלומר אין $(a_i,b_i)\subset(a_j,b_j)$ עבור $i\ne j$, כיוון שאז היה ניתן להשמיט אותו.

כמו כן, נניח כי: $a_1\le a_2\le a_3\le\ldots\le a_N$ (אחרת נסדרם כך).

בהכרח מתקיים $a_1<a$ובהכרח $a_2<b_1$. כמו כן, $a<a_2$ ו־ $b_1<b_2$ (אחרת היה ניתן להשמיט את הקטע הראשון).

ובאופן דומה, $a_3<b_2$ אבל $a_3>b_1$ וגם $b_3>b_2$. וכו' וכו'.

לבסוף קיבלנו כי: $a_{i+1}<b_i$ וכי $b_N>b$. ולכן:

$$\sum_{i=1}^{N}(b_i-a_i)\ge\sum_{i=1}^{N-1}(a_{i+1}-a_i)+(b-a_N)=b-a_1\ge b-a$$

כלומר, קיבלנו כי בהכרח: $m^*(I)\ge b-a$, ולכן $m^*(I)=b-a$ כנדרש. ■

הערה 2.1.4 עבור קטע פתוח\חצי פתוח, הושאר כתרגיל.

- בהינתן 2 קבוצות $A_1\subset A$ אזי: $m^*(A)\ge m^*(A_1)$.

הוכחה: ברור, מכיוון שכל כיסוי של A הוא בפרט כיסוי של A_1, ולכן הנדרש. ■

- אם $A_1,A_2,\ldots$ אוסף בן מניה של קבוצות, אז: $m^*\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\right)\le\sum\limits_{i=1}^{\infty}m^*(A_i)$.

מסקנה 2.1.5

איחוד בן מנייה של קבוצות בעלות מידה 0 הוא בעל מידה 0.

הוכחה: (של התכונה)

יהי $\varepsilon>0$, נמצא (לכל i) כיסוי של הקבוצה A_i ע"י קטעים $\left(a_j^{(i)},b_j^{(i)}\right)$ כך ש: $A_i\subset\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}\left(a_j^{(i)},b_j^{(i)}\right)$ וכך ש: $\sum\limits_{j=1}^{\infty}b_j^{(i)}-a_j^{(i)}\le\frac{\varepsilon}{2^i}+m^*(A_i)$.

ואז: $\left\{\left(a_j^{(i)},b_j^{(i)}\right)\right\}_{\substack{j=1,\ldots,\infty\\ i=1,\ldots,\infty}}$ כיסוי בן מנייה של $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$. סכום האורכים של הכיסוי מקיים:

$$\sum_{i=1}^{\infty}\underbrace{\sum_{j=1}^{\infty}\left(b_j^{(i)}-a_j^{(i)}\right)}\le\sum_{i=1}^{\infty}\left(m^*(A_i)+\frac{\varepsilon}{2^i}\right)\le\sum_{i=1}^{\infty}m^*(A_i)+\varepsilon$$

■

הערה 2.1.6 בפרט נובע מכך כי $m^*(A\cup B)\le m^*(A)+m^*(B)$. ברור כי אי שיוויון ממש נובע כאשר יש בין הקבוצות איזשהי חפיפה (בעלת מידה חיצונית שונה מ0). אבל זהו לא המקרה היחידי. ניתן לבנות קבוצות חסומות וזרות A,B כך ש $m^*(A\cup B)<m^*(A)+m^*(B)$. ואף יתרה מכך, בקטע $[0,1]$ אפשר למצוא קבוצות זרות A,B כך ש: $m^*(A)=m^*(B)=1$.

2.2 קבוצה מדידה

התכונה האחרונה שראינו למידה חיצונית מראה לנו שההתיחסות למידה כגודל קבוצה היא לא טובה מספיק. לשם שיפור המשמעות של מידה כגודל נדרשת ההגדרה הבאה:

הגדרה 2.2.1 קבוצה מדידה: תהי $A\subset[a,b]$, נקרא ל A מדידה אם: $m^*(A)+m^*([a,b]\setminus A)=b-a$.

הערה 2.2.2 קל לראות מההגדרות (כתרגיל) שאם מתקיים $A\subset[a',b']$ אז A מדידה ביחס לקטע $[a,b]$ אם"ם היא מדידה ביחס לקטע $[a',b']$.

ברור כי קיימות קבוצות מדידות לדוגמה הקטע $[0,1]$, נתבונן בקבוצה $A=\left[0,\frac{1}{2}\right]$ נבחין כי: $m^*(A)=\frac{1}{2}$ וגם כי: $m^*([0,1]\setminus A)=m^*\left(\left[\frac{1}{2},1\right]\right)=\frac{1}{2}$ ולכן: $m^*(A)+m^*([0,1]\setminus A)=1-0$.

כמו כן, ממה שהראנו עד כה, נובע כי מהנוסחה בהגדרה של קבוצה מדידה תמיד מתקיים $\ge$. ובנוסף, קטע (או איחוד סופי של קטעים) הינו מדיד.

משפט 2.2.3

כל תת קבוצה פתוחה של הקטע $[a,b]$ מדידה (בטופולוגיה המושרית על הקטע מהטופולוגיה הסטנדרטית ב $\mathbb{R}$).

הוכחה: תהי U תת קבוצה פתוחה של $[a,b]$. כלומר: $U=U_1\cap[a,b]$ כאשר U_1 פתוחה ב $\mathbb{R}$.

תחילה נוכיח את הלמה הבאה (ראינו כבר בטופולוגיה):

למה 2.2.4

כל קבוצה פתוחה ב $\mathbb{R}$ היא איחוד בן מנייה של קטעים זרים: $U_1=\bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i,b_i)$ (מותר המקרה של $a_i=-\infty$ או $b_i=\infty$).

הוכחה: לכל $x\in U_1$ נגדיר: $I_x=(a_x,b_x)$ האינטרוול הפתוח הגדול ביותר שמכיל את x ומוכל ב U_1. נשים לב כי ל x,x' או ש $I_x=I_{x'}$ או $I_x\cap I_{x'}=\varnothing$.

נראה כי האוסף $\{I_x : x\in U_1\}$ הוא בן מנייה, מכיוון שכל מספר רציונלי מופיע לכל היות בקטע אחד כנ"ל. וכל קטע כנ"ל מכיל נקודה רציונלית.

ומכיוון שיש רק מספר בן מנייה של מספרים רציונלים, אוסף זה הוא בן מנייה. ■

24/10/2012

■

הערה 2.2.5 הפסקנו להוכיח את המשפט בשלב זה משום מה. נחזור אליו בהמשך.

למה 2.2.6

אם A,B מקיימות $\underbrace{\mathrm{d}(a,b)}_{|b-a|}>\delta$ לכל $a\in A$ ו $b\in B$ עבור איזשהו $\delta>0$ אזי: $m^*(A\cup B)=m^*(A)+m^*(B)$.

הוכחה: בעצם צריך להראות כי $m^*(A\cup B)\ge m^*(A)+m^*(B)$. יהי $\varepsilon>0$, נמצא כיסוי פתוח ע"י קטעים ל $A\cup B$, $A\cup B\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i$, כך ש: $\sum_{i=1}^{\infty}|I_i|\le\varepsilon+m^*(A\cup B)$.

בה"כ ניתן להניח כי כל הקטעים I_i מקיימים $|I_i|\le\delta$. כיוון שאם לא נחליף כל קטע I_i שאורכו גדול יותר מδ במספר סופי של קטעים $I_{i,1},\ldots,I_{i,N}$ כך ש: $|I_i|\ge\sum_{j=1}^{N}|I_{i,j}|+\frac{\varepsilon}{2^i}$.

הערה 2.2.7 אם המידה אינסופית, אז האישייוון טריוויאלי, לכן אנו מניחים כי המידה החיצונית של $A\cup B$ היא סופית.

ולאחר שנבצע פעולה זו נקבל אוסף חדש של קטעים J_i כך ש $|J_i| < \delta$ לכל i, ומתקיים:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \le \sum_{j=1}^{\infty} |I_j| + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2} \le m^*(A \cup B) + 2\varepsilon$$

לכן, זה אכן בלי הגבלת הכלליות.

כעת, מכיוון שהמרחק בין כל איבר ב A וכל איבר ב B גדול מ־δ, כל קטע I_i חותך את A או את B (או אף אחד מהם) אבל לא את שניהם.

יהיו $I_1^{(1)}, I_2^{(1)}, \ldots$ כל הקטעים מהאוסף $\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$ כך ש $I_i \cap A \neq \varnothing$. וכמו כן, יהיו $I_1^{(2)}, I_2^{(2)}, \ldots$ כל הקטעים מהאוסף $\{I_i\}_{i=1}^{\infty}$ כך ש $I_i \cap B \neq \varnothing$. לכן, $\left\{I_i^{(1)}\right\}_{i=1}^{\infty}$ כיסוי של A ואילו $\left\{I_i^{(2)}\right\}_{i=1}^{\infty}$ כיסוי של B ולכן:

$$m^*(A) + m^*(B) \le \sum_{i=1}^{\infty} \left|I_i^{(1)}\right| + \sum_{i=1}^{\infty} \left|I_i^{(2)}\right| \le \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| \le m^*(A \cup B) + \varepsilon$$

ומכיוון שזה נכון לכל ε קיבלנו את הנדרש. ■

מסקנה 2.2.8

אם $I_1, \ldots, I_k$ קטעים סגורים זרים אז $\sum_{i=1}^{k} |I_i| = m^*\left(\bigcup_{i=1}^{k} I_i\right)$.

הערה 2.2.9 לכל קבוצה A כלשהי, וקבוצה B כך ש: $m^*(B) = 0$ מתקיים: $m^*(A) \le m^*(A \cup B) \le m^*(A) +$ ~~$m^*(B)$~~ $\to 0$.

מכאן קל גם להסיק שאם $I_1, \ldots, I_k$ קטעים כלשהם: $\sum_{i=1}^{k} |I_i| = m^*\left(\bigcup_{i=1}^{i} I_i\right)$.

הערה 2.2.10 למשל $\le$ כבר יודעים. $\ge$ נסיק ממונוטוניות m^* וממסקנה 2.2.8 עבור קטעים סגורים. $\overline{I_i} \subset I_i$ באורך קצר יותר.

יתרה מזאו אם: $I_1, I_2, \ldots$ אוסף קטעים זרים אזי: $\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| = \sum_{i=1}^{\infty} m^*(I_i) = m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\right)$ כי $\le$ ברור, וממונוטוניות ומה שנאמר עד כה:

$$\sum_{i=1}^{N} |I_i| = m^*\left(\bigcup_{i=1}^{N} I_i\right) \le m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\right) \le \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$$

משפט 2.2.11

אם U פתוחה ב $[a,b]$ אזי היא מדידה. מכיוון שאם U פתוחה בקטע, $U \setminus \{a,b\}$ פתוחה ב $\mathbb{R}$ ומספיק להוכיח את המשפט לקבוצות פתוחות המוכלות בקטע (a,b).

הוכחה: נציג את $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ כאשר I_i קטעים פתוחים. מכיוון שזהו איחוד זר, אז: $m^*(U) = \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$.

יהי $\varepsilon > 0$, מכיוון ש $m^*(U) = \sum_{i=1}^{\infty} |I_i|$ אזי הסכום מתכנס. ולכן יש N כך ש $\sum_{i=N+1}^{\infty} |I_i| < \varepsilon$.

נבחר בכל קטע I_i קטע $\overline{J_i} \subset I_i$ כך ש: $\left|\overline{J_i}\right| \ge |I_i| - \frac{\varepsilon}{N}$. נתבונן במשלים: $\bigcup_{j=1}^{N+1} K_j = \underbrace{(a-\varepsilon, b+\varepsilon) \setminus \bigcup_{i=1}^{N} \overline{J_i}}_{\text{פתוחה}}$ לכן K_j קטעים פתוחים. $\bigcup K_j$ מכסה את $[a,b] \setminus U$.

$$\sum_{j=1}^{N+1} |K_j| = b - a + 2\varepsilon - \sum_{i=1}^{N} \left|\overline{J_i}\right| \le b - a + 3\varepsilon - \sum_{i=1}^{N} |I_i| \le$$

$$b - a + 4\varepsilon + \sum_{i=1}^{\infty} |I_i| = b - a - m^*(U) - 4\varepsilon$$

30/10/2012

ולכן: $m^*([a,b]\backslash U)\le b-a-m^*(U)$. ■

הערה 2.2.12 בתרגיל ראינו כי אם $A\subset I_1,I_2$ אזי:

$$m^*(A)+m^*(I_1\backslash A)=|I_1| \iff m^*(A)+m^*(I_2\backslash A)=|I_2|$$

טענה 2.2.13

$$m^*(A)=\inf\{m^*(U)\mid A\subset U \text{ וגם } U\text{פתוחה}\}$$

הוכחה: נניח שיש לנו כיסוי של קטעים I_i כך ש:

$$A\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i$$

ומתקיים:

$$\sum|I_i|<m^*(A)+\varepsilon$$

נסמן:

$$U=\bigcup_{i=1}^{\infty}$$

מתקיים:

$$m^*(U)\le m^*(A)+\varepsilon$$

ולכן בטענה מתקיים $\ge$.

ומכיוון ש $A\subset U$ אזי: $m_e(A)\le m_e(U)$ ולכן קיבלנו את הנדרש. ■

כמו כן, ניתן להגדיר מידה פנימית, נסמנה $m_*(A)$ כפי שראינו בתרגיל.

הגדרה 2.2.14 $m_*(A)=(b-a)-m^*([a,b]\backslash A)$ היא המידה הפנימית של A ב $[a,b]$.

ונקבל את הטענה:

טענה 2.2.15

$$m_*(A)=\sup\{m^*(F)\mid F\subset A \text{ קומפקטית}\}$$

הוכחה: אם $A\subset[a,b]$ אז:

$$m_*(A)=(b-a)-m^*([a,b]\backslash A)$$

המשך לא קשה... כתרגיל (משחק של שינוי סימן ואז sup הופך ל inf ולהפך). ■

ולכן $A\subset[a,b]$ נקראת מדידה אם"ם: $m_*(A)=m^*(A)$ ולכן לקבוצות מדידות נסמן את מידת לבג שלהן כ $m(A)$.

משפט 2.2.16

$A_1, A_2, \ldots \subset [a,b]$ סדרת קבוצות מדידות בקטע $[a,b]$ זרות אזי:

1. $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ מדיד.
2. $m\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} m\left(A_i\right)$.

הוכחה: אנו יודעים כי:

$$m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} m\left(A_i\right)$$

מה שיש להראות על מנת להוכיח את 1 זה ש: $m_*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{\infty} m\left(A_i\right)$. נראה כי לכל N: $m_*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \geq \sum_{i=1}^{N} m\left(A_i\right)$ ואז כמובן גם הטענה עבור $N \to \infty$ נכונה.

יהי $\varepsilon > 0$, נבחר $F_i \subset A_i$ סגורה כך ש: $m\left(F_i\right) > m\left(A_i\right)$ (F_i מדידה כי היא קבוצה סגורה, וראינו שקבוצות פתוחות הן מדידות, לכן גם המשלימים שלהם מדידים). יש $\delta > 0$ כך שלכל $x \in F_i$, $y \in F_j$ ו $i \neq j$ מתקיים: $\mathrm{d}\left(x,y\right) > \delta$ ולכן:

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{N} F_i\right) = m^*\left(\bigcup_{i=1}^{N} F_i\right) \underbrace{=}_{\text{בגלל ההפרדה}} \sum_{i=1}^{N} m^*\left(F_i\right) \geq \sum_{i=1}^{N} m\left(A_i\right) - N\varepsilon$$

ולכן קיבלנו את הנדרש מכיוון שמצאנו סגורות בפנים כך שהמידה שלהן גדולה מ $\sum_{i=1}^{N} m\left(A_i\right) - N\varepsilon$ ומכיוון שהמידנה הפנימית קטנה או שווה למידה החיצונית זה יניב את המסקנה. ■

טענה 2.2.17

$A \subset [a,b]$ מדידה אס"ס לכל ε ניתן למצוא $A \subset U$ פתוחה ו $F \subset A$ סגורה כך ש: $m\left(U \backslash F\right) < \varepsilon$.

הוכחה: נניח ש A מדידה. אז יש $F \subset A \subset U$ (כאשר U פתוחה ו F סגורה) כך ש:

$$m\left(F\right) \geq m\left(A\right) - \frac{\varepsilon}{2} \geq m\left(U\right) - \varepsilon$$

מכיוון ש $U \backslash F$, F מדידות זרות אז:

$$m\left(U\right) = m\left(F\right) + m\left(U \backslash F\right)$$

ולכן:

$$m\left(U \backslash F\right) < \varepsilon$$

בכיוון ההפוך, ידוע כי לכל $\varepsilon > 0$ יש $F \subset A \subset U$ עם $m\left(U \backslash F\right) < \varepsilon$ אזי:

$$m_*\left(A\right) \geq m^*\left(F\right) = m\left(U\right) - m\left(U \backslash F\right) \geq m\left(U\right) - \varepsilon \geq m^*\left(A\right) - \varepsilon$$

אבל ε שרירותי ולכן: $m_*\left(A\right) = m^*\left(A\right)$ כלומר A מדידה. ■

משפט 2.2.18

נניח $A, B \subset [a,b]$ מדידות אזי $A \cup B$ מדידה.

הוכחה: נראה כי לכל $\varepsilon > 0$ יש קבוצה פתוחה $A \cup B \subset U$ וגם $F \subset A \cup B$ סגורה כך ש $m\left(U \backslash F\right) < \varepsilon$.

נמצא $F_1 \subset A \subset U_1$ כנ"ל כך ש $m\left(U_1 \backslash F_1\right) < \frac{\varepsilon}{2}$ ונמצא $F_2 \subset B \subset U_2$ כנ"ל כך ש $m\left(U_2 \backslash F_2\right) < \frac{\varepsilon}{2}$. נקח את $U = U_1 \cup U_2$ ו: $F_1 = F_1 \cup F_2$ אזי $F \subset A \cup B \subset U$ ומכיוון ש:

$$\left(U_1 \cup U_2\right) \backslash \left(F_1 \cup F_2\right) \subseteq \left(U_1 \backslash F_1\right) \cup \left(U_2 \backslash F_2\right) \Rightarrow m^*\left(U \backslash F\right) \leq m^*\left(U_1 \backslash F_1\right) + m^*\left(U_2 \backslash F_2\right) < \varepsilon$$

■

פרק 3

קבוצות לא חסומות וקבוצות לא מדידות

3.1 σ־אלגברה

נסמן את אוסף הקבוצות המדידות בקטע $[a,b]$:

$$\mathcal{A}_{[a,b]} = \{A \subset [a,b] \mid \text{מדידה } A\}$$

האוסף הזה מקיים:

1. כל קבוצה פתוחה או סגורה ב $[a,b] \in \mathcal{A}_{[a,b]}$.

   5.1. בפרט $\varnothing \in A_{[a,b]}$.

2. אם $A \in \mathcal{A}_{[a,b]}$ גם $[a,b] \setminus A \in \mathcal{A}_{[a,b]}$.

3. אם $A, B \in \mathcal{A}_{[a,b]}$ גם $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ שייכות ל $A_{[a,b]}$.

4. אם $A_1, A_2, \ldots$ סדרה של איברי ב $\mathcal{A}_{[a,b]}$ גם $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}_{[a,b]}$.

   הוכחה: נגדיר סדרה חדשה:

$$\begin{aligned} A'_1 &= A_1 \\ A'_2 &= A_2 \setminus A_1 \\ &\vdots \\ A'_n &= A_n \setminus \left(\bigcup_{i<n} A_i \right) \end{aligned}$$

מתכונה 3 של האוסף נובע כי A'_i מדידים, ומהגדרתם הם זרים. וכמובן מתקיים:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A'_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$$

ולכן, מהמשפט על איחוד זר נקבל כי $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ מדיד. ∎

אוסף של קבוצות המקיים את התכונות 2, 3 ואת $\varnothing \in \mathcal{A}_{[a,b]}$, נקרא אלגברה של תתי קבוצות של מרחב $[a,b]$. לעומת זאת, אוסף המקיים את גם את התכונה הרביעית נקרא σ־אלגברה.

3.2 קבוצות לא חסומות

הגדרה 3.2.1 קבוצה $A\subset\mathbb{R}$ תקרא מדידה אם $A\cap I$ מדיד לכל קטע I (כלומר $|I| = m^*(A\cap I)+m^*(I\backslash A)$).

בתרגיל ראינו כי קבוצה $A\subset[a,b]$ מדידה לפי ההגדרה הישנה היא מדידה גם לפי החדשה.

דוגמה 3.2.2 : $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left(n^2,n^2+\frac{1}{n^2}\right)$. המידה של קבוצה זו היא: $m(U)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

מסקנה 3.2.3 מיידית מההגדרה

אוסף כל הקבוצות המדידות ב$\mathbb{R}$ הוא σ־אלגברה.

עבור A מדידה נסמן $m^*(A)=m(A)$.

משפט 3.2.4

אם $A_1,A_2,\ldots$ סדרת קבוצות מדידות זרות אזי:

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}m(A_i)$$

למה 3.2.5

לכל קבוצה A: $m^*(A)=\lim\limits_{N\to\infty}(A\cap[-N,N])$.

הוכחה: מהמונוטוניות של מידה חיצונית $\geq$ ברור.

עבור הכיוון ההפוך: ראינו בתרגיל כי אם $A_n=A\cap[n,n+1]$ אז:

$$m^*(A\cap[-N,N])=m^*\left(\bigcup_{n=-N}^{N-1}A_n\right)=\sum_{n=-N}^{N-1}m^*(A_n)$$

ולכן:

$$\lim_{N\to\infty}(A\cap[-N,N])=\sum_{n\in\mathbb{Z}}m^*(A_n)$$

ומכיוון ש $A=\bigcup\limits_{n=-\infty}^{\infty}A_n$ אז:

$$m^*(A)\leq\sum_{n\in\mathbb{Z}}m^*(A_n)$$

ומכיוון שראינו אי־שיוויון בשני כיוון בוודאי מדובר בשיוויון כנדרש. ■

כעת, מהלמה, המשפט עצמו ברור: **הוכחה:**

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\lim_{N\to\infty}\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\cap[-N,N]=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{\infty}m(A_i\cap[N,N])=\sum_{i=1}^{\infty}m(A_i)$$

בגלל מונוטוניות של המידה אפשר להפוך את הסמל של הסכום והגבול. ■

לסיכום, הקבוצות המדידות (לבג) ב$\mathbb{R}$ מהוות σ־אלגברה המכילה את אוסף הקבוצות הפתוחות. מידת לבג m מתאימה לכל קוצה מדידה מספר בטווח $[0,\infty]$, היא מקיימת $|I|=m(I)$, וכמו כן היא σ אדיטיבית ($m\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}m(A_i)$ אם A_i מדידות זרות).

3.3 קבוצה לא מדידה

כל הזמן טענו כי קיימות קבוצות כאלה, נרצה לבנות אחת כזאת. נרצה לבנות קבוצה שהמידה החיצונית שלה היא 1 ואילו הפנימית היא 0.

משפט 3.3.1

לא כל הקבוצות מדידות.

הוכחה: נבנה קבוצה $A\subset[0,1]$ כך ש: $m_*(A)=0$ ואילו: $m^*(A)=1$.

נשתמש במשפט מקבוצות: לכל מרחב וקטורי יש בסיס (נובע מהלמה של צורן). המרחב הווקטורי בוא נעסוק הוא $\mathbb{R}$ מעל השדה $\mathbb{Q}$.

בסיס במקרה הזה הוא אוסף מקסימלי של וקטורים בלתי תלויים לינארית (הכוונה היא בצירופים לינאריים סופיים). נסמן את הבסיס $E\subset\mathbb{R}$. היא אוסף שהוא לא בן מנייה, כל הוקטורים בה בלתי תלויים לינארית.

כלומר יש לנו $E\leftarrow e_1,\ldots,e_n$ שונים אחד מהשני וגם מקיימים אם $k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Q}$ כך ש $k_1e_1+\ldots+k_ne_n=0$ אזי $k_1=k_2=\ldots=k_n=0$, כלומר הם בת"ל. וכמו כן, לכל $f\notin E$ יש n ו: $e_1,\ldots,e_n\in E$ וגם $k_1,\ldots,k_n\in\mathbb{Q}$ כך ש $f=\sum\limits_{i=1}^{n}k_ie_i$.

31/10/2012

למען הפשטות, נניח (בלה"כ) ש $1\in E$. נגדיר: $E_1=E\backslash\{1\}$ ונגדיר:

$$A=\text{קומבינציות לינארית סופיות עם מקדמים ב }\mathbb{Q}\text{ של איברים של }E_1$$

קבוצה זו לא תהא מדידה. אנו נראה כי: $m_*(A)=0$ וכי: $m^*(A)>0$ ולכן A לא תהא מדידה (קצת יותר חלש ממה שטענו בתחילת ההוכחה שנראה, אבל בהמשך נראה כי: $m^*(A\cap I)=|I|$ לכל קטע I ואז נקבל את מה שהבטחנו).

נשים לב כי לכל $0\neq q\in\mathbb{Q}$, מתקיים $A\cap(A+q)=\varnothing$ מכיוון שהורדנו ב E_1 את $\{1\}$ ואם $a_1,a_2\in A$ כך ש $a_2=a_1+q$ אזי q (ולכן 1) הוא קומבינציה לינארית סופית של אברי E_1 עם מקדמים רציונליים, וזו סתירה לכך ש $E=E_1\cup\{1\}$ בסיס.

מאידך, $\bigcup\limits_{q\in\mathbb{Q}}(A+q)=\mathbb{R}$ מכיוון ש $y=q\cdot1+(\ldots)\in A+q$. כמו כן: $A+A=A$ כיוון שאם $e_1\in E_1$ יתקיים $A+qe_1=A$.

טענה 3.3.2

$m^*(A)>0$.

הוכחה: אם לא, A ממידה 0, ולכן: $\bigcup\limits_{q\in\mathbb{Q}}(A+q)=\mathbb{R}$ ממידה 0 (כיוון שזהו איחוד בן מנייה! אנו משתמשים כאן בכך שהזזה של קבוצה הוא מאותה מידה של הקבוצה המקומית). וזה כמובן לא נכון. ∎

טענה 3.3.3

$m_*(A)=0$.

הוכחה: נניח ש $F\subset A$ קבוצה קומפקטית עם מידה חיובית. נניח $F\subset[N,N]$, נתבונן ב:

$$B=\bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap[0,1]}(F+q)$$

זהו איחוד זר של קבוצות מדידות עם מידה חיובית. אם $m(F)>0$ אז: $m(B)=\sum\limits_q m(F)=\infty$. אבל B חסומה, ולכן $m(B)<\infty$ וזו סתירה. ∎

כלומר, מצאנו קבוצה לא מדידה ב $\mathbb{R}$, ננסה כעת להראות כי $m^*(A\cap I)=|I|$.

למה 3.3.4

$A\subset\mathbb{R}$ קבוצה כלשהי עם $m^*(A)>0$, $\varepsilon,\delta>0$ אזי יש קטע I כך ש $\delta<|I|<\delta$ כך ש:

$$m^*(A\cap I)\geq(1-\varepsilon)|I|$$

הוכחה: מכיוון שמותר לנו להחליף את A בתת־קבוצה שלה (נסמנה A_1) עם $m^*(A_1) > 0$, בלה"כ $0 < m^*(A) < \infty$.
יש כיסוי: $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \supset A$ כך ש $\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| < \frac{1}{1-\varepsilon} m^*(A)$ וגם: $|I_i| < \delta$ לכל i.

$$\underbrace{m^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}(A\cap I_i)\right)}_{\leq \sum_{i=1}^{\infty} m^*(A\cap I_i)} = m^*(A) \geq (1-\varepsilon)\sum_{i=0}^{\infty}|I_i| = \sum_{i=1}^{\infty}(1-\varepsilon)|I_i|$$

לכן יש i כך ש: $m^*(A\cap I_i) \geq (1-\varepsilon)|I_i|$ כנדרש (אחרת האי־שיוויון לא היה אפשרי). ■

טענה 3.3.5

אם $B \subset \mathbb{R}$ קבוצה כלשהי עם $m^*(B) > 0$ ואם S קבוצה בת מניה צפופה, אזי לכל קטע I מתקיים: $m^*\left(\bigcup_{s\in S}(B+s)\cap I\right) = |I|$.

06/11/2012

הוכחה: נסמן: $C = \bigcup_{s\in S}(B+s)$, נרצה להראות: $m^*(c\cap I) = |I|$.
יהי $\delta > 0$ (δ מאוד קטן), מלמה 3.3.4 קיים קטע J כך ש $|J| < \delta$ ומתקיים: $m^*(J\cap B) \geq (1-\delta)|J|$.
נגדיר $N = \left\lfloor \frac{|I|}{|J|} \right\rfloor$, ונמצא (בזכות כך ש S צפופה) $s_1, s_2, \ldots, s_N \in S$ כך ש $J + s_i \subset I$ וזרים.
אזי:

$$m^*(C\cap I) \geq m^*\left(C \cap \bigcup_{i=1}^{N}(J+s_i)\right) = \sum_{i=1}^{N} m^*(C\cap(J+s_i)) \geq$$

$$\sum_{i=1}^{N} m^*((B+s_i)\cap(J+s_i)) \geq N|J|(1-\delta) \geq \left(|I| - \underbrace{2\delta}_{|J|<|\delta|}\right)(1-\delta)$$

אבל δ קטן כרצוננו, ולכן:

$$m^*(C\cap I) = |I|$$

כנדרש. ■

נקח את $B = A$ ואת $S = \{qe_1 \mid q \in \mathbb{Q}\}$ ונקבל את מה שרצינו מכיוון ש $A \equiv \bigcup_{s\in S}(B+s)$ וקיבלנו כי לכל קטע I מתקיים $m^*(A\cap I) = |I|$. ■

מסקנה 3.3.6 מטענה 3.3.5

$m^*(C\cap D) = m(D)$ לכל D מדידה.

משפט 3.3.7

תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ מדידה כך ש $m(A) > 0$. אזי:

$$A - A = \{x - y \mid \quad x, y \in A\}$$

מכילה קטע.

הערה 3.3.8 הקבוצה הלא מדידה A_1 שהגדרנו היא סגורה תחת חיבור ומכפלה ברציונלים. ובפרט: $A_1 - A_1 = A_1$.
והיא כמובן לא מכילה אף קטע, מכיוון ש A_1 לא מכילה אף מספר רציונלי (פרט ל0).
לכן, מכיוון ש $m^*(A) > 0$ אז לא ייתכן כי A_1 מדידה.

הוכחה: נמצא קטע J כך ש $m(A\cap J)\geq 0.99\left|J\right|$. יהי $\ell=\left|J\right|$ לכל $0\leq s\leq\frac{\ell}{10}$, $A\cap(A+s)\neq\varnothing$. כיוון שאילו $A\cap(A+s)=\varnothing$ אז:

$$1.1\left|J\right|\geq m\left((A\cap J)\cup((A\cap J)-s)\right)=2m\left(A\cap J\right)\geq1.98\left|J\right|$$

וזו כמובן סתירה.

מכאן שיש $A\ni x,y$ כך ש $x=y-s$ או $s=y-x$ דהינו: $\left[0,\frac{\ell}{10}\right]\subset A-A$. ■

3.4 מהי פונקציה מדידה?

הגדרה 3.4.1 תהי $A\subseteq\mathbb{R}$ מדידה. פונקציה: $f:A\to\mathbb{R}$ תקרא מדידה אם לכל α,β, $f^{-1}\left(\alpha,\beta\right)$ מדידה.

דוגמה 3.4.2 : A מדידה, $f:A\to\mathbb{R}$ רציפה, אזי לכל $\alpha<\beta$ מתקיים $f^{-1}\left(a,b\right)$ פתוח ב A, דהיינו $f^{-1}\left(\alpha,\beta\right)=\underbrace{U}_{\text{פתוחה}}\cap A$ ולכן מדידה. כלומר כל פונקציה רציפה היא מדידה.

אנו נחזור לחלק זה בהמשך הקורס. ראשית נרצה לדבר על מרחבי מידה כלליים.

חלק II

מרחבי מידה כלליים

פרק 4

חוג, אלגברה, σ־חוג וσ־אלגברה

4.1 הגדרות ודוגמאות

עד כה דנו רק במידת לבג, נרצה לדון במרחבי מידה באופן כללי יותר.

הגדרה 4.1.1 חוג של תתי קבוצות: חוג של תתי קבוצות של X הוא אוסף לא ריק של קבוצות $\mathcal{R}$ כך שכל $A,B\in\mathcal{R}$ אז גם $A\cup B\in\mathcal{R}$ וגם $A\backslash B\in\mathcal{R}$.

הערה 4.1.2 מכאן נובע כי $\varnothing\in\mathcal{R}$. וכמו כן: $A\cap B=A\backslash\left(A\backslash B\right)\in\mathcal{R}$.

✎ **דוגמה 4.1.3 :** איחודים סופיים של קטעים (פתוחים, סגורים או חצי פתוחים).

הגדרה 4.1.4 אלגברה של תתי קבוצות: אלגברה של תתי קבוצות היא חוג $\mathcal{A}$ כך ש $X\in\mathcal{A}$ (ולכן אם $A\in\mathcal{A}$ גם $X\backslash A\in\mathcal{A}$).

הגדרה 4.1.5 σ־חוג: חוג כך שאם $A_1,A_2,\ldots\in\mathcal{R}$ גם $\bigcup A_i\in\mathcal{R}$ (כלומר מכיל גם איחוד בן־מנייה).

הגדרה 4.1.6 σ־אלגברה: אלגברה שהיא גם σ־חוג.

לכל אוסף של קבוצות ניתן לבנות את החוג המינימלי שמכיל אותו, האלגברה המינימלית, הσ־חוג המינימלי ($\sigma\left(\mathcal{C}\right)$) וה$\sigma$־אלגברה וכיוצ"ב.

אם ניקח את כל תתי הקבוצות של X בוודאי σ־אלגברה שמכילה כל אוסף של קבוצות שנבחר, אפשר לקחת את החיתוך של כל החוגים\האלגבראות\$\sigma$־חוגים\$\sigma$־אלגברות ולקבל אותם. אבל אפשר גם לבנות אותם. לגבי אלגבראות נידרש לבצע אינדוקציה טרנספיניטית, אבל לגבי חוגים זה די קל.

ניתן לתת לאובייקטים אלו תיאור יותר מפורש, לדוגמה: אם $\mathcal{C}$ אוסף של קבוצות עם $\varnothing\in\mathcal{C}$, החוג המינימלי שמכיל אותו הוא כל הקבוצות מהצורה:

$$\bigcup_{i=1}^{N}\left(A_i\backslash B_i\right),\qquad A_i,B_i\in\mathcal{C}$$

בפרט, אם $\mathcal{C}$ בת מניה, גם החוג הנוצר ע"י $\mathcal{C}$ בן מניה.

✎ **דוגמה 4.1.7 :** אם $\mathcal{C}$ הם כל הקטעים עם קצוות רציונלים ב $\mathbb{R}$. אזי $\sigma\left(\mathcal{C}\right)$ מכיל את כל הקבוצות הפתוחות. כי $\sigma\left(\mathcal{C}\right)$ מכיל את כל ה"קטעים" (ייתכן גם לא חסומים) פתוחים, וכל קבוצה פתוחה היא איחוד (זר) של מספר בן מנייה של קטעים פתוחים. בפרט $\mathbb{R}\in\sigma\left(\mathcal{C}\right)$ ולכן זהו σ־אלגברה.
$\sigma\left(\mathcal{C}\right)$ היא הσ־אלגברה הנוצרת ע"י הקבוצות הפתוחות = σ אלגברת בורל.

✎ **דוגמה 4.1.8 :** $\mathcal{A}$ = כל הקבוצות המדידות לבג ב $\mathbb{R}$. אפשר להראות שלא כל קבוצה ב$\mathcal{A}$ היא קבוצת בורל. לשם כך צריך להראות שהעוצמה של הσ אלגברה הקודמת היא מעוצמת הרצף, ואילו זאת היא $2^{\aleph}$.

✎ **דוגמה 4.1.9 :** $X=\mathbb{R}$, $\mathcal{A}$ כל הקבוצות בנות המניה ב X (דוגמה לσ־חוג שאינו σ אלגברה).

✎ **דוגמה 4.1.10 :** $\mathcal{A}=\left\{\varnothing,X\right\}$ σ־אלגברה (טריוויאלית) .

4.2 תכונות

טענה 4.2.1

אם $\mathcal{C}$ אוסף של קבוצות ב X, $A \subset X$ אזי:

$$\underbrace{\sigma(\mathcal{C}) \cap A}_{=\{C\cap A|\ C\in\sigma(\mathcal{C})\}} = \sigma\left(\underbrace{\mathcal{C}\cap A}_{=\{C\cap A|\ C\in\mathcal{C}\}}\right)$$

הוכחה: גם צד ימין וגם צד שמאל הם σ־חוגים המכילים את $C \cap A$ לכל $C \in \mathcal{C}$, ולכן מתקיים $\supseteq$. מאידך, נגדיר:

$$\mathcal{D} = \{B \cup (C \backslash A) \mid \quad B \in \sigma(\mathcal{C} \cap A),\ C \in \sigma(\mathcal{C})\}$$

זהו σ־חוג.כל איר ב $\mathcal{C}$ שייך ל$\mathcal{D}$ מכיוון שאם $C \in C$ אז $C \cap A \in \sigma(\mathcal{C} \cap A)$ ו: $C = \underbrace{(C \cap A)}_{\in\sigma(\mathcal{C}\cap A)} \cup (C \backslash A)$

לכן, $\mathcal{D} \subseteq \sigma(\mathcal{C})$. אבל אם $D \in \mathcal{D}$ אז $D = B \cup (C \backslash A)$ עבור B, C כנ"ל. ומתקיים: $D \cap A = B \in \sigma(\mathcal{C} \cap A)$.
ולכן:

$$\sigma(\mathcal{C}) \cap A \subset \mathcal{D} \cap A$$

ולכן:

$$\subset \sigma(\mathcal{C} \cap A)$$

כנדרש. ■

פרק 5

מידה

5.1 הגדרת המידה ותכונות בסיסיות

הערה 5.1.1 קצת על פרדוקס בנך־טרסקי: כשבנינו קבוצה לא מדידה על הישר, הסתמכנו הרבה על איחודים בני מניה. לקחנו קבוצה, ולקחנו איחוד בני מניה של איחודים שלה, והראנו שהמידה חייבת להיות אפס. אם לוקחים את מידת לבג, ומניחים שהמידה צריכה להיות אינווריאנטית לסיבובים וההזות, פתאום מקבלים סתירות, ואפילו איחודים סופיים יכולים לעשות צרות.
דוגמה לכך היא פרדוקס בנך־טרסקי עליו דיברנו מעט בתרגול. לכן אנו צריכים להיות יותר זהירים בנוגע למידה.

הגדרה 5.1.2 מידה: אם $\mathcal{R}$ חוג של קבוצות, מידה μ שמוגדרת על $\mathcal{R}$ היא פונקציה $\mu:\mathcal{R}\to[0,\infty]$ (כלומר או כל ספר אי־שלילי או הסימן ∞. דהיינו $\{\text{"}\infty\text{"}\}\cup[0,\infty)$) כך ש:

1. $\mu(\varnothing)=0$.
2. אדיטיביות ־ אם $A,B\in\mathcal{R}$ זרות אז: $\mu(A\cup B)=\mu(A)+\mu(B)$.
3. σ־אדיטיביות ־ אם $A_1,A_2,\ldots\in\mathcal{R}$ זרות כך ש $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}\in\mathcal{R}$ אז: $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)=\mu\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\right)$.

מתכונות אלו נובע באופן אוטומטי מספר תכונות:

טענה 5.1.3

אם $A\subset B$ אז: $\mu(A)\le\mu(B)$.

הוכחה: מכיוון ש $B=(B\backslash A)\cup A$ ולכן: $\mu(B)=\mu(A)+\underbrace{\mu(B\backslash A)}_{\ge0}$. ■

טענה 5.1.4

אם $A\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ אז $\mu(A)\le\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)$.

הוכחה: מכיוון שבלה"כ ניתן לעבור לA_i זרות, כעת לכל אחת המידה שלה קטנה מהקודמת (נסיר מA_2את A_1, מA_3 את A_2 וA_1 וכו' לכן ברור כי המידה קטנה יותר).

בנוסף, ברור כי $A=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(A\cap A_i)$ ולכן: $\mu(A)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mu(A\cap A_i)\le\sum\limits_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)$. ■

5.2 מידה חיצונית

הגדרה 5.2.1 מידה חיצונית: (על חוג)
מידה חיצונית היא פונקציה $\mu^* : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ כך ש:

1. $\mu^* (\varnothing) = 0$
2. אם $A \subset B$ אז $\mu^* (A) \le \mu^* (B)$.
3. תת־אדיטיביות - $\mu^* (A \cup B) \le \mu^* (A) + \mu^* (B)$
4. σ־תת־אדיטיביות - $\mu^* \left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \right) \le \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu^* (A_i)$ (אם $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{R}$).

07/11/2012

בהנתן מידה μ על חוג $\mathcal{R}$ ניתן להגדיר מידה חצונית μ^* על האוסף:

$$H (R) = \{\text{כל התתי־קבוצות של איחוד בן מניה של אברי } \mathcal{R}\}$$

ע"י:

$$\mu^* (A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu (A_i) \mid \ A \subseteq \bigcup A_i, \ A_i \in \mathcal{R} \right\}$$

טענה 5.2.2
זו אכן מידה חיצונית.

הוכחה: התכונה הראשונה והשניה ברורות.
צריך רק להראות תת־אדטיביות. נניח $B \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i$. צריך להראות: $\mu^* (B) \le \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu^* (B_i)$.
יהי $\varepsilon > 0$ נמצא לכל i כיסוי בן מניה של $\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} A_j^{(i)}$ כאשר $B_i \subseteq$ $A_j^{(i)} \in \mathcal{R}$.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \mu \left(A_j^{(i)} \right) \le \mu^* (B_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}$$

ואז: $\left\{ A_j^{(i)} \mid \ (i,j) \right\}$ כיסוי בן מניה של B עם:

$$\sum_i \sum_j \mu \left(A_j^{(i)} \right) \le \sum_i \left(\mu^* (B_i) + \frac{\varepsilon}{2^i} \right) = \sum_i \mu^* (B_i) + \varepsilon$$

■

5.2.1 מעבר ממידה למידה חיצונית

נשים לב כי מכיוון ש μ σ־אדיטיבית, אם $A \in \mathcal{R}$ ואם $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. אזי $\mu (A) \le \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu (A_i)$ (ולכן $\mu^* (A) = \mu (A)$).
בלה"כ הA_i זרים (אחרת נחליף את A_i ב: $A_i' = A_i \setminus \bigcup\limits_{j<i} A_j$. ולכן:

$$\mu (A) = \mu \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A \cap A_i) \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu (A \cap A_i) \le \sum_{i=1}^{\infty} \mu (A_i)$$

5.2.2 מעבר ממידה חיצונית למידה

תזכורת 5.2.3 עבור מידת לבג, הגדרנו כי A מדידה על פי לבג אם לכל קטע:

$$m(I)=m^{*}(A\cap I)+m^{*}(I\backslash A)$$

אם מישהו נותן לנו מידה חיצונית כללית, אז אין לנו מושג של קטע. וצריך לחשוב איך להחליף את התנאי הזה.

הגדרה 5.2.4 קרתאודורי (Caratheodory): אם μ^{*} מידה חיצונית, נאמר כי A מדידה אם לכל קבוצה B: $\mu^{*}(B)=\mu^{*}(B\cap A)+\mu^{*}(B\backslash A)$.

משפט 5.2.5

אם m^{*} היא המידה החיצונית של לבג, אזי קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}$ מדידה על פי התנאי של לבג על $\mathbb{R}$ אס"ס היא מדידה לפי ההגדרה של קרתאודורי.

הוכחה: קרתאודורי גורר את לבג זה ברור. הדרישה של קרתאודורי הרבה יותר מחמירה.

לכן המשפט למעשה מתרגם לטענה הבאה:

טענה 5.2.6

לכל קבוצה A מדידה על פי לבג, ולכל קבוצה B (לא בהכרח מדידה!) מתקיים:

$$m^{*}(B)=m^{*}(B\cap A)+m^{*}(B\backslash A)$$

נבחין כי $\leq$ תמיד נכון, מהתכונות של מידה חיצונית. לכן רק צריך להוכיח את הכיוון השני:

$$m^{*}(B)\geq m^{*}(B\cap A)+m^{*}(B\backslash A)$$

בפרט $m^{*}(B)<\infty$ (אחרת זה טריוויאלי).

A מדידה. יהי $\varepsilon>0$.

מותר לנו גם להניח כי $m(A)<\infty$ כי יש $B\subset U$ פתוחה עם $m(U)<\infty$ וצד ימין לא ישתנה אם נחליף את A ב $A\cap U$, לכן לכל $\varepsilon>0$ יש U פתוחה ו F קומפקטית כך ש $F\subset A\subset U$. כך ש $m(U\backslash F)<\varepsilon$.

לכן:

$$m^{*}(B)\geq m^{*}(B\cap(F\cup U^{c}))=m^{*}(B\cap F\cup B\backslash U)\underbrace{=}_{\substack{\forall x\in F,\ y\in U^{C}\\ \mathrm{d}(x,y)>\delta>0}}m^{*}(B\cap F)+m^{*}(B\backslash U)$$

אבל נבחין כי:

$$m^{*}(B\cap F)+m^{*}(A\backslash F)\geq m^{*}((B\cap F)\cup(A\backslash F))\geq m^{*}(B\cap A)$$

ולכן:

$$m^{*}(B\cap A)\leq m^{*}(B\cap F)+\varepsilon$$

בצורה דומה:

$$m^{*}(B\backslash U)+\underbrace{m^{*}(U\backslash A)}_{\leq\varepsilon}\geq m^{*}(B\backslash A)$$

ולכן:

$$m^*(B\backslash A)\le m^*(B\backslash U)+\varepsilon$$

ולכן נקבל כי:

$$m^*(B)\ge m^*(B\cap A)+m^*(B\backslash A)-2\varepsilon$$

ולכן ההגדרות מתלכדות. ■

13/11/2012

משפט 5.2.7

אוסף הקבוצות המדידות לפי μ^* הוא σ־חוג, ואם נסמן $\overline{\mu}$ להיות μ^* מצומצמת לאוסף הקבוצות המדידות על פי μ^* נקבל מידה אס"ם μ^* היא σ־אדיטיבית על האוסף של הקבוצות המדידות.

הוכחה: ראשית נראה כי אוסף הקבוצות המדידות הינו חוג. $A_1,A_2\in H$ מדידות, $B\in H$ כלשהי.

$$\mu^*(B)\underbrace{=}_{A_1\text{מדידה}}\mu^*(B\cap A_1)+\mu^*(B\cap A_1^c)\underbrace{=}_{A_2\text{מדידה}}$$
$$\mu^*(B\cap A_1\cap A_2)+\mu^*(B\cap A_1\cap A_2^c)+\mu^*(B\cap A_1^c\cap A_2)+\mu^*(B\cap A_1^c\cap A_2^c)$$

נראה כי $A_1\cup A_2$ מדידה.

$$\begin{aligned}A_1\cup A_2&=(A_1\cap A_2)\cup(A_1\cap A_2^c)\cup(A_1^c\cap A_2)\\(A_1\cup A_2)^c&=A_1^c\cap A_2^c\end{aligned}$$

$$\mu^*(B)=\mu^*(B\cap A_1\cap A_2)+\mu^*(B\cap A_1\cap A_2^c)+\mu^*(B\cap A_1^c\cap A_2)+\mu^*(B\cap A_1^c\cap A_2^c)\underbrace{\ge}_{\text{תת אדיטיביות}}$$
$$\mu^*(B\cap(A_1\cup A_2))+\mu^*(B\cap(A_1\cup A_2)^c)$$

מכיוון ש $\le$ נכון תמיד, קיבלנו כי $A_1\cup A_2$ מדידה.
באופן דומה:

$$\begin{aligned}A_1\backslash A_2&=A_1\cap A_2^c\\(A_1\backslash A_2)^c&=(A_1\cap A_2)\cup(A_1^c\cap A_2)\cup(A_1^c\cap A_2^c)\end{aligned}$$

אותו חשבון בדיוק (עד כדי השינויים המתבקשים), מראה כי $A_1\backslash A_2$ מדידה.
נשים לב גם כי אם A_1,A_2 זרים, נקבל כי:

$$\mu^*\underbrace{(B\cap(A_1\cup A_2))}_{B_1}=\mu^*\left(\cancel{B\cap(A_1\cap A_2)}^{\varnothing}\right)+\mu^*(B\cap A_1)+\mu^*(B\cap A_2)+\mu^*\left(\cancel{B\cap(A_1^c\cap A_2^c)}^{\varnothing}\right)$$

כדי להראות כי אוסף הקבוצות המדידות על פי קרתאודור ($\Longleftrightarrow$ על פי μ^*) הוא σ־חוג, נותר להראות כי אם A_i מדידות זרות אז $\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ מדיד.

יהי B כלשהו, נסמן: $A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ (A_i זרות), וגם נסמן: $A^{(n)}=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$. נבחין כי:

$$\underbrace{\mu^*\left(B\cap A^{(n)}\right)}_{=\sum_{i=1}^{n}\mu^*(B\cap A_i)}+\mu^*\left(B\backslash A^{(n)}\right)=\mu^*(B)$$

ולכן:

$$\mu^*\left(B\cap A\right)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*\left(B\cap A_i\right)$$

אם הסכום מתבדר, מ: $\sum_{i=1}^{n}\mu^*\left(B\cap A_i\right)=\mu^*\left(B\cap A^{(n)}\right)\leq\mu^*\left(B\right)$ לכל n, נובע כי $\mu^*\left(B\right)=\infty$ ולכן:

$$\mu^*\left(B\right)=\mu^*\left(B\cap A\right)+\mu^*\left(B\backslash A\right)$$

אחרת, יהי $\varepsilon>0$, יש N כך ש:

$$\mu^*\left(B\cap A\right)\leq\sum_{i=1}^{N}\mu^*\left(B\cap A_i\right)+\varepsilon=\mu^*\left(B\right)-\mu^*\left(B\backslash A^{(N)}\right)+\varepsilon\leq\mu^*\left(B\right)-\mu^*\left(B\backslash A\right)+\varepsilon$$

ולכן A מדידה.
נבחין כי הראינו בעצם כי:

$$\mu^*\left(B\cap\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*\left(B\cap A_i\right)$$

הראינו בעצם כי אם צד ימין הוא ∞ אז גם צד שמאל הוא ∞. אחרת, נפעיל את הטעון לעיל על קבוצה עם מידה חיצונית סופית. ואם $\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*\left(B\cap A_i\right)\leq\mu^*\left(B\cap A\right)$ היה אי שיוויון ממש, היינו מקבלים סתירה.
נניח כעת כי:

$$\mu^*\left(B\cap\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)<\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*\left(B\cap A_i\right)$$

נניח:

$$\mu^*\left(B\cap\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)<\sum_{i=1}^{N}\mu^*\left(B\cap A_i\right)$$

נגדיר: $B_1=B\cap\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i$ אז:

$$\mu^*\left(B_1\right)\geq\mu^*\left(B_1\cap\bigcup_{i=1}^{N}\right)=\sum_{i=1}^{N}\mu^*\left(B\cap A_i\right)>\mu^*\left(B_1\right)$$

וזו כמובן סתירה.

$$\mu^*\left(B\cap\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\geq\mu^*\left(B\cap\bigcup_{i=1}^{N}A_i\right)=\sum_{i=1}^{N}\mu^*\left(B\cap A_i\right)$$

נכון לכל N ולכן:

$$\mu^*\left(B\cap\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)\geq\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*\left(B\cap A_i\right)$$

האי שיוויון ההפוך נובע מתת־אדיטיביות. ■

משפט 5.2.8

אם נתחיל ממידה μ על חוג R נבנה μ^*, נגדיר $\overline{R}$ הקבוצות המדידות, אז $\sigma\left(R\right)\subset\overline{R}$.

הוכחה: כל מה שצריך להראות זה ש $R\subset\overline{R}$, כיוון שמשפט קודם הראנו כי $\overline{R}$ היא σ־חוג.
תהי $A\in R$, ותהי $B\in H\left(R\right)$ (כל הקבוצות שהן איחוד בן מנייה ב R). צריך להראות:

$$\mu^*\left(B\right)\geq\mu^*\left(B\cap A\right)+\mu^*\left(B\backslash A\right)$$

(אי שיוויון שני הוא אוטומטי). אם $\mu^*\left(B\right)=\infty$ ברור.
אחרת, יהי $\varepsilon>0$, אזי יש $A_i\in R$ כך ש $B\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ ומתקיים:

$$\mu^*\left(B\right)\geq\sum_{i=1}^{\infty}\mu^*\left(A_i\right)-\varepsilon$$

אז:

$$A_i'=A_i\cap A$$

מהווה כיסוי ל$B\cap A$.

$$A_i''=A_i\backslash A$$

מהווה כיסוי ל $B\backslash A$.

$$\begin{aligned}\mu^*\left(B\cap A\right) & \leq \sum_{i=1}^{\infty}\mu\left(A_i'\right)\\ \mu^*\left(B\backslash A\right) & \leq \sum_{i=1}^{\infty}\mu\left(A_i''\right)\end{aligned}$$

לכן:

$$\mu^*\left(B\cap A\right)+\mu^*\left(B\backslash A\right)\leq\sum_{i=1}^{\infty}\mu\left(A_i'\right)+\sum_{i=1}^{\infty}\mu\left(A_i''\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\mu\left(A_i'\right)+\mu\left(A_i''\right)\right]$$

אבל R הוא חוג, לכן:

$$=\sum_{i=1}^{\infty}\mu\left(A_i\right)\leq\mu^*\left(B\right)+\varepsilon$$

כנדרש. ■

מסקנה 5.2.9

אם R חוג, μ מידה על R, אזי ניתן להרחיב את μ למידה על $\sigma\left(R\right)$.

הערה 5.2.10 קל לראות כי $\overline{R}$ מכילה את כל הקבוצות A כך ש $\mu^*\left(A\right)=0$ ולכן בדרך כלל $\sigma\left(R\right)\subsetneq\overline{R}$.

הגדרה 5.2.11 מידה שלמה: מידה μ על σ־חוג $\mathcal{A}$ תקרא שלמה, אם לכל קבוצה $A\in\mathcal{A}$ המקיימת: $\mu\left(A\right)=0$ לכל תת קבוצה $A'\subset A$ מתקיים: $A'\in\mathcal{A}$.

תרגיל: הבניה של קרתאודורי נותנת תמיד מידה שלמה.

הגדרה 5.2.12 מידה סופית: מידה μ על אלגברה $\mathcal{A}$ תקרא סופית אם $\mu(X) < \infty$ (X ־ כל המרחב).

הגדרה 5.2.13 מידה σ־סופית: מידה μ על אלגברה $\mathcal{A}$ תקרא σ־סופית אם יש $A_1, \ldots \in \mathcal{A}$ כך ש: $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, $\mu(A_i) < \infty$.

אם μ מידה על חוג R אפשר להגדיר סופיות במובן החלש: לכל $A \in R$, $\mu(A) < \infty$, וגם σ־סופית במובן החלש (כל קבוצה בחוג ניתן לבטא כאיחוד בן מניה של קבוצות בחוג עם מידה סופית).

דוגמה 5.2.14 למידה שאינה σ־סופית: לכל קבוצה $A \subset \mathbb{R}$ נגדיר: $\mu(A) = \#A$, מכיוון שיש קבוצות שהן אינן בנות מנייה, קל וחומר כי המידה הזו אינה σ־סופית.

אם μ היא מידה סופית, σ סופית, ... על חוג R אזי $\overline{\mu}$ המתקבלת מהבניה של קרתאודורי היא סופית, σ־סופית וכיו"צ בהתאמה.

דוגמה 5.2.15 : אם R־ אוסף הקבוצות בנות המניה ב $\mathbb{R}$ אזי R σ־חוג (ולא σ־אלגברה). והמידה $\mu(A) = \#A$ היא σ־סופית במובן החלש.

משפט 5.2.16

אם R חוג ו μ מידה על R. ואם μ היא σ־סופית, אזי יש רק דרך אחת להרחיב את μ למידה על $\sigma(R)$.

עיקוף דרך תכונות של σ־אלגבראות.

הגדרה 5.2.17 אוסף סגור מונוטונית: X קבוצה, $\mathcal{M}$ אוסף של תתי קבוצות של X. $\mathcal{M}$ יקרא סגור מונוטונית אם לכל סדרה של קבוצות:

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$$

אז $\lim A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$. וגם לכל סדרה יורדת של קבוצות:

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$$

מתקיים:

$$\lim A_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{M}$$

דוגמה 5.2.18 : כל σ־חוג C הוא אוסף סגור מונוטונית.
אם A_i סרה עולה, נובע ישירות מההגדרות. אם A_i סדרה יורדת, אז נתבונן ב:

$$B_n = A_1 \backslash A_n$$

היא מונוטונית עולה ולכן: $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in C$ ולכן: $A_1 \backslash B \in C$. אבל:

$$A_1 \backslash B_n = A_1 \backslash (A_1 \backslash A_n) = A_n$$

ולכן:

$$A_1 \backslash B = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$$

14/11/2012

טענה 5.2.19

אם יש לנו חוג R שסגור מונוטונית אז הוא σ־חוג.

הוכחה: צריך לבדוק אם $A_1, A_2, \ldots \in R$ אז: $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in R$, וזה נכון מכיוון ש R חוג.

$B_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \in R$ ו B_n סדרה מונוטונית: לכן: $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. ■

עוד משהו ברור: לכל אוסף של קבוצות $\mathcal{A}$ אפשר להגדיר $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ האוסף המינימלי הסגור מונוטונית המכיל את $\mathcal{A}$.

משפט 5.2.20

יהי R חוג אזי כל אוסף סגור מונוטונית המכיל את R מכיל את $\sigma(R)$.

במילים אחרות, אם R חוג, $\mathcal{M}(R) = \sigma(R)$ (מכיוון ש $\mathcal{M}(R) \subseteq \sigma(R)$ ברור, והמשפט בניסוח הראשון שלו נותן את ההכלה ההפוכה). **הוכחה:** נגדיר $\mathcal{M} = \mathcal{M}(R)$, ולכל קבוצה $E \in \mathcal{M}$ נגדיר:

$$K(E) = \{F \in \mathcal{M} \mid \ F \cup E \in \mathcal{M} \quad F \backslash E \in \mathcal{M} \quad E \backslash F \in \mathcal{M}\}$$

נשים לב כי $K(E)$ סגור מונוטונית. בנוסף אם $E \in R$ אזי $R \subset K(E)$.

מהמינימליות עבור $E \in R$, $\mathcal{M} = K(E)$.

לכן, לכל $E \in R$ ולכל $F \in \mathcal{M}$, $F \cup E \in \mathcal{M}$, $F \backslash E \in \mathcal{M}$ ו $E \backslash F \in \mathcal{M}$.

לכן, לכל $F \in \mathcal{M}$ מתקיים $R \subset K(F)$. ולכן: $K(F) = \mathcal{M}$.

ולמעשה סיימנו, כי הראנו בעצם כי $\mathcal{M}$ הוא חוג של קבוצות, וחוג סגור מונוטונית הוא σ־חוג. ■

משפט 5.2.21

תהי μ מידה σ־סופית (במובן החלש) על חוג R אזי יש מידה $\overline{\mu}$ יחידה שמרחיבה את μ ל $\sigma(R)$.

הערה 5.2.22 בלי התנאי של σ־סופית (במובן החלש) אין יחידות.
קיום כבר ראינו.

הוכחה: נניח תחילה μ מידה סופית על X (ז"א X מדידה $\iff$ R אלגברה), ובנוסף $\mu(X) < \infty$.

נניח μ_1, μ_2 שתי דרכים להרחיב את μ ל $\sigma(R)$. $\mu_1(A) = \mu_2(A)$ לכל $A \in R$.

נראה כי האוסף:

$$\mathcal{C} = \{B \mid \ \mu_1(B) = \mu_2(B)\}$$

הוא אוסף מונוטוני. אם נראה זאת, סיימנו לפי המשפט הקודם.

נניח כי $A_i \uparrow A$ (כלומר A_i אוסף עולה ל A) ומתקיים $A_i \in \mathcal{C}$ אז:

$$A = \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \backslash A_{i-1})$$

(הצגנו אותו בעזרת אוסף בן מנייה של קבוצות זרות).

$$\mu_1(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_1(A_i \backslash A_{i-1}) = \lim_{i\to\infty} \mu_1(A_i)$$

אבל זה גם:

$$= \lim_{i\to\infty} \mu_2(A_i) = \mu_2(A)$$

מכיוון ש $A_i \in \mathcal{C}$ לכל A_i.

אם $A_i \downarrow A$ וכל $A_i \in \mathcal{C}$ אז: $A_i^c \uparrow A^c$.

$\mathcal{C}$ סגור תחת משלים כי: $\mu_1(X) = \mu_1(A) + \mu_1(A^c)$ (כאן אנו משתמשים בסופיות).

ומהטיעון הקודם $A^c \in \mathcal{C}$ ולכן $A \in \mathcal{C}$.

הערה 5.2.23 אם μ לא סופית $A_i \downarrow A$ ו: $\mu(A_i) = \infty$ לא ברור מה $\mu(A)$.

דוגמה 5.2.24 : m־מידת לבג על $\mathbb{R}'$ $A_n = (n, \infty)$, $A_n \downarrow \varnothing$, $m(A_n) = \infty$, $m(\varnothing) = 0$.

כעת נרצה לדבר על σ־סופיות.

למה 5.2.25

R חוג, R, $A \in R$,

$$\sigma(\{C \cap A : C \in R\}) = \{B \cap A \mid B \in \sigma(R)\}$$

הוכחה: לא נוכיח את הלמה, אבל היא ברורה. ■

נניח μ מידה σ־סופית, אם נצמצם את μ לתתי קבוצות של קבוצה $A \in R$ עם $\mu(A) < \infty$ נקבל מידה בסופית, לכן אם $A \in R$ ו $\mu(A) < \infty$ אז אם $B \in \sigma(R)$ וגם $B \subset A$ אזי $\mu_1(B) = \mu_2(B)$.

מכך שמדובר בσ־סופיות, כל קבוצה $B \in \sigma(R)$ מוכלת באיחוד בן מניה זר של קבוצות ב R עם מידה סופית ולכן:

$$B = \dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} (B \cap A_i)$$

לכן:

$$\mu_1(B) = \sum \mu_1(B \cap A_i) = \sum \mu_2(B \cap A_i) = \mu_2(B)$$

■

20/11/12

5.3 σ־אלגברת בורל

σ אלגברת בורל על $\mathbb{R}$ היא ה־σ אלגברה המינימלית:

1. המכילה את כל הקבוצות הפתוחות
2. המכילה את הקבוצות הקומפקטיות
3. המכילה איחודים סופיים של קטעים

נסמן ב־G את כל הקבוצות הפתוחות, וב־F את כל הקבוצות הסגורות. ברור ששניהם אינם σ־אלגברות.

נסמן ב־G_δ את החיתוכים הבני־מנייה של קבוצות פתוחות, ונקבל $F \subset G_\delta$, ובאותה צורה את F_σ איחודים בני־מנייה של קבוצות סגורות.

נסמן ב־$G_{\delta\sigma}$ איחודים בני מנייה של קבוצות ב־G_δ, ובאותה צורה $F_{\sigma\delta}$ חיתוכים בני מנייה של קבוצות ב־F_σ. ניתן להמשיך כך - $G_{\delta\sigma\delta}, F_{\sigma\delta\sigma}$ וכן הלאה.

ברור כי החוג $\mathcal{R}$ של איחודים סופיים של קטעים מקיים $\mathcal{R} \subset G_\delta,\ \mathcal{R} \subset F_\sigma$. כמו כן, ברור כי כל האוספים שתוארו לעיל שייכים ל־σ־אלגברת בורל.

ניתן היה לקוות שאם נעשה את תהליך זה (של הוספת δ או σ) מספר בן־מנייה של פעמים, נקבל שהאיחוד של הכל $(G \cup G_\delta \cup G_{\delta\sigma} \cup \ldots)$ הוא קבוצה מונוטונית ולכן σ־אלגברה, אבל זה לא המצב. צריך אינדוקציה טרנספיניטית.

פרק 6

מרחבי מידה

הגדרה 6.0.1 מרחב מדיד/מידה: $(X,\mathcal{A})$, כאשר X קבוצה ("המרחב"), ו־$\mathcal{A}$ σ־אלגברה של תתי קבוצות ("הקבוצות המדידות"), הוא **מרחב מדיד**.
$(X,\mathcal{A},\mu)$ כך ש־$(X,\mathcal{A})$ מרחב מדיד ו־μ מידה על $\mathcal{A}$ יקרא **מרחב מידה**.

נראה מתכון לייצור מרחב מידה. יהי $\mathcal{R}$ חוג של קבוצות, μ מידה על $\mathcal{R}$. נגדיר מזה מידה חיצונית μ^*, מתוכה את אוסף הקבוצות המדידות $\overline{\mathcal{R}}$, ונקבל את המידה $\overline{\mu}$ על ה־σ־חוג $\overline{\mathcal{R}}$ המוגדרת ע"י $\overline{\mu}(A)=\mu^*(A)$. ההבדל הוא שבעוד ש־$\mu^*$ היא מידה חיצונית המקיימת רק תת־אדיטיביות, $\overline{\mu}$ היא מידה. זה יצור מרחב מידה אם $X\in\overline{\mathcal{R}}$.

6.1 דוגמה למרחב מידה

$X=[a,b)$ (או $X=\mathbb{R}$), ו־$\mathcal{B}$ תהיה σ־אלגברת בורל על X, אז $(X,\mathcal{B})$ מרחב מדיד. כעת, נמצא את כל המידות למרחב המדיד הנ"ל.

תהי $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה מונוטונית עולה חלש, לא בהכרח רציפה, עם $F(t)<\infty$ לכל $t\in[a,b)$. נגדיר פונקציה מועמדת למידה μ_F על החוג $\mathcal{R}_0$ שמוגדר כאיחודים סופיים של קטעים מהצורה $[c,d)$ המוכלים ב־$[a,b)$ (כאשר אז $\mathcal{R}_0$ למעשה אלגברה אם $X=[a,b)$).

נגדיר $\mu_F\left(\uplus_{i=1}^{N}[a_i,b_i)\right):=\sum\limits_{i=1}^{N}\left(F(b_i)-F(a_i)\right)$. קל לראות כי μ_F אי־שלילית ואדיטיבית סופית. כדי להראות σ־אדיטיביות, צריך להראות כי אם $[c,d)=\uplus_{i=1}^{\infty}[c_i,d_i)$ אז $\mu_F([c,d))=\sum\mu_F([c_i,d_i))$.

טענה 6.1.1

σ־אדיטיביות של μ_F שקולה לכך ש־F רציפה משמאל.

הוכחה: נניח ש־μ_F היא σ־אדיטיבית, ונבחר $a\le t_0<t_1<\ldots<t\le b$ כאשר $t_i\to t$. מ־σ־אדיטיביות מתקיים

$$F(t)-F(t_0)=\mu_F([t_0,t))=\mu_F\left(\uplus_{i=1}^{\infty}[t_{i-1},t_i)\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\mu_F([t_{i-1},t_i))=$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\mu_F([t_{i-1},t_i))=\lim_{n\to\infty}f(t_n)-f(t_0)$$

ולכן $F(t_i)\to F(t)$, ו־F רציפה משמאל.

נניח כי F רציפה משמאל, יהי $[c,d),[c_i,d_i)$ כמקודם, ויהי $\varepsilon>0$. נבחר $d'<d,\ c_i'<c_i$ כך ש־$F(d')\ge F(d)-\varepsilon,\ F(c_i')\ge F(c_i)-\varepsilon 2^{-i}$ (המקרה $d=b\wedge F(b)=\infty$ מוכח בצורה דומה ומושאר כתרגיל, כי אילון לא חשב על זה מראש ואין לו כוח לעשות את זה כרגע, לדעתי).

הערה 6.1.2 אנו רוצים להראות הרי את השוויון $\mu_F([c,d)) = \sum \mu_F([c_i,d_i))$. הכיוון $\geq$ ברור ולא תלוי ברציפות משמאל של F (ונראה למה) - צ"ל שלכל N מתקיים $\mu_F([c,d)) \geq \sum_{i=1}^{N} \mu_F([c_i,d_i))$, וע"י אינדוקס מחדש (בתלות ב־N) מותר להניח כי $\ldots \leq c_i < d_i \leq c_{i+1} < d_{i+1} \leq \ldots$ (הנחה שלא יכולנו לעשות כשהיה מדובר במספר אינסופי של קטעים), ואז צד ימין הוא $F(d) - F(c) \geq F(d_N) - F(c_1) \geq F(d_N) - F(c_1) - \underbrace{\sum_{i=1}^{N-1} \left(F(c_{i+1}) - F(d_i)\right)}_{\geq 0}$.

לכן נדרש להראות רק את הכיוון $\mu_F([c,d)) \leq \sum \mu_F([c_i,d_i))$.

$$[c,d'] \subset [c,d) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} [c_i,d_i) \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (c_i',d_i)$$

אם נסדר את האינדקסים מחדש, ונשמיט קטעים שמוכלים בקטעים אחרים נקבל ש־$c_i' < c_{i+1}' < d_i < d_{i+1}$. לכן,

$$\sum_{i=1}^{N} \left(F(d_i) - F(c_i) + \varepsilon 2^{-i}\right) \geq \sum_{i=1}^{N} \left(F(d_i) - F(c_i')\right) = F(d_N) - F(c_1') + \underbrace{\sum_{i=1}^{N-1} \left(F(d_i) - F\left(c_{i+1}'\right)\right)}_{\geq 0} \geq$$

$$F(d_N) - F(c_1') \geq F(d') - F(c) \geq F(d) - F(c) - \varepsilon$$

למעשה, כדי לעבור ממספר אינסופי של קטעים למספר סופי, העברנו את הקבוצה שאנו מביטים בה לקבוצה קומפקטית קצת יותר קטנה, העברנו את קטעי הכיסוי לקטעים פתוחים קצת יותר גדולים, והשתמשנו בקומפקטיות.

לכן:

$$\begin{aligned}\mu_F([c,d]) - \varepsilon &\leq \sum_{i=1}^{N} \left(F(d_i) - F(c_i) + \varepsilon 2^{-i}\right) \\ \mu_F([c,d]) &\leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu_F([c_i,d_i)) + 2\varepsilon\end{aligned}$$

■

קיבלנו שאם $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ מונוטונית ורציפה משמאל יש מידה $\overline{\mu_F}$ על קבוצות בורל כך ש־$\overline{\mu_F} = ([c,d]) = F(d) - F(c)$. למידה זו התכונה כי אם $[c,d] \subset [a,b)$ אזי $\overline{\mu_F}([c,d]) < \infty$.

בכיוון ההפוך - נניח ויש לנו מידה μ על המרחב המדיד $([a,b), \mathcal{B})$ עם התכונה הנ"ל. נגדיר $F(t) = \mu([a,t])$. זו פונקציה מונוטונית רציפה משמאל. קל לראות כי לכל $[c,d)$ מתקיים $\mu([c,d)) = \mu([a,d)) - \mu([a,c)) = F(d) - F(c)$. ע"פ התנאי μ היא σ־סופית ולכן ממשפט היחידות $\mu = \overline{\mu_F}$.

הערה 6.1.3 F לא רציפה ב־$t \in [a,b)$ אם ורק אם $\overline{\mu_F}(\{t\}) > 0$.

6.2 מידות האוסדורף

$X = \mathbb{R}$. לכל $0 \leq \alpha \leq 1$, $\delta \geq 0$ נגדיר לכל $A \subset \mathbb{R}$:

$$\mathcal{H}_\alpha^\delta(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} |I_i|^\alpha : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i,\ \forall i,\ |I_i| < \delta\right\}$$

כאשר I_i קטעים.

כאשר δ הולך וקטן, פחות כיסויים כאלה מתאפשרים, ולכן האינפימום גדל, כלומר עבור A, α קבועים, $\mathcal{H}_\alpha^\delta(A)$ היא פונקציה מונוטונית עולה חלש של δ, ולכן קיים גבול.

הגדרה 6.2.1 מידת האוסדורף במימד α:

$$m_\alpha^*(A) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}_\alpha^\delta(A)$$

ההוכחה שמידת האוסדורף היא מידה חיצונית זהה להוכחה כמו למידה החיצונית של לבג. עבור $\alpha=1$ האילוץ על $|I_i|<\delta$ חסר משמעות (כי ניתן לחלק כל קטע גדול לקטעים קטנים ולשמור על האורך), ונקבל $m_1^*=m^*$.
עבור $\alpha=0$, $\mathcal{H}_0^\delta(A)$ הוא המספר המינימלי של קטעים באורך קטן־שווה ל־δ הדרושים כדי לכסות את A, כלומר $m_0^*(A)=\#A$.

קל לראות כי עבור $\alpha>1$ מתקיים $\mathcal{H}_\alpha^\delta(A)=0$ לכל A ולכל δ. עבור $\alpha\in(0,1)$, לכל קטע $I=(a,b)\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}I_i$ עם $|I_i|<\delta$, מתקיים:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_\alpha^\delta((a,b)) &\geq (b-a)\,\delta^{-(1-\alpha)}\\ \sum_{i=1}^{\infty}|I_i|^\alpha &\geq \sum_{i=1}^{\infty}|I_i|\,\delta^{-(1-\alpha)}\geq|I|\,\delta^{-(1-\alpha)}\overset{\delta\to0}{\longrightarrow}\infty\end{aligned}$$

21.11.12 ולכן $m_\alpha^*((a,b))=\infty$.
מהן הקבוצות המדידות עבור m_α^* ע"פ קרתאודורי?

טענה 6.2.2
קטע הוא מדיד קרתאודורי.

הוכחה: צריך להראות כי לכל קבוצה $A\subset\mathbb{R}$ ולכל קטע I, $m_\alpha^*(A)=m_\alpha^*(A\cap I)+m_\alpha^*(A\backslash I)$ (מותר להניח כי $m_\alpha^*(A)<\infty$ - מכיוון שזו מידה חיצונית הכיוון $\leq$ מתקיים, וצריך להראות רק $\geq$, שבמקרה של ∞ זה טריוויאלי).
כלומר, צריך להראות שלכל $\delta>0$ ולכל $\varepsilon>0$ ניתן למצוא כיסויים ע"י קטעים $A\cap I\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}I_i^{(1)},\ A\backslash I\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}I_i^{(2)}$ כך ש־$\left|I_i^{(2)}\right|<\delta,\ \left|I_i^{(1)}\right|<\delta$ ו־$\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left|I_i^{(1)}\right|^\alpha+\sum\limits_{i=1}^{\infty}\left|I_i^{(2)}\right|^\alpha\leq m_\alpha^*(A)+\varepsilon$.
לוקחים קטעים באורך $\leq\delta$ של A עם $A\subset\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}I_i$ כך ש־$\sum\limits_{i=1}^{\infty}|I_i|^\alpha\leq m_\alpha^*(A)+\varepsilon$. ע"י "ניתוח" פשוט מפרידים לשני כיסויים.
לסגור את פרטי ההוכחה מושאר כתרגיל. ■

מכאן, כל קבוצת בורל על הישר מדידה עפ"י קרתאודורי. נגדיר $m_\alpha(A)=m_\alpha^*(A)$ עבור הקבוצות המדידות.
m_α מידה לא σ־סופית על $\mathbb{R}$ שמוגדרת לכל קבוצת בורל.
לכל m_α יש קבוצה סגורה K_α כך ש־$0<m_\alpha(K_\alpha)<\infty$.

✎ **דוגמה 6.2.3 :** אם $\mathcal{C}$ קבוצת קנטור הרגילה ניתן להראות כי $0<m_\alpha(\mathcal{C})<\infty$ בדיוק עבור $\alpha=\frac{\log 2}{\log 3}$.

ניתן להראות שאם $0<m_\alpha(K)<\infty$ אזי ל־$\alpha'>\alpha$ מתקיים $m_\alpha(K)=0$, ול־$\alpha'<\alpha$ מתקיים $m_\alpha(K)=\infty$.

הערה 6.2.4 יש כאן עוד דוגמא בפרט לשברו של המשפט על היחידות כשאין σ־סופיות, כי עבור $0<\alpha<1$ כל ה־m_α מסכימות על החוג של איחודים סופיים של קטעים.

הערה 6.2.5 ניתן להגדיר $m_\alpha^*,\ \mathcal{H}_\alpha^\delta(A)$ לכל מרחב מטרי ע"י:

$$\mathcal{H}_\alpha^\delta(A)=\inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\operatorname{diam}(I_i)^\alpha : A\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}I_i,\ \operatorname{diam}(I_i)<\delta\right\}$$

כאשר I_i קבוצות כלשהן.

6.3 חזרה לדברים כלליים

הגדרנו מרחבים מדידים ומרחבי מידה. ראינו כבר כמה דוגמאות סטנדרטיות:

- $\left([0,1],\mathcal{B}_{[0,1]}\right)$ כאשר $\mathcal{B}_{[0,1]}$ קבוצות בורל בקטע.
- $\left([0,1],\overline{\mathcal{B}_{[0,1]}}\right)$ כאשר $\overline{\mathcal{B}_{[0,1]}}$ קבוצות מדידות לבג על הקטע.

דוגמה 6.3.1 : דוגמה אקזוטית. נתחיל מהניסוח הכללי:
μ^* מידה חיצונית על X, $\mathcal{A}$ σ-אלגברה של קבוצות מדידות ע"פ קרתאודורי. Y לא מדידה, אבל מקיימת $\mu^*(B\cap Y)=\mu^*(B)$ לכל B מדידה.
הדוגמה הספציפית: $X=\mathbb{R}$, $\mathcal{A}=\overline{\mathcal{B}}$ הקבוצות המדידות לבג, ו-Y הקבוצה הלא-מדידה שבנינו כך שלכל קבוצה B מדידה, $\begin{cases} m^*(B\cap Y)=m^*(B) \\ m_*(B\cap Y)=0 \end{cases}$.
במקרה כזה, נגדיר $\mathcal{A}_1=\{A\cap Y : A\in\mathcal{A}\}$ σ-אלגברה של תתי-קבוצות של Y. כמו כן, עבור $C\in\mathcal{A}_1$ נגדיר $\mu_1(C)=\mu(A)\ \text{if}\ C=A\cap Y$ (צריך לוודא מוגדרות היטב - שלא קיימות שתי A כאלו עם מידות שונות).

טענה 6.3.2

$(Y,\mathcal{A}_1,\mu_1)$ מרחב מידה.

הוכחה: ראשית, נראה כי μ_1 מוגדרת היטב. כלומר, צריך להראות כי אם $C=A_1\cap Y=A_2\cap Y$ אזי $\mu(A_1)=\mu(A_2)$. נראה כי $\mu(A_1\Delta A_2)=0$.
נניח שלא, בה"כ $\mu(A_2\backslash A_1)>0$ (אם זה לא נכון, $\mu(A_1\backslash A_2)>0$). אזי $m^*((A_2\backslash A_1)\cap Y)>0$, ובפרט $(A_2\backslash A_1)\cap Y\neq\varnothing$, ואז $A_2\cap Y\neq A_1\cap Y$, בסתירה.
נגמר הזמן, ולכן להראות ש-μ_1 מידה מושאר בתור תרגיל. ■

27/11/12

בעיה פתוחה בהניתן $X=[0,1)$, ו $\mathcal{B}$ - σ אלגברת בורל.
מהם מידות ההסתברות (מידות שהמידה הכללית היא 1) μ על x כך ש:

1. $\mu(A)=\mu\left(T_2^{-1}A\right)$ לכל $A\in\mathcal{A}$ כאשר: $T_2x=2x \bmod 1$.
2. $\mu(A)=\mu\left(T_3^{-1}A\right)$ כאשר: $T_3x=3x \bmod 1$.
3. $\mu(\{x\})=0$ לכל $x\in[0,1)$.

ההשערה של הלל פורסטנברג (1967, מהמחלקה למתמטיקה): המידה היחידה שמקיימת את שלושת תכונות הנ"ל היא מידת לבג.

חלק III

פונקציות

פרק 7

פונקציות מדידות

הגדרה 7.0.3 $(X,\mathcal{A})$, $(Y,\mathcal{B})$ שני מרחבים מדידים. אזי: $f:X\to Y$ תקרא מדידה אם לכל $B\in\mathcal{B}$ מתקיים: $f^{-1}(B)\in\mathcal{A}$.

נבחין כי הדבר מזכיר את ההגדרה בטופולוגיה לרציפות, מקור של פתוחה היא פתוחה. רק שכאן אנו בוחרים שמקור של מדידה היא מדידה.

מקרה פרטי, הוא $Y=\mathbb{R}$. השאלה היא, איזה σ־אלגברה לבחור ל$\mathbb{R}$? כלומר לאיזה קבוצות אנו קוראים מדידות. עבור $\mathbb{R}$ חקרנו בפרט 2 σ־אלגבראות: $\mathcal{B}$ בורל, $\overline{\mathcal{B}}$ הקבוצות המדידות לבג.

הגדרה 7.0.4 במקרה פרטי זה, $f:(X,\mathcal{A})\to\mathbb{R}$ תקרא מדידה אם $f:(X,\mathcal{A})\to(\mathbb{R},\mathcal{B})$ מדידה. במילים אחרות: $f^{-1}(B)$ מדידה ($\in\mathcal{A}$) לכל קבוצת בורל B.

מסקנה 7.0.5

נובע ישר מההגדרה: אם $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה אזי f מדידה בורל.

הערה 7.0.6 סמנטיקה: בדר"כ, הσ־אלגברה לא מצויינת במפורש. אם צריך לציין אותה, נאמר כי f היא $\mathcal{A}$־מדידה (או מדידה לפי $\mathcal{A}$).

הערה 7.0.7 בנינו פונקציה מונוטונית ממש: $f:[0,1]\to[0,1]$ רציפה, כך של־ $f^{-1}(\mathcal{C})$ יש מידה חיובית. כאשר $\mathcal{C}$ היא קבוצת קנטור, ובפרט $m(\mathcal{C})=0$.
לכן, עבור f הנ"ל יש קבוצה קומפקטית K עם מידה $m(K)>0$ כך שכל תת קבוצה שלה היא מהצורה $f^{-1}(A)$ כאשר $A\subset\mathcal{C}$ (ולכן A מדידה לבג).
אבל לK יש תתי קבוצות לא מדידות, מכיוון שבנינו כבר קבוצה $E\subset\mathbb{R}$ כך ש: $m_*(E)=0$ ו: $m^*(E\cap A)=m^*(A)$ לכל A מדידה. K היא סגורה, ועל כן מדידה ולכן: $m^*(E\cap K)=m^*(K)>0$ וגם: $m_*(E\cap K)=0$ ולכן: $E\cap K\subset K$ ולא מדידה.
ולכן f זו אינה מדידה כהעתקה בין המרחבים המדידים: $(\mathbb{R},\overline{\mathcal{B}})\to(\mathbb{R},\overline{\mathcal{B}})$.

טענה 7.0.8

$f:(X,\mathcal{A})\to\mathbb{R}$ מדידה אס"ס לכל $t\in\mathbb{R}$ הקבוצה $\{x\mid f(x)>t\}$ מדידה (ז"א $\in\mathcal{A}$).

הוכחה: ההגדרה שנתנו גוררת ישירות שהקבוצות הנ"ל מדידות.

הכיוון ההפוך הוא גם קל. מהתכונות היפות של f^{-1} (על קבוצות) כגון $\bigcup_{\alpha\in I}f^{-1}(A)=f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\right)$, $f^{-1}(A)^C=f^{-1}\left(A^C\right)$ נובע כי האוסף:

$$\left\{B\subset\mathbb{R}\mid\quad f^{-1}(B)\in\mathcal{A}\right\}$$

הוא σ אלגברה. קל לראות כי כל σ־אלגברה המכילה את החצי ישראים (t,∞) חייבת להכיל את כל σ־אלגברות בורל. כלומר $f:X\to\mathbb{R}$ מדידה לפי $\mathcal{A}$ כנדרש. ■

הגדרה 7.0.9 למשל, אם $\mathcal{D}$ היא σ־אלגברה כנ"ל אזי $\mathcal{D}$ תכיל גם חצי ישר סגור $[t.\infty)$. אזי מכילה איחוד סופי של קטעים. ואז $\mathcal{B} \subset \mathcal{D}$.

טענה 7.0.10

f, g מדידות, אזי עבור $c \in \mathbb{R}$ הקבוצות:

$$\begin{aligned} A &= \{x \mid f(x) < g(x) + c\} \\ B &= \{x \mid f(x) \le g(x) + c\} \\ C &= \{x \mid f(x) = g(x) + c\} \end{aligned}$$

מדידות (כלומר $\in \mathcal{A}$ כאשר $f : X \to \mathbb{R}$ מדידה לפי $\mathcal{A}$).

הוכחה: נוכיח ראשית לA, נשים לב כי:

$$\{x \mid f(x) < g(x) + c\} = \bigcup_{t \in \mathbb{Q}} \{x \mid f(x) < t,\ t < g(x) + c\} = \bigcup_{t \in \mathbb{Q}} \left(f^{-1}((-\infty, t)) \cap g^{-1}((t - c, \infty))\right) \in \mathcal{A}$$

נבחין כי B מדידה כי:

$$\{x \mid f(x) \le g(x) + c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \mid f(x) < g(x) + c + \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{A}$$

ולבסוף, C מדידה, כי זה נובע מכך ש B ו A מדידות. הרי: $C = B \backslash A$. ■

טענה 7.0.11

נניח כי: $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ רציפה (או מדידה בורל), ונניח $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ מדידה, אזי $\phi \circ f$ היא גם מדידה.

הוכחה: לכל $B \in \mathcal{B}$ (קבוצת בורל):

$$(\phi \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}\phi^{-1}(B) = f^{-1}(\text{קבוצת בורל}) \in \mathcal{A}$$

וסיימנו. ■

מסקנה 7.0.12

אם $f, g : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ מדידות, אז גם: $f \pm g$, $f \cdot g$, $|f|$, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$.

הוכחה: $f \pm g$ נובע ישירות ממה מהטענה 7.0.10.

$f \cdot g$ יכולנו להוכיח ישירות, אבל אפשר להשתמש זהות:

$$f \cdot g = \frac{1}{2}\left((f + g)^2 - f^2 - g^2\right)$$

ולכן משילוב הטענה 7.0.10 והטענה הקודמת נקבל כי היא מדידה.

$|f|$ היא הרכבה של f עם $\phi(x) = |x|$. ולכן מדידה.

ו: $\min(f, g)$ או $\max(f, g)$ נבחין כי:

$$\begin{aligned} \max(f, g) &= f + \frac{1}{2}(|g - f| + (g - f)) \\ \min(f, g) &= = \max(-f, -g) \end{aligned}$$

ולכן הכל מדיד. ■

פרק 8

סדרות של פונקציות

הניסוחים בחלק זה יהיו יותר אלגנטיים אם נרשה גם לפונקציות לקבל את הערכים $\pm\infty$. לכן, נגדיר:

הגדרה 8.0.13 פונקציה ממשית מוכללת: פונקציה ממשית מוכללת ממרחב מדיד $(X,\mathcal{A})$ היא פונקציה: $f:X\to\mathbb{R}\cup\{-\infty\}\cup\{\infty\}$. f כנ"ל תקרא מדידה אם: $f^{-1}(B)\in\mathcal{A}$ לכל $B\in\mathbb{R}$ בורל. וגם: $f^{-1}(-\infty),f^{-1}(\infty)$ מדידות.

משפט 8.0.14

אם f_n סדרת פונקציות ממשיות מדידות על $(X,\mathcal{A})$ אזי:

$$\begin{aligned}F_1(x)&=\sup_n f_n(x)\\F_2(x)&=\inf_n f_n(x)\\F_3(x)&=\limsup f_n(x)\\F_4(x)&=\liminf f_n(x)\end{aligned}$$

מדידות.

הוכחה: נראה תחילה כי F_1 מדידה. צריך להוכיח שלכל $t\in\mathbb{R}$ מתקיים: $F_1^{-1}((t,\infty])$ מדידה (הערה בסוף ההוכחה). אבל:

$$F_1^{-1}((t,\infty])=\bigcup_{n=1}^{\infty}f_n^{-1}((t,\infty])\in\mathcal{A}$$

כי f_n מדידות ו $\mathcal{A}$ היא σ אלגברה.

באופן דומה (או ע"י שימוש בזהות: $\inf f_n(x)=-\sup_n(-f_n(x))$. ומקבלים כי F_2 מדידה.

לגבי F_3:

$$\limsup_{n\to\infty}f_n(x)=\inf_k\left(\sup_{k\leq n}f_n(x)\right)$$

ומפעילים חלקים קודמים. נגדיר: $G_k=\sup_{k\geq n}f_n(x)$, זהו סופרימום על סדרת פונקציות מדידות. לפי מה שראינו עם F_1 נקבל כי G_k מדידה ולכן גם:

$$\limsup f_n(x)=\inf_k G_k(x)$$

מדידה כמו שראינו עם F_2. עבור F_4 באופן זהה. ■

הערה 8.0.15 נבחין כי: $F^{-1}(\infty)=\bigcap_{n=1}^{\infty}F_1^{-1}((n,\infty])$ לכן מדיד. ולכן: $F_1^{-1}((t,\infty])$ מדיד. כמו כן:

$$F_1^{-1}(-\infty)=\bigcap_{n=1}^{\infty}f_n^{-1}(-\infty)$$

מסקנה 8.0.16

אם $f_n(x)\to f(x)$ לכל $x\in X$ ו: f_n מדידות אזי: f מדידה.

הוכחה: ברור כי: $\lim=\limsup$ במקרה זה. ■

מסקנה 8.0.17

הקבוצה של הנקודות: $\left\{x\mid \lim_{n\to\infty}f_n(x)\text{ קיים}\right\}$ ו: $\left\{x\mid \lim_{n\to\infty}f_n(x)\text{ קיים וסופי}\right\}$ מדידות.

הוכחה: הראנו כי:

$$\begin{aligned}\overline{F}(x)&=\limsup f_n(x)\\ \underline{F}(x)&=\liminf f_n(x)\end{aligned}$$

מדידות, ועל פי טענה קדמת, הקבוצה:

$$\left\{x\mid \overline{F}(x)=\underline{F}(x)\right\}=\left\{x\mid \lim f_n(x)\text{ קיים}\right\}$$

מדידה. ■

דוגמה 8.0.18 : $K\subset[0,1]$ קבוצה סגורה, לא צפופה בשום מקום עם $m(K)>0$.

הערה 8.0.19 לא צפופה בשום מקום $\Longleftrightarrow$ בכל קטע יש תת קטע שאינו ב K.

אבל K סגורה אז זה גם אם"ם אין אף קטע שמוכל ב K $\Longleftrightarrow$ כלומר $K=\partial K$.
תהי χ_K הפונקציה האופיינית של K. זו פונקציה מדידה (בורל) אך לא אינטגרבילית רימן (על פי קריטריון לבג). ניתן לקבל את χ_K שגבול מונוטוני יורד של פונקציות רציפות.

$$f_n(x)=\max\{0,1-n\operatorname{dist}(x,K)\}$$

$x\in K$ אם"ם $f_n(x)=1$. כמו כן מתקיים: $0\le f_n(x)\le 1$.
נבחין כי: $f_{n+1}(x)\le f_n(x)$ לכל x. וגם:

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\chi_K$$

28/11/12

8.1 התכנסויות

בהינתן מרחב מידה $(X,\mathcal{A},\mu)$ טבעי להתעלם מקבוצות בעלות מידה 0. במקום להגיד "ביטוי כלשהו שתלוי ב x" לכל x מחוץ לקבוצה Y עם $\mu(Y)=0$ נגיד את אותו ביטוי נכון כמעט תמיד (כ.ת.). או כמעט בכל מקום (כ.ב.מ).

בפרט נאמר כי $f_n\to f$ כמעט תמיד אם יש קבוצה $Y\subset X$ עם $\mu(Y)=0$ (ייתכן גם $Y=\varnothing$) כך שלכל $x\in X\backslash Y$ מתקיים: $f_n(x)\to f(x)$.

הגדרה 8.1.1 התכנסות במידה: נאמר כי $f_n\to f$ במידה אם לכל ε עבור n מספיק גדול מתקיים: $\mu\{x\mid |f_n(x)-f(x)|>\varepsilon\}<\varepsilon$.

ניתן כמובן להגדיר מתי $\{f_n\}$ הא סדרת קושי כ.ת. , ומתי $\{f_n\}$ היא סדרת קושי במידה.

טענה 8.1.2

אם $(X,\mathcal{A},\mu)$ מרחב מידה סופי $\Longleftrightarrow$ μמידה סופית, אז התכנסות כמעט תמיד גוררת התכנסות במידה, אך לא להפך.

הוכחה: נניח ש $f_n\to f$ כמעט תמיד, אזי לכל $\varepsilon>0$ אם נגדיר $Y_{n,\varepsilon}=\{x\mid |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon\}$ מתקיים כי:

$$\mu\left(X\backslash\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n\geq k}Y_{n,\varepsilon}\right)=0$$

נבחין כי: $X_k=X\backslash\bigcap_{n\geq k}Y_{n,\varepsilon}$ היא סדרה יורדת של קבוצות שחיתוכן בעל מידה 0. מכיוון שμ סופית, ו $\mu(X_k)\to 0$ ולכן יש k כך ש $\mu(X_k)<\varepsilon$. ולכן, עבור $n\geq k$ נקבל כי:

$$\mu\{x\mid |f_n(x)-f(x)|\geq\varepsilon\}<\varepsilon$$

תזכורת 8.1.3 במרחב מידה כלשהו אם $A_n\uparrow A$ אז: $\mu(A)=\lim_{n\to\infty}\mu(A_n)$ (נובע ישירות מσ־אדיטיביות + תכונות σ־אלגברה).

אם $A_n\downarrow A$ ואם $\mu(x)<\infty$ אזי:

$$\begin{aligned}\mu(A_n)&=\mu(X)-\mu(A_n^c)\\ \mu(A)&=\mu(X)-\mu(A^c)\end{aligned}$$

אבל $A_n^c\uparrow A^c$ ומפעילים את מה שכתוב למעלה כנדרש.

כנדרש. ■

כדי לראות שהצד השני של הטענה לא נכון נראה דוגמה נגדית.

דוגמה 8.1.4 : $f_n\to 0$ במידה ולא כמעט תמיד על $([0,1],\mathcal{B},m)$, נקח מלבן באורך חצי, ואז נזיז אותו לחצי השני, לאחר מכן מלבן באורך שליש ונזיז אותו לשליש השני והשלישי (כל פעם יש רק את המלבן האחד הזה וכל יתר פונקציה אפס. אח"כ מלבן רבע וכו'. הפונקציה הזו מתכנסת במידה, אבל לא כמעט תמיד (למעשה היא בכלל לא מתכנסת נקודתית באף נקודה).

כעת נבחין כי אם המידה לא סופית, זה לא תופס.

דוגמה 8.1.5 : $f_n\to 0$ נקודתית על $(\mathbb{R},\mathcal{B},m)$ אבל לא במידה

$$f_n(x)=\begin{cases}0 & x<n\\ 1 & x\geq n\end{cases}$$

משפט 8.1.6

אם $f_n\to f$ במידה אזי יש תת סדרה n_k כך ש $f_{n_k}\to f$ כמעט תמיד.

למה 8.1.7 $1/2$ בורל קנטלי

אם A_n סדרת קבוצות מדידות ואם $\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n)<\infty$ אזי כמעט כל x נמצא רק במספר סופי של A_n ים.

נוכיח את המשפט בעזרת הלמה. **הוכחה:** נמצא n_k כך ש:

$$\mu\underbrace{\left\{x\mid |f_{n_k}-f|>\frac{1}{k}\right\}}_{A_k}<2^{-k}$$

הערה 8.1.8 קיים בגלל התכנסות במידה, נבחין כי: $\frac{1}{k} < 2^{-k}$ ולכן היה מותר לנו להגדיר $\frac{1}{k}$ בהגבלה של ההגדרה בקבוצה, הרי ההגדרה הייתה עם אותו ε.

לכן נקבל כי:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu\left(A_k\right)<\infty$$

לכן, כמעט לכל x יש k כך ש $x\notin A_\ell$ עבור $\ell\geq k$. ולכן עבור $\ell>k$ נקבל: $\left|f_{n_\ell}\left(x\right)-f\left(x\right)\right|\leq\frac{1}{\ell}$ ולכן: $f_{n_\ell}\left(x\right)\to f\left(x\right)$ כמעט תמיד. ■

נוכיח את הלמה: **הוכחה:** צריך להראות כי:

$$\mu\left(\bigcap_{k=0}^{\infty}\left(\bigcup_{n\geq k}A_n\right)\right)=0$$

אבל:

$$\mu\left(\bigcup_{n\geq k}A_n\right)\leq\sum_{n=k}^{\infty}\mu\left(A_n\right)\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0$$

מכיוון שהטור מתכנס. כעת נבחין כי מדובר בסדרה יורדת (פחות איחודים) ולכן:

$$\mu\left(\bigcap_{k=0}^{\infty}\left(\bigcup_{n\geq k}A_n\right)\right)\leq\mu\left(\bigcup_{n\geq k}A_n\right)\underset{k\to0}{\longrightarrow}0$$

■

04/12/12

משפט 8.1.9

אם $f_n\to f$ כמעט תמיד, ו: $\mu\left(X\right)<\infty$ או $f_n\to f$ במידה, אזי לכל ε ניתן למצוא $Y\subset X$ עם $\mu\left(Y\right)<\varepsilon$ כך שעל $X\backslash Y$ ההתכנסות $f_n\to f$ היא במ"ש.

הוכחה: נניח כי $\mu\left(X\right)<\infty$. נתבונן בקבוצות:

$$A_{n,\varepsilon}=\left\{x\mid\ \left|f_m\left(x\right)-f\left(x\right)\right|>\varepsilon\text{ for }m\geq n\right\}$$

עבור ε נתון:

$$\mu\left(\bigcap_{n=0}^{\infty}A_{n,\varepsilon}\right)=0$$

ולכן, עבור n מספיק גדול, $\mu\left(A_{n,\varepsilon}\right)$ קטנה כרצוננו. נבחר n_k כך ש:

$$\mu\left(A_{n_k,\frac{1}{k}}\right)<\varepsilon2^{-k}$$

ונגדיר:

$$Y=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_{n_k,\frac{1}{k}}$$

נקבל כי $\mu\left(Y\right)<\varepsilon$. ועבור $x\notin Y$ לכל k אם $n\geq n_k$ אז:

$$\left|f_n\left(x\right)-f\left(x\right)\right|<\frac{1}{k}$$

ולכן, יש לנו התכנסות במידה שווה. ■

טענה 8.1.10

אם f_n סדרת קושי במידה, יש פונקציה מדידה f כך ש $f_n \to f$ במידה.

הערה 8.1.11 אם $f_n \to f$ במידה אז f_n סדרת קושי במידה.

הוכחה: נגדיר n_k סדרה מונוטונית ע"י הדרישה: $\mu\left(\left\{x \mid |f_n(x) - f_m(x)| > \frac{1}{2^k}\right\}\right) < \frac{1}{2^k}$ עבור $\forall n, m \geq n_k$.

טענה 8.1.12

$\{f_{n_k}(x)\}_k$ היא סדרת קושי כמעט תמיד.

הוכחה: נגדיר:

$$A_k = \left\{x \mid \left|f_{n_k}(x) - f_{n_{k+1}}(x)\right| > \frac{1}{2^k}\right\}$$

זו קבוצה עם מידה: $\mu(A_k) < \frac{1}{2^k}$. מכיוון ש $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) < \infty$ אז מהלמה של בורל קנטלי, כמעט כל x לא נמצא בכל ה A_k־ים, עבור $k \geq k_0(x)$. ואז עבור $k \geq k_0(x)$, ועבור $\ell \geq k$:

$$\left|f_{n_\ell}(x) - f_{n_k}(x)\right| \leq \sum_{j=k+1}^{\ell} \left|f_{n_j}(x) - f_{n_{j-1}}(x)\right| \leq \sum_{j=k+1}^{\infty} 2^{-j} = 2^{-k}$$

ולכן זו סדרת קושי. ■

נגדיר את f באופן הבא:

$$f = \limsup f_{n_k}$$

צריך להראות כי $f_n \to f$ במידה. נקח $m \geq n_k$:

$$\mu\left(|f_m(x) - f(x)| > \frac{3}{2^k}\right) \leq \mu\left(|f_m(x) - f_{n_k}(x)| > \frac{1}{2^k}\right) + \mu\left(|f_{n_k}(x) - f(x)| > \frac{1}{2^{k-1}}\right)$$

מבחירת המ_ל נקבל כי האיבר הראשון קטן מ 2^{-k} ואילו השני קטן מ:

$$\sum_{\ell=k}^{\infty} \mu(A_\ell) \leq \sum_{\ell=k}^{\infty} 2^{-\ell} = 2^{-(k-1)}$$

■

מסקנה 8.1.13

נניח $f_n \to f$ במידה ו $f_n \to g$ במידה אזי: $\mu(\{x \mid g(x) \neq g(x)\}) = 0$.

כלומר, עד כדי מידה אפס, ההתכנסות במידה קובעת את הגבול. **הוכחה:** לכל ε, n:

$$\mu(\{x \mid |f(x) - g(x)| > \varepsilon\}) \leq \underbrace{\mu\left(|f(x) - f_n(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\right)}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0} + \underbrace{\mu\left(|g(x) - f_n(x)| > \frac{\varepsilon}{2}\right)}_{\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0}$$

ולכן:

$$\mu(|f(x) - g(x)| > \varepsilon) = 0$$

כעת:

$$\mu(f(x) \neq g(x)) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{x \mid |f(x) - g(x)| > \frac{1}{2}\right\}\right) = 0$$

(איחוד בן מנייה של קבוצות ממידה אפס). ■

חלק IV

אינטגרציה

פרק 9

אינטגרציה

9.1 אינטגרל לבג

נזכר באינטגרל רימן, הגדרנו:

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{P\text{הולכות ומתעדנות}} \sum_{i=1}^{\ell} (t_i - t_{i-1}) \sup_{\xi\in[t_{i-1},t_i]} f(\xi)$$

כאשר:

$$P = \{t_0 = a < t_1 < \ldots < t_\ell = b\}$$

הערה 9.1.1 כמו כן, הגדרנו את $\underline{\int_a^b}$ כאשר במקום sup יש inf.

כלומר, אנו חלקנו את ציר ה x לפרוסות, ובקדנו מה הsup / inf בהן. ובכך יצרנו מלבנים שמקרבים את השטח מתחת לגרף.

כעת, במקום לחלק את ציר ה x נחלק את ציר ה y. זו הגדרה שלא אמת נשתמש בה, אבל ניתן להגדיר כך:

הגדרה 9.1.2 אינטגרל לבג: נגדיר את אינטגרל לבג על הקטע $[a,b]$ לפונקציה חסומה באופן הבא:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{Q\text{חלוקה של טווח } f} \sum_{i=0}^{\ell-1} s_i m\left(x \mid \; s_i \le f(x) < s_{i+1}\right)$$

כאשר $Q = \{-M = s_0 < s_1 < \ldots < s_\ell = M\}$ והפרמטר $\mathrm{mesh}(Q) \to 0$.

כדי להגדיר כך אינטגרל צריך להראות שהגבול קיים:

$$\begin{aligned}\overline{I}(Q,f) &= \sum_{i=0}^{\ell-1} s_{i+1} m\left(\{x \mid \; S_i \le f < s_{i+1}\}\right)\\ \underline{I}(Q,f) &= \sum_{i=0}^{\ell-1} s_i m\left(\{x \mid \; S_i \le f < s_{i+1}\}\right)\end{aligned}$$

נבחין כי:

$$\left|\overline{I} - \underline{I}\right| \le \mathrm{mesh}(Q)\,(b-a)$$

אם Q' מעדכנת את Q קל לראות כי:

$$\overline{I}(Q) \geq \overline{I}(Q') \geq \underline{I}(Q') \geq \underline{I}(Q)$$

ולכן, הגבול : $\lim_{\text{mesh}(Q)\to 0 \text{ כאשר } [-M,M] \text{ חלוקה של } Q} \overline{I}(Q)$ קיים.

אם נגדיר בצורה זו, נקבל אינטגרל שמקיים:

$$\int_a^b (fg)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f\mathrm{d}x$$

וגם, אם $f \geq 0$ אז: $\int_a^b f\mathrm{d}x \geq 0$. וההוכחה של אדיטיביות: $\int_a^b (f+g)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f\mathrm{d}x + \int_a^b g\mathrm{d}x$ קצת לא אלגנטית.

9.2 פונקציות פשוטות

הגדרה 9.2.1 פונקציה פשוטה: פונקציה $f : X \to \mathbb{R}$ תקרא פשוטה אם היא מקבלת רק מספר סופי של ערכים. במילים אחרות, f ניתנת להצגה בתור: $f = \sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{E_i}$.

הגדרה 9.2.2 פונקציה מדידה פשוטה: פונקציה $f : X \to \mathbb{R}$ תקרא מדידה פשוטה אם היא מקבלת רק מספר סופי של ערכים,כלומר , f ניתנת להצגה בתור: $f = \sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{E_i}$. ומתקיים ש E_i מדידות.

הגדרה 9.2.3 פונקציה אינטגרבילית: פונקציה פשוטה מדידה תקרא אינטגרבילית אם יש לה הצגה כנ"ל כך ש $\mu(E_i) < \infty$ לכל i. או (באופן שקול) אם: $\mu(\{x \mid f(x) \neq 0\}) < \infty$.

למה יש שקילות בהגדרות של פונקציה פשוטה?

אם $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{E_i}$ אזי לכל x, $f(x)$ היא מהצורה: $\sum_{i\in I} a_i$ כאשר $I \subset \{1,\ldots,n\}$. כלומר יש סה"כ 2^n אפשרויות. כלומר כמות ערכים סופית שניתן לקבל.

לחלופין, אם f מקבלת את הערכים $a_1, a_2, \ldots, a_N$ ואולי גם 0 אזי:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{\{x \mid f(x) = a_i\}}$$

הגדרה 9.2.4 עבור $f = \sum_{i=1}^{N} a_i \chi_{E_i}$ פשוטה , אינטגרבילית, נגדיר:

$$\int f\mathrm{d}\mu \equiv \int f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \equiv \sum_{i=1}^{N} a_i \mu(E_i)$$

"קל לראות שזה מוגדר היטב" (אילון לא רוצה להוכיח, אל דאגה, יהיה בתרגיל).

ברגע שמראים שהאינטגרל מוגדר היטב לפונקציות פשוטות, נובע כי אם f, g אינטגרביליות פשוטות:

$$\int (af + bg)\,\mathrm{d}\mu = a\int f\mathrm{d}\mu + b\int g\mathrm{d}\mu$$

כי אם $f=\sum_{i=1}^{N}a_i\chi_{E_i}$ ו: $g=\sum_{i=1}^{n}b_i\chi_{F_i}$ אזי:

$$af+bg=\sum aa_i\chi_{E_i}+\sum bb_i\chi_{F_i}$$

כמו כן, ברור כי $f\geq 0$ פשוטה אינטגרבילית אזי: $\int f\geq 0$.

הגדרה 9.2.5 התכנסות בממוצע: סדרת פונקציות (פשוטות אינטגרביליות) תקרא סדרת קושי בממוצע אם לכל ε קיים N כך שלכל $n,m>N$ מתקיים:

$$\int|f_n-f_m|\,\mathrm{d}\mu<\varepsilon$$

באופן יותר כללי, לכל $E\subset X$ מדידה נגדיר (לf פשוטה, אינטגרבילית)

$$\int_E f\mathrm{d}\mu=\int\chi_E f\mathrm{d}\mu$$

05/12/12

9.2.1 תכונות

1. $\int_E f\mathrm{d}\mu$ לינארי בפרמטר f.
2. σ־אדיטיבי ב E (נובע ישירות מ σ אדיטיביות של μ) אם נסמן: $\nu(E)=\int_E f\mathrm{d}\mu$ אזי אם E_i זרות נקבל:

$$\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\nu(E_i)$$

נשים לב גם כי לכל E מדידה $\nu(E)<\infty$.

3. $f\geq 0\Leftarrow$ $\int_E f\geq 0$ לכל E.

נסמן:

$$\|f-g\|_1=\int|f-g|\,\mathrm{d}\mu$$

(עבור f,g אינטגרביליות פשוטות).

הגדרה 9.2.6 התכנסות בממוצע: נאמר כי $f_i\to f$ בממוצע אם $\|f_i-f\|_1\to 0$.

טענה 9.2.7

התכנסות בממוצע גוררת התכנסות במידה. וגם f_n סדרת קושי בממוצע $\Leftarrow$ f_n סדרת קושי במידה.

הוכחה: נניח כי $f_n\to f$ בממוצע. יהי $\varepsilon>0$, נבחר n_0 כך ש $\|f-f_n\|_1<\varepsilon^2$ עבור $n>n_0$. אזי, אם נסמן:

$$A_n=\{x\mid\quad|f(x)-f_n(x)|>\varepsilon\}$$

אזי:

$$|f(x)-f_n(x)|\geq\varepsilon\chi_{A_n}(x)$$

לכן,

$$\varepsilon^2>\int|f(x)-f_n(x)|\,\mathrm{d}\mu\geq\varepsilon\mu(A_n)$$

ולכן $\mu(A_n)<\varepsilon$ עבור $n>n_0$, $n>n_0$. ולכן: $f_n\to f$ במידה. ■

הערה 9.2.8 ההוכחה לסדרות קושי זהה.

הערה 9.2.9 התכנסות בממוצע לא גוררת התכנסות נקודתית כמעט תמיד. ראינו את הדוגמה לזה כבר, מלבן שזז ימינה והופך לצר יותר בכל איטרציה (לא עד אורך אפס, אלא עד חצי לדוגמה).

✎ **דוגמה 9.2.10 :** דוגמה עבור סדרה שמתכנסת במידה אבל לא מתכנסת בממוצע:
עבור $0 \le i < j$ נסמן:

$$f_{i,j}\left(x\right) = j\chi\left[\frac{i}{j}, \frac{i+1}{j}\right]$$

נסדר את $f_{i,j}$ בסדרה. $F_1, F_2, \ldots$ אזי $F_i \to F$ במידה כאשר $i \to \infty$ אבל $F_i \not\to 0$ בממוצע.

✎ **דוגמה 9.2.11 :** דוגמה נוספת היא: $f_n\left(x\right) = n\chi_{\left[0,\frac{1}{n}\right]}\left(x\right)$. $f_n \to 0$ במידה אך לא בממוצע.

9.3 פונקציות אינטגרביליות

הגדרה 9.3.1 פונקציה $f : X \to \mathbb{R}$ תקרא אינטגרבילית אם היא מדידה וקיימת סדרה של פונקציות אינטגרביליות פשוטות f_n כך ש:

1. $f_n \to f$ במידה.
2. $\{f_n\}$ היא סדרת קושי בממוצע.

טענה 9.3.2

אם X מרחב מידה סופי, ו f מדידה וחסומה אז f אינטגרבילית.

הוכחה: נניח טווח f הוא $[-M, M]$. נבחר אוסף חלוקות Q_n של הקטע הנ"ל כך ש פרמטר החלוקה $\text{mesh}\left(Q_n\right) \to 0$. אם:

$$Q_n = \left\{-M = s_0^{(n)} < s_1^{(n)} < \ldots < s_{\ell_n}^{(n)} = M\right\}$$

נגדיר:

$$f_n = \sum_{i=0}^{\ell_n - 1} s_i^{(n)} \chi_{\left\{s_i^{(n)} \le f(\xi) < s_{i+1}^{(n)}\right\}}$$

$f_n \to f$ במ"ש, בפרט במדה. f_n סדרת קושי בממוצע כי $|f_n - f| \le \text{mesh}\left(Q_n\right)$ לכן:

$$|f_n - f_m| \le \text{mesh}\left(Q_n\right) + \text{mesh}\left(Q_m\right)$$

ולכן:

$$\int |f_n - f_m|\, \mathrm{d}\mu \le \left(\text{mesh}\left(Q_n\right) + \text{mesh}\left(Q_m\right)\right)\mu\left(X\right)$$

■

הערה 9.3.3 $f_n \to f$ במ"ש על מרחב מידה סופי גורר $f_n \to f$ בממוצע. אם לא, בהכרח אם ל X מידה אינסופית:

$$f_n\left(x\right) = \frac{1}{n}\chi_{[-n,n]}$$

$f_n \to 0$ במ"ש אך $f_N \not\to 0$ בממוצע.

הגדרה 9.3.4 עבור f אינטגרבילית, נגדיר:

$$\int_E f\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n\mathrm{d}\mu$$

כאשר f_n סדרת פונקציות אינטגרביליות פשוטות כמו בהגדרה.

11/12/2012

נראה כי הגבול קיים:

נגדיר: $a_n = \int f_n\mathrm{d}\mu$ אזי:

$$a_n - a_m = \int\left(f_n - f_m\right)\mathrm{d}\mu \leq \int\left|f_n - f_m\right|\mathrm{d}\mu$$

ומכיוון ש f_n סדרת קושי בממוצע, a_n סדרת קושי, ולכן מתכנסת.

באופן יותר כללי: f_n סדרת פונקציות פשוטות שמהוות סדרת קושי בממוצע, אזי הגבול:

$$\nu\left(E\right) = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n\mathrm{d}\mu$$

כאשר:

$$\nu_n\left(E\right) = \int_E f_n\mathrm{d}\mu$$

מתכנס במ"ש על E ו: ν היא פונקציה σ-אדיטיבית על הקבוצות המדידות.

ההתכנסות עובדת כמו קודם:

$$\left|\nu_n\left(E\right) - \nu_n\left(E\right)\right| \leq \int_E\left|f_n - f_m\right| \leq \int\left|f_n - f_m\right|$$

אבל האחרון הוא חסם שלא תלוי ב E. מאדיטיביות של ν_n ($\nu_n\left(E_1\cup E_2\right) = \nu_n\left(E_1\right) + \nu_n\left(E_2\right)$) מקבלים כי ν אדיטיבית.

צריך להוכיח σ אדיטיביות.

$$E = \dot{\bigcup_{i=1}^{\infty}} E_i$$

$$\left|\nu\left(E\right) - \sum_{i=1}^{k}\nu\left(E_i\right)\right| \leq$$

$$\left|\nu\left(E\right) - \nu_n\left(E\right)\right| + \left|\sum_{i=1}^{k}\nu\left(E_i\right) - \sum_{i=1}^{k}\nu_n\left(E_i\right)\right| + \left|\nu_n\left(E\right) - \sum_{i=1}^{k}\nu_n\left(E_i\right)\right|$$

אם n מספיק גדול, שני האיברים הראשונים קטנים מε. נקבע n כנ"ל אזי:

$$\left|\nu\left(E\right) - \sum_{i=1}^{k}\nu\left(E_i\right)\right| < 2\varepsilon + \left|\nu_n\left(E\right) - \sum_{i=1}^{k}\nu_n\left(E_i\right)\right|$$

עבור k מספיק גדול, צד ימין יהיה קטע מ 3ε ובכך סימנו.

הגדרה 9.3.5 פונקציה ν על קבוצות מדידות תקרא רציפה בהחלט ביחס למידה μ אם לכל ε ישδ כך שאם: $\mu\left(E\right) < \delta$, מתקיים $\left|\nu\left(E\right)\right| < \varepsilon$.

דוגמה 9.3.6 : אם f אינטגרבילית פשוטה, $\nu(E)=\int_E f$ רציפה בהחלט ביחס ל μ. **הוכחה:** נכתוב: $f=\sum_{i=1}^{N}c_i\chi_{A_i}$. אזי:

$$\nu(E)=\sum_{i=1}^{N}c_i\mu(E\cap A_i)\leq\sum_{i=1}^{N}|c_i|\mu(E)$$

אבל $\sum_{i=1}^{N}|c_i|$ הוא קבוע, לכן, עבור $\mu(E)<\delta$ ל δ מספיק קטנה, נקבל את הנדרש. ■

משפט 9.3.7

אם f_n סדרת קושי בממוצע של פונקציות פשוטות אינטגרביליות אזי:

$$\nu_n(E)=\int_E f_n$$

רציפות בהחלט במידה אחידה. דהיינו, לכל $\varepsilon>0$ יש $\delta>0$ כך שאם $\mu(E)<\delta$ אזי: $|\nu_n(E)|<\varepsilon$ לכל n.

הוכחה: יהי $\varepsilon>0$. נמצא n כך ש $\|f_m-f_n\|_1<\frac{\varepsilon}{2}$ לכל $m>n$.
נמצא δ כך שאם: $\mu(E)<\delta$ אזי: $|\nu_k(E)|<\frac{\varepsilon}{2}$ לכל $k\leq n$.
אבל גם אם: $\mu(E)<\delta$ ואם $k\leq n$ אזי $|\nu_k(E)|<\varepsilon$. ואם $k>n$:

$$|\nu_k(E)|\leq\underbrace{|\nu_k(W)-\nu_n(E)|}_{\leq\frac{\varepsilon}{2}}+\underbrace{|\nu_n(E)|}_{\leq\frac{\varepsilon}{2}}<\varepsilon$$

■

מסקנה 9.3.8

אם נגדיר: $\nu(E)=\lim_{n\to\infty}\nu_n(E)$ כמו מקודם, אז ν תהיה רציפה בהחלט ביחס לμ.

משפט 9.3.9

ההגדרה של ההתכנסות אינטגרלים טובה
או במילים אחרות: אם $\{f_n\},\{g_n\}$ סדרות קושי בממוצע. ואם: $f_n\to f$ וגם $g_n\to f$ במידה אזי:

$$\lim_{n\to\infty}\int f_n=\lim_{n\to\infty}\int g_n$$

הוכחה: נגדיר:

$$\nu(E)=\lim\int_E f_n$$
$$\lambda(E)=\lim\int_E g_n$$

נרצה להראות כי: $\nu(X)=\lambda(X)$. נראה כי לכל קבוצה מדידה E:

$$\nu(E)=\lambda(E)$$

שלב ראשון: עבור E ממידה סופית, הנ"ל נכון מכיוון ש $f_n\to f$ במידה, וגם $g_n\to f$ במידה. אנו יודעים שלכל ε:

$$\mu(X\mid |f_n-g_n|\geq\varepsilon)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$$

מהרציפות במידה אחידה של ה ν_n ו λ_n. יש δ כך שאם $\mu(F) < \delta$ אז:

$$\left|\nu_n(F)\right|, \left|\lambda_n(F)\right| < \varepsilon$$

אזי, עבור n מספיק גדול: $F_n = \{x \mid |f_n - g_n| > \varepsilon\}$ מקיימת: $\mu(F_n) < \delta$. נסמן n כזה ב n_0. ואז: אם $n > n_0$ נקבל:

$$\nu_n(W) - \lambda_n(E) = \int_E f_n - g_n = \int_{E\cap F_n} + \int_{E\setminus F_n} \leq \underbrace{\left|\nu_n(E\cap F_n)\right|}_{\leq\varepsilon} + \underbrace{\left|\lambda_n(E\cap F_n)\right|}_{\leq\varepsilon} + \varepsilon\mu(E)$$

ומכיוון ש E ממידה סופית, אז זה קטן כרצוננו.

שלב שני: מכיוון שגם ν וגם λ הן σ־אדיטיביות, נובע כי $\nu(E) = \lambda(E)$ לכל E עם מידה σ־סופית. נגדיר Y להיות:

$$Y = \{x \mid \text{יש איזשהו } f_n \text{ או } g_n \text{ שאינו 0 ב } x\}$$

נבחין כי Y קבוצה עם מידה σ־סופית, ולכל n, E:

$$\begin{aligned} \lambda_n(E\cap Y) &= \lambda_n(E) \\ \nu_n(E\cap Y) &= \nu_n(E) \end{aligned}$$

כנדרש. ■

סיכום ביניים: $\int_E f$ מוגדרת היטב לפונקצות אינטגרביליות:

- לינארי ב f.
- אי שלילי, $f \geq 0$, $\int_E f \geq 0$.
- $\nu(E) = \int_E f$ אזי ν רציפה בהחלט ביחס ל μ ו σ־אדיטיבית.

טענה 9.3.10

אם f אינטגרבילית, כך גם f_-, f_+, $|f|$. כאשר:

$$\begin{aligned} f_+ &= \max(0, f) \\ f_- &= \max(0, -f) \end{aligned}$$

הוכחה: נניח f_n פשוטות, $f_n \to f$ במידה. f_n סדרת קושי בממוצע. אזי $|f_n| \to |f|$ במידה ו:

$$\left|\int |f_n| - |f_m|\,\mathrm{d}\mu\right| \leq \int |f_n - f_m|\,\mathrm{d}\mu$$

ולכן: $|f_n|$ סדרת קושי בממוצע.

$$\begin{aligned} f_+ &= \frac{1}{2}(f + |f|) \\ f_- &= \frac{1}{2}(|f| - f) \end{aligned}$$

■

טענה 9.3.11

אם f אינטגרבילית אזי לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים $\{x \mid f(x) > \varepsilon\}$ בעלת מידה סופית. $\{x \mid f(x) \neq 0\}$ היא בעלת מידה σ-סופית.

הוכחה: f אינטגרבילית, ולכן $|f|$ אינטגרבילית. $|f| \geq \varepsilon \chi_{\{|f(x)|>\varepsilon\}}$ ולכן:

$$\infty > \int |f| \geq \varepsilon \mu\left(\{|f(x)| > \varepsilon\}\right)$$

אפילו קיבלנו אי שיוויון צ'בישב. ולכן:

$$\mu\{x \mid |f(x)| > \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon}\|f\|_1$$

■

דוגמה 9.3.12 : נתבונן ב $X = \mathbb{N}$. β= כל תתי הקבוצות של $\mathbb{N}$. $\mu_{\mathbb{N}}(A) = \#A$.
מתי $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית?

תזכורת 9.3.13 פונקציה פשוטה אינטגרבילית $0 \neq$ רק בקבוצה בעלת מידה סופית.

לכן, אם f פשוטה אינטגרבילית על $\mathbb{N}$ אז $f(n) \neq 0$ רק למספר סופי של $n \in \mathbb{N}$.

הפונקציות האינטגרביליות הן $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ כך ש: $\sum_{n=1}^{\infty} |f(n)| < \varepsilon$. ואם f אינטגרבילית: $\int_{\mathbb{N}} f \mathrm{d}\mu_{\mathbb{N}} = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$.

טענה 9.3.14

אם $f : X \to \mathbb{R}$ מדידה ו: $|f|$ אינטגרבילית, אזי גם f אינטגרבילית.

הוכחה: נניח g_n סדרת פונקציות פשוטות כמו בהגדרת האינטגרל בשביל $|f|$.
נגדיר סדרה f_n בצורה הבאה:

$$f_n(x) = \operatorname{sgn}(f_n(x)) \cdot g_n(x)$$

אם: $g_n(x) = \sum c_i \chi_{A_i}(x)$ ואם $S_+ = \{f(x) > 0\}$ ו: $S_- = \{f(x) < 0\}$ אזי:

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i X_{A_i \cap S_+} + \sum_{i=1}^{N} (-c_i)\chi_{A_i \cap S_-}$$

ישירות מההגדרה:

$$\int |f_n - f_m| \leq \int |g_n - g_m|$$

ולכן, f_n קושי בממוצע וקל לראות ש $f_n \to f$ במידה. ■

הסכם: אם f פונקציה מדידה, f_+ לא אינטגרבילית, f_- אינטגרבילית. נאמר כי: $\int f = +\infty$. ואם f_- לא אינטגרבילית ו f_+ כן אינטגרבילית, נגיד כי: $\int f = -\infty$.

משפט 9.3.15 משפט ההתכנסות הנשלטת של לבג (Lebesgue dominated conv. thm)

גרסה א:
אם $f_n \to f$ במידה ויש g אינטגרבילית כך ש: $|f_n(x)| \leq g(x)$ לכל n, אזי: f אינטגרבילית ו$f_n \to f$ בממוצע. ובפרט: $\int f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu$.

הערה 9.3.16 קיים גם את משפט ההתכנסות המונוטונית:

משפט 9.3.17

אם $f_n \uparrow f$, f_n אינטגרביליות, אזי: $\lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu = \lim \int f \mathrm{d}\mu$.

12/12/2012

לפני שנדון במשפט ההתכנסות הנשלטת, נרצה קודם לציין כמה הערות שנובעות מהגדרת האינטגרל.

הערה 9.3.18 ההגדרה של האינטגרל לא מבדילה בין פונקציות השונות בקבוצה בעלת מידה 0. ולכן, אם $f_1 = f_2$ כמעט תמיד אזי: $\int_E f_1 \mathrm{d}\mu = \int_E f_2 \mathrm{d}\mu$ לכל E מדידה.

טענה 9.3.19

נניח f_n פשוטות אינטגרביליות, סדרת קושי בממוצע, $f_n \to f$ במידה. אז $f_n \to f$ בממוצע.

הוכחה: לכל n_0 נתון: $g_m = |f_m - f_{n_0}|$ סדרה של פונקציות פשוטות, אינטגרביליות, קושי בממוצע. $g_m \to f - f_{n_0}$ במידה, לכן:

$$\int |f - f_{n_0}| = \lim \int |f_m - f_{n_0}|$$

לכל ε, אם n_0 מספיק גדול, אז לכל $m > n_0$ מתקיים: $\int |f_m - f_{n_0}| < \varepsilon$ ולכן: $\int |f - f_{n_0}| \le \varepsilon$ לכן: $f_n \to f$ בממוצע. ■

טענה 9.3.20

אם f_n פונקציות אינטגרביליות שמהוות סדרת קושי בממוצע, אזי יש f אינטגרבילית כך ש $f_n \to f$ בממוצע.

מסקנה 9.3.21

אם f_n פונקציות אינטגרביליות, סדרת קושי בממוצע, $f_n \to f$ במידה אז: $f_n \to f$ בממוצע.

הערה 9.3.22 הסבר: על פי הטענה: $f_n \to \tilde{f}$ בממוצע, ובפרט $f_n \to \tilde{f}$ במידה, ולכן: $f = \tilde{f}$ כמעט תמיד. ולכן: $f_n \to f$ בממוצע.

תזכורת 9.3.23 נזכור מדוע $f_n \to f$ בממוצע גוררת $f_n \to f$ במידה. זאת מכיוון שאם: $\int |f_n - f| \mathrm{d}\mu < \varepsilon^2$ אזי:

$$\varepsilon\mu\left(x \mid |f_n - f| > \varepsilon\right) = \int \varepsilon \chi_{|f_n - f| > \varepsilon} \mathrm{d}\mu \le \int |f_n - f| \mathrm{d}\mu < \varepsilon^2$$

נוכיח את הטענה: **הוכחה:** לכל f_n יש סדרה $\varphi_\ell^{(n)}$ של פונקציות פשוטות אינטגרביליות כך ש $\varphi_\ell^{(n)} \to f_n$ בממוצע.

ניקח ℓ_n כך ש: $\left\|\varphi_{\ell_n}^{(n)} - f_n\right\|_1 < \frac{1}{n}$. נגדיר: $\varphi_n = \varphi_{\ell_n}^{(n)}$. φ_n היא סדר של פונקציות פשוטות אינטגרביליות שמהווה סדרת קושי בממוצע, נראה זאת:

בהנתן $\varepsilon > 0$ יש n_0 כך שאם $n, m > n_0$ אזי: $\|f_n - f_m\|_1 < \varepsilon$ נדרוש גם: $n, m > \frac{1}{\varepsilon}$. אם: $n, m > \max\left(n_0, \frac{1}{\varepsilon}\right)$ אז:

$$\|\varphi_n - \varphi_m\|_1 \le \|\varphi_n - f_n\| + \|f_n - f_n\| + \|f_m - \varphi_m\| \le 3\varepsilon$$

כנדרש. לכן, φ_n סדרת פונקציות פשוטות שהיא קושי בממוצע ולכן גם קושי במידה. לכן יש פונקציה מדידה כך ש $\varphi_n \to f$ במידה. על פי ההגדרה f אינטגרבילית. $\varphi_n \to f$ בממוצע, ומכאן קל להסיק כי: $f_n \to f$ בממוצע. ■

כעת נחזור למשפט ההתכנסות הנשלטת של לבג (גרסה ראשונה). ראשית נוכיח את הלמה הבאה:

משפט 9.3.24 משפט ההתכנסות הנשלטת של לבג (Lebesgue dominated conv. thm) - גרסה 1

אם $f_n \to f$ במידה, f_n אינטגרביליות ויש g אינטגרבילית כך ש: $|f_n(x)| \le g(x)$ לכל n, אזי: f אינטגרבילית ו$f_n \to f$ בממוצע. ובפרט: $\int f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu$.

תזכורת 9.3.25 הראנו כי אם g אינטגרבילית אז נגדיר:

$$\nu\left(E\right)=\int_{E}g\mathrm{d}\mu$$

אזי ν מידה רציפה בהחלט ביחס ל μ במובן שלכל ε קיים δ כך ש $\nu\left(F\right)<\varepsilon$ לכל F עם μ־מידה קטנה מ δ.

הערה 9.3.26 כדי להראות ש f אינטגרבילית ו: $f_n\to f$ בממוצע מספיק להראות ש f_n היא סדרת קושי בממוצע.

18/12/2012

הסבר לבפרט: $f_n\to f$ בממוצע, ולכן: $\int\left|f_n-f\right|\mathrm{d}\mu\to0$. אבל:

$$f_n-\left|f-f_n\right|\le f\le f_n+\left|f-f_n\right|$$

נקודתית ולכן:

$$\int f_n-\underbrace{\int\left|f-f_n\right|}_{\to0}\le\int f\le\int f_n+\underbrace{\int\left|f-f_n\right|}_{\to0}$$

ולכן f אינטגרבילית.

בצורה דומה: $f_n\to f$ בממוצע גורר כי לכל E מתקיים: $\int_E f_n\to\int_E f$.

בשיעור הקודם הראנו שמספיר להראות כי f_n־ים הם סדרת קושי בממוצע. דהיננו אנו צריכים להוכיח את הטענה הבאה:

טענה 9.3.27

f_n סדרת קושי במידה, f_n,g אינטגרביליות כך ש $\left|f_n\right|\le g$ אזי f_n סדרת קושי בממוצע.

הוכחה: g אינטגרבילית, ולכן:

$$\nu\left(E\right)=\int_{E}g\mathrm{d}\mu$$

מגדירה מידה סופית על X, רציפה בהחלט ביחס לμ.

נגדיר:

$$E_n=\left\{x\mid\ 0<g\left(x\right)<\frac{1}{n}\right\}$$

נבחין כי:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n=\varnothing$$

ולכן: $\nu\left(E_n\right)\to0$. נבחר n כך ש $\nu\left(E_n\right)<\varepsilon$. נגדיר:

$$Y=\left\{g\left(x\right)\ge\frac{1}{n}\right\}$$

ולכן:

$$Y^c=E_n\cup\left\{g\left(x\right)=0\right\}$$

נקבל כי:

$$\int_{Y^c}g=\int_{E_n}g<\varepsilon$$

מאידך, מכיוון ש g אינטגרבילית, $\mu(Y) < \infty$ (אפילו: $\mu(Y) \leq n\int g$).

ומכיוון ש ν ריצפה בהחלט ביחס לμ יש $\delta > 0$ כך שאם $\mu(F) < \delta$ אזי: $\nu(F) \leq \frac{\varepsilon}{M}$ כך ש $M \geq \mu(Y)$.

נניח n_0 גדול מספיק כך שאם $m,k \geq n_0$ אז:

$$\mu\left(\left\{x \mid \ |f_m(x) - f_k(x)| > \frac{\varepsilon}{M}\right\}\right) < \delta$$

אזי:

$$\int |f_m(x) - f_k(x)|\, \mathrm{d}\mu = \int_Y + \int_{Y^c}$$

$$\int_{Y^c} |f_m(x) - f_k(x)|\, \mathrm{d}\mu \leq \int_{Y^c} |f_m| + \int_{Y^c} |f_k|$$

ומבחירת Y:

$$\leq 2\int_{Y^c} |g| \leq 2\varepsilon$$

כמו כן:

$$\int_Y = \int_{Y\cap\left\{|f_m - f_k| \leq \frac{\varepsilon}{M}\right\}} + \int_{Y\cap\left\{|f_m - f_n| > \frac{\varepsilon}{M}\right\}}$$

כעת:

$$\int_{Y\cap\left\{|f_m - f_k| \leq \frac{\varepsilon}{M}\right\}} |f_m - f_k|\, \mathrm{d}\mu \leq \frac{\varepsilon}{M}\mu(Y) \leq \varepsilon$$

וגם:

$$\int_{\underbrace{Y\cap\left\{|f_m - f_k| > \frac{\varepsilon}{M}\right\}}_{\text{קבוצה עם מידה קטנה מ}\delta}} |f_m - f_k| \leq \int_{\underbrace{Y\cap\left\{|f_m - f_k| > \frac{\varepsilon}{M}\right\}}_{\text{קבוצה עם מידה קטנה מ}\delta}} 2g\mathrm{d}\mu \underbrace{<}_{\text{מבחירת } \delta} 2\varepsilon$$

ולכן, מקבלים כי אם $m,k \geq n_0$ אזי:

$$\int |f_m - f_k|\, \mathrm{d}\mu \leq 2\varepsilon + 2\varepsilon + \varepsilon = 5\varepsilon$$

ולכן, f_m קושי בממוצע כנדרש. ■

משפט 9.3.28 (וריאנט, משפט ההתכנסות הנשלטת של לבג)

אם f_n סדרת פונקציות אינטגרביליות, $|f_n| \leq g$ לכל n נקודתית ו: $f_n \to f$ כמעט תמיד. אזי:

$$\int f\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n \mathrm{d}\mu$$

הוכחה: אילו המרחב (X, β, μ) היה מרחב מידה סופי אזי התכנסות כמעט תמיד גורר התכנסות במידה ולכן משתמשים במשפט שהוכחנו.

אבל אנו רוצים להראות את זה על מרחב מידה כללי.

במקרה הכללית נשתמש בלמה הבאה (הוכחה שלה כתרגיל):

למה 9.3.29

אם $f_n \to f$ כמעט תמיד ו $|f_n(x)| \le g(x)$ לכל n ו $g(x)$ מקיימת כי:

$$\mu\{\{x \mid g(x) > \varepsilon\}\} < \varepsilon$$

לכל $\varepsilon > 0$, אזי: $f_n \to f$ במידה.

ניתן להשתמש בלמה זו מכיוון שכל g אינטגרבילית מקיימת את התנאי הנ"ל. והיא למעשה מסיימת את ההוכחה. ∎

הגדרנו:

1. פונקציה פשוטה אינטגרבילית.
2. f אינטגרבילית אם יש סדרת פונקציות פשוטות אינטגרביליות f_n כך ש $f_n \to f$ במידה, סדרת קושי בממוצע (בדיעבד: אנו יודעים כי במקרה כזה: $f_n \to f$ בממוצע).

כמו כן, אינטגרביליות = מדידות + "פונקציה לא גדולה מידי בערכה המוחלט".

כמו כן, הראינו כי f אינטגרבילית אם"ם f מדידה וגם $|f|$ אינטגרבילית.

טענה 9.3.30

אם f מדידה ובנוסף $|f| \le g$ עבור איזושהי פונקציה אינטגרבילית g אזי f אינטגרבילית.

הוכחה: נגדיר:

$$f_n(x) = (\operatorname{sgn}(f(x)))\min\left(\frac{1}{n}\lfloor n|f(x)|\rfloor, n\right)$$

נשים לב כי $f_n(x)$ מקבלת ערכים מהצורה $\frac{k}{n}$ עבור $|k| \le n$ (מספר סופי של ערכים) ונשים לב כי:

$$\{x \mid f_n(x) \ne 0\} \subset \left\{x \mid |f(x)| \ge \frac{1}{2}\right\} \subset \left\{x \mid g(x) \ge \frac{1}{n}\right\}$$

והקבוצה האחרונה היא בעלת מידה סופית מכיוון ש g אינטגרבילית.

לכן, f_n פשוטות אינטגרביליות, $|f_n(x)| \le |f(x)| \le g(x)$.

f_n כמובן מדידה.

בנוסף: $f_n \to f$ בכל מקום. מכיוון שאם $n > \frac{1}{\varepsilon}$ אזי:

$$\{x \mid |f(x) - f_n(x)| > \varepsilon\} \subset \{x \mid |f(x)| \ge n\}$$

לכן, עבור: $n > \max\left(\frac{1}{\varepsilon}, f(x)\right)$ נקבל כי: $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

ולכן: $f_n(x) \to f(x)$ לכל x (וקל להראות כי $f_n(x) \to f(x)$ במידה). ולכן לפי משפט ההתכנסות הנשלטת של לבג הסדרה $f_n(x)$ היא קושי בממוצע. ולכן f אינטגרבילית. ∎

בהנתן הטענה, ההגדרה שנתנו כי אם $f \ge 0$ מדידה אך לא אינטגרבילית אז $\int f := \infty$ יותר הגיונית.

בפרט, ההרחבה הזו של מושג האינטגרל מקיימת אם $g \ge f$ אז $\int g \ge \int f$. או באופן יותר כללי, הגדרנו עבור f כך ש: $f_+ = \max(f, 0)$ לא אינטגרבילית, $f_- = \max(-f, 0)$ אינטגרבילית אזי: $\int f \mathrm{d}\mu = \infty$.

משפט 9.3.31 משפט ההתכנסות המונוטונית

נניח f_n אינטגרביליות ו $f_n \uparrow f(x)$ כמעט תמיד. אזי: $\int f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int f_n(x)\,\mathrm{d}\mu$.

פרשנות: אם הגבול בצד ימין סופי, f אינטגרבילית ומתקיים השיוויון. אל הגבול בצד ימין ∞ אזי f לא אינטגרבילית ו $\int f = \infty$ במובן להעיל. **הוכחה:** נניח ראשית כי f אינטגרבילית, אזי כל ה$f_1 \le f_n \le f$ (כלומר הן חסומות מלמעלה ומלמטה ע"י אינטגרביליות. ולכן:

$$|f_n| \le \underbrace{\max(|f|, |f_1|)}_{\text{אינטגרבילית}}$$

ולכן, במקרה הנ"ל המשפט נובע ממשפט ההתכנסות הנשלטת.
נותר להראות כי א $\lim\limits_{n\to\infty}\int f_n<\infty$ אז f אינטגרבילית אם ה $\lim$ הנ"ל קיים.
נסמן: $a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\int f_n$. a_n היא סדרת קושי, אבל מכיוון ש $f_n\le f_m$ עבור $n\ge m$ מתקיים:

$$a_m-a_n=\int f_m-f_n\mathrm{d}\mu=\int|f_m-f_n|\,\mathrm{d}\mu$$

מכיוון ש $f_m-f_n\ge0$. לכן אם: $\lim\limits_{n\to\infty}\int f_n<\infty$ אז f_n סדרת קושי בממוצע. ולכן: $f_n\to g$ בממוצע. ובפרט: $f_n\to g$ במידה ולכן יש תת סדרה: $f_{n_k}\to g$ כמעט תמיד. אבל $f_{n_k}\to f$ כמעט תמיד לפי הנתון ולכן $f=g$ כמעט תמיד ולכן f אינטגרבילית. ■

19/12/2012

למה 9.3.32 הלמה של Fatou

$f_n\ge0$ אינטגרביליות. נניח כי: $\liminf\int f_n\mathrm{d}\mu<\infty$ אזי: $f=\liminf f_n$ אינטגרבילית ומתקיים:

$$\int\liminf f_n\mathrm{d}\mu\le\liminf\int f_n\mathrm{d}\mu$$

הוכחה: נגדיר: $g_n(x)=\inf\limits_{m\ge n}f_m(x)$. אזי g_n מונוטונית עולה ומתקיים:

$$\liminf_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}g_n(x)$$

כמו כן: $0\le g_n\le f_n$ ולכן g_n אינטגרבילית.
כמו כן:

$$\liminf_{n\to\infty}\int f_n\mathrm{d}\mu\ge\liminf_{n\to\infty}\int g_n\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int g_n\mathrm{d}\mu$$

מכאן, שאם: $\lim\limits_{n\to\infty}\int f_n\mathrm{d}\mu<\infty$ על פי משפט ההתכנסות המונוטונית: $f=\lim g_n$ אינטגרבילית ומתקיים:

$$\int f\mathrm{d}\mu=\lim\int g_n\mathrm{d}\mu\le\liminf\int f_n\mathrm{d}\mu$$

■

דוגמה 9.3.33 : ייתכן אי־שיוויון חזק (אפילו אם $f_n\to f$ כמעט תמיד). לדוגמה, ב $X=[0,1]$ ו m מידת לבג.
נקח את $f_n=n\chi\left(0,\frac{1}{n}\right)$ אז: $f_n\to0$ נקודתית. אז $f_n\to0$ נקודתית ו: $\int f_n=1$.
אם ניקח: $f_n=-n\chi_{\left(0,\frac{1}{n}\right)}$אז $f_n\to0$ נקודתית אבל מסקנת הלמה של Fatou לא מתקיימת:

$$0=\int\lim f_n>\liminf\int f_n=-1$$

$g_n=\inf\limits_{m\ge n}f_m(x)$.

$$g_n(x)=\begin{cases}-m & \frac{1}{m+1}<x<\frac{1}{x}\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

מהלמה של Fatou קל להסיק חזרה את משפט ההתכנסות הנשלטת. **הוכחה:** נניח $|f_n|<g$ וg אינטגרבילית. ו: $f_n\to f$ כמעט תמיד. נגדיר: $h_n=f_n+g$. נקבל כי $h_n\ge0$.

לכל n:

$$\int h_n \mathrm{d}\mu \leq 2\int g \mathrm{d}\mu$$

ולכן:

$$\liminf \int h_n \mathrm{d}\mu < \infty$$

לכן, על פי Fatou, הגבול:

$$h = \liminf h_n = g + f$$

אינטגרבילית ולכן f אינטגרבילית.

$$\int f = \int h - \int g \leq \liminf \int (f_n + g)\, \mathrm{d}\mu - \int g \mathrm{d}\mu = \liminf \int f_n \mathrm{d}\mu$$

איך נקבל את האי־שיוויון ההפוך? נפעיל את אותו טיעון על: $-f$ ו: $-f_n$. הכל חסום באותו אופן. ולכן נקבל כי:

$$-\int f \leq \liminf -\int f_n \mathrm{d}\mu \Rightarrow \int f \geq \limsup \int f_n \mathrm{d}\mu$$

ולכן נקבל כי:

$$\int f = \lim \int f_n \mathrm{d}\mu$$

מכיוון ש $\int f$ גדול מה $\limsup$ וקטן מה$\liminf$. ■

חלק V

מידות מסומנות ומשפט רדון ניקודין

פרק 10

מידות מסומנות

10.1 הקדמה

הגדרה 10.1.1 בהינתן (X,β) מרחב מדיד. על המרחב המדיד יש לנו $\nu:\beta\to\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$. ν תקרא מידה מסומנת אם:

1. $\nu(\varnothing)=0$.
2. σ־אדיטיביות.
3. ν יכולה לקבל לכל היותר ערך אחד מבין $+\infty$ ו $-\infty$.

דוגמה 10.1.2 : נתבונן ב(X,β,μ) מרחב מידה. ובהינתן g אינטגרבילית. נגדיר: $\nu(E)=\int_E g\mathrm{d}\mu$. זו מידה מסומנת, סופית (במובן של: $|\nu(E)|<\int|g|\,\mathrm{d}\mu$) ובנוסף: ν רציפה בהחלט ביחס לμ במובן שלכל ε יש δ כך שאם: $\mu(E)<\delta$ אז: $|\nu(E)|<\varepsilon$.

דוגמה 10.1.3 : נני חμ_1,μ_2 מידות. $\nu=\mu_1-\mu_2$ מידה מסומנת בתנאי שלכל היותר אחת מ μ_1,μ_2 אינה סופית.

25/12/2012

טענה 10.1.4

נשים לב כי אם ν מידה מסומנת ו: $|\nu(A)|<\infty$ ואם $B\subset A$ אזי: $|\nu(B)|<\infty$.

הוכחה: נסמן $C=A\backslash B$. אם $\nu(B)=\infty$ אזי $\nu(C)=\infty$ או סופי ולכן:

$$\nu(A)=\nu(B)+\nu(C)=\infty$$

בסתירה.

אם $\nu(B)=-\infty$ אזי $\nu(C)=-\infty$ או $\nu(C)$ סופי ולכן שוב מקבלים סתירה לאידיטביות. ולכן: $\nu(B)$ בהכרח סופית.

הערה 10.1.5 השתמשנו באדיטיביות של ν במובן ש: $\nu(C\dot\cup B)=\nu(C)+\nu(B)$.

כשמכיוון שלא ייתכן: $\nu(B)=+\infty$ ו: $\nu(C)=-\infty$. אז סיימנו. ∎

10.2 σ־אדיטיביות

נניח $E_1,E_2,\ldots$ סדרת קבוצות מדידות אזי:

$$\nu\left(\dot\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\nu(E_i)$$

מקרא: אם לאחד מהE_i־ים יש מידה ∞ אזי: $\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\infty$ וכנ"ל לגבי $-\infty$.

נניח שמתקיים כי לכל i מתקיים: $|\nu(E_i)|<\infty$. אבל עדיין יש כאן משהו מעניין, מכיוון שמדובר בטור לא חיובי. כלומר, מכיוון שהאיחוד על E_i־ים אינו תלוי בסדר של הE_i־ים אז אם צד שמאל סופי אז: $\sum_{i=1}^{\infty}|\nu(E_i)|$ מתכנס, כלומר הטור מתכנס בהחלט.

אם $\nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i\right)=\infty$ אז:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\infty}\max(0,\nu(E_i)) &= \infty\\ \sum_{i=1}^{\infty}\max(0,-\nu(E_i)) &< \infty\end{aligned}$$

הסיבה שהשני קטן מאינסוף, הוא מהדרישה למידה מסומנת. אחרת היינו לוקחים את כל הE_i־ים השליליים, והאיחוד שלהם היה נותן מידה $-\infty$ בסתירה לכך שלא מתקבל גם ∞ וגם $-\infty$.

טענה 10.2.1

נניח כי E_i סדרה מונוטונית של קבוצות מדידות. אם $E_i\uparrow E$ אז:

$$\nu(E)=\lim_{i\to\infty}\nu(E_i)$$

ואם: $E_i\downarrow E$ ויש i כך ש $|\nu(E_i)|<\infty$ אזי:

$$\nu(E)=\lim_{i\to\infty}\nu(E_i)$$

הוכחה: אם $E_i\uparrow E$ נסמן: $F_i=E_{i+1}\backslash E_i$ ו: $F_0=E_1$. אזי F_i סדרה של קבוצות מדידות זרות. אזי F_i סדרה של קבוצות מדידות זרות ומתקיים: $E=\bigcup_{i=0}^{\infty}F_i$. וכמו כן:

$$E_n=\bigcup_{i=0}^{n-1}F_i$$

לכן, מσ־אדיטיביות נובע:

$$\nu(E)=\sum_{i=0}^{\infty}\max(0,\nu(F_i))-\sum_{i=0}^{\infty}\max(0,-\nu(F_i))=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\nu(F_i)=\lim_{n\to\infty}\nu(E_n)$$

ובקרה של סדרה יורדת, אם $E_i\downarrow E$ ונניח $\nu(E_{i_0})<\infty$. נסמן ל $i>i_0$:

$$D_i=E_{i_0}\backslash E_i$$

ומתקיים:

$$D_i\uparrow E_{i_0}\backslash E$$

נבחין כי: $\nu(D_i)\to\nu(E_{i_0}\backslash E)$ אם $|\nu(E_{i_0})|<\infty$ אזי: $\nu(D_i)=\nu(E_{i_0})-\nu(E_i)$, אבל גם מתקיים: $\nu(E_{i_0}\backslash E)=\nu(E_{i_0})-\nu(E)$. ולכן מכך ש $\nu(D_i)\to\nu(E_{i_0}\backslash E)$ נובע כי: $\nu(E_i)\to\nu(E)$. ■

10.3 חיוביות על קבוצה

הגדרה 10.3.1 מידה מסומנת ν תקרא חיובית על קבוצה A אם לכל $B \subset A$ מדידה, מתקיים $\nu(B) \geq 0$.
כנ"ל ניתן להגדיר ν שלילית על קבוצה A.

הערה 10.3.2 אם ν חיובית על A נגדיר: $\nu_i(B) := \nu(A \cap B)$ אזי ν_i מידה.

10.3.1 משפט פירוק האן

משפט 10.3.3 משפט פירוק האן

אם ν מידה מסומנת, יש קבוצה מדידה A כך ש ν חיובית על A ושלילית על A^c.

הוכחה: $X = \{x_1, \ldots, x_N\}$סופי, $\mathcal{B} = \mathcal{P}(X)$.
מידה מסומנת:

$$\nu(A) = \sum_{i=1}^{N} c_i \delta_{x_i}(A)$$

כאשר: $C_i \in R \cup \{\pm\infty\}$ (ולא ייתכן שימוש בשני הסימנים $\pm\infty$).
במקרה זה, ניתן לבחור A כמו במפשט להיות כל קבוצה:

$$\{x_i \mid c_i > 0\} \subseteq A \subseteq \{x_i \mid c_i \geq 0\}$$

■

הערה 10.3.4 נשים לב כי:

$$\begin{aligned} \nu_+(B) &= \nu(B \cap A) \\ \nu_-(B) &= -\nu(B \backslash A) \end{aligned}$$

אזי ν_+, ν_- אינן תלויות בבחירת A.

הוכחה: בלי הגבלת הכלליות: $\nu(A) > -\infty$ לכל A (אחרת נקח את $-\nu$).
ננסה למצוא B שתהיה מועמדת להיות הקבוצה A^c מהטענה. ז"א, כך ש ν שלילית על B וחיובית על B^c. נגדיר:

$$\beta = \inf\{\nu(B) \mid B \text{ שלילית על } \nu\}$$

התנאי באינפימום הוא הרבה יותר חזק מלדרוש $\nu(B) < 0$ מכיוון שאנו גם דורשים שאין ל B אף תת קבוצה עם מידה חיובית.
מכיוון ש ν בוודאי שלילית על $\varnothing$ אז $\beta \leq \nu(\varnothing) = 0$.

טענה 10.3.5

$-\infty < \beta$.

הוכחה: נניח כי ν שלילית על B_i ומתקיים: $\nu(B_i) \to -\infty$. אזי אם נגדיר:

$$C_j = \bigcup_{i=1}^{j} B_i$$

נקבל כי:

$$\nu(C_j) = \nu(B_j) + \underbrace{\nu(B_{j-1} \backslash B_j)}_{\leq 0} + \ldots + \underbrace{\nu\left(B_1 \backslash \bigcup_{i=2}^{j} B_i\right)}_{\leq 0} \leq \nu(B_i)$$

ולכן, יש לנו סדרה מונוטונית עולה של קבוצות C_j כך ש: $\nu(C_j) \to -\infty$. ולכן:

$$\nu\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j\right) = \lim_{j\to\infty} \nu(C_j) = -\infty$$

בסתירה להנחה שν לא מקבלת את הערך $-\infty$. ■

לכן, $\beta \in (-\infty, 0]$. נבחר B_i כך ש ν שלילית עליהם ומתקיים: $\nu(B_i) \to \beta$.
נגדיר:

$$C_j = \bigcup_{i\le j} B_i$$

ν שלילית על C_j, $\beta \le \nu(C_i) \le \nu(C_j)$ ולכן אם נגדיר:

$$B = \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j$$

$$\beta \le \nu(B) = \lim_{j\to\infty} \nu(C_j) \le \beta$$

וזה המועמד שלו לקבוצה הרצויה.
מכיוון שC_j קבוצות עליהן ν שלילית אם $D \subset B$ מכיוון ש $C_j \uparrow B$ אז:

$$\nu(D) = \lim \nu(C_j \cap D) \le D$$

ולכן ν שלילית על B.
כעתת צריך להראות ש ν חיובית על B^c. נשים לב כי כך $D \subset B^c$ עליה ν שלילית מקיימת כי $\nu(D) = 0$. אחרת, כמובן, $B \cup D$ גם היא ν שלילית. ו:

$$\nu(B \cup D) = \nu(B) + \nu(D) < \nu(B) = \beta$$

בסתירה להגדרת β.
נניח בשלילה כי ν לא חיובית על $A = B^c$. לכן יש $C_1 \subset A$ כך ש $-\infty < \nu(C_1) < 0$.
מכיוון ש ν אינה שלילית על C_1 יש קבוצה $E \subset C_1$ עם $\nu(E) > 0$. נבחר E_1 כך ש

$$\nu(E_1) \ge \min\left\{1, \frac{1}{2}\sup\{\nu(E) \mid\ E \subset C_1\}\right\}$$

נגדיר: $C_2 = C_1 \backslash E_1$ ונקבל:

$$\nu(C_2) = \nu(C_1) - \nu(E_1) < \nu(C_1) < 0$$

ν אינה שלילית על C_2 ולכן נמצא E_2 כך ש:

$$\nu(E_2) \ge \min\left\{1, \frac{1}{2}\sup\{\nu(E) \mid\ E \subset C_2\}\right\} > 0$$

ממשיכים כך באינדוקציה, מקבלים קבוצות C_i, E_i כך ש $E_i \subset C_i$, $\nu(C_i) < 0$, $\nu(E_i) > 0$. כך ש: $C_{i+1} = C_i \backslash E_i$ ומתקיים:

$$\nu(E_i) \geq \min\left\{1, \frac{1}{2}\sup\{\nu(E) \mid \ E \subset C_i\}\right\}$$

נגדיר: $C = \bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$. נבחין כי: $C_i \downarrow C$. וגם: $\nu(C_i)$ סדרה מונוטונית יורדת לכן: $\nu(C_i) \downarrow \nu(C)$ ובפרט $\nu(C) < 0$.
ולכן:

$$0 > \nu(C) = \lim \nu(C_i)$$

מכיוון ש: $|\nu(C_1)| < \infty$ ו: $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \subset C_1$ אזי:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \nu(E_i) = \nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) < \infty$$

ולכן: $\nu(E_i) \to 0$.
ולכן, על־פי הבחירה של E_i:

$$\sup\{\nu(E) \mid \ E \subset C_i\} \to 0$$

כאשר $i \to \infty$.
לכן, אם E מדידה,

$$E \subset C = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$$

ומתקיים:

$$\nu(E) \leq 0$$

כן ν שלילית על C בסתירה. ∎

אם ν מידה מסומנת, A קבוצה שעליה ν חיובית כמו במשפט, נגדיר:

$$\begin{aligned} \nu_+(C) &= \nu(A \cap C) \\ \nu_-(C) &= -\nu(C \backslash A) \end{aligned}$$

נגדיר את $|\nu| = \nu_+ + \nu_-$ להיות ההשתנות המוחלטת על ν.
נשים לב כי:

$$|\nu|(C) \geq |\nu(C)| = |\nu_+(c) - \nu_-(C)|$$

נניח $X = A_1 \cup A_1^c$ גם פירוק האן. נניח $C \subset A \triangle A_1$ ו ν שלילית על C. בה"כ $C \subseteq A \backslash A_1$ (כי $C \subset A_1^C$) אזי $\nu(C) = 0$.

26/12/2012 הפירוק $\nu = \nu_+ - \nu_-$ נקרא פירוק ז'ורדן.

10.4 מידות סינגולריות

הגדרה 10.4.1 מידות סינגולריות: שתי מידות μ_1, μ_2 על אותו מרחב מדיד יקראו סינגולריות אחת ביחס לשניה אם יש קבוצה A כך ש: $\mu_2(A)=0$ ו: $\mu_1(A^c)=0$.
נסמן: $\mu_1\perp\mu_2$.

במקרה של מסומנות, נדרוש $|\mu_2|(A)=0$ ו: $|\mu_1|(A^c)=0$.
במילים אחרות, $\mu_1\perp\mu_2$ אם"ם $|\mu_1|\perp|\mu_2|$

דוגמה 10.4.2 : על פי ההגדרה, לכל מידה מסומנת ν מתקיים כי ν_+ ו ν_- סינגולריות אחת ביחס לשניה.

ראינו כי הפירוק $\nu=\nu_+-\nu_-$ הוא הדרך היחידה לכתוב את ν כהפרש שתי מידות סינגולריות אחת ביחס לשניה.
נניח: $\nu=\nu'_+-\nu'_-$ כך ש: $\nu'_+\perp\nu'_-$ אזי יש A_1 כך ש: $\nu'_+(A_1)=0$ ו: $\nu'_-(A_1^c)=0$.
אזי אם $E\subseteq A_1$:

$$\nu(E)=\nu'_+(E)-\cancelto{0}{\nu'_-(E)}$$

ולכן, ν חיובית על A_1, בדומה ν שלילית על A_1^c וגם מתקיים כי:

$$\begin{cases}\nu'_+(E)=\nu(E\cap A_1)\\ \nu'_-(E)=\nu(E\backslash A_1)\end{cases}\underbrace{\Longrightarrow}_{\text{הראנו בשיעור שעבר}}\begin{cases}\nu'_+=\nu_+\\ \nu'_-=\nu_-\end{cases}$$

כעת, נזכר כי אם f אינטגרבילית ראינו את העובדה:

$$\nu(E)=\int_E f\mathrm{d}\mu$$

רציפה בבהחלט ביחס לμ.

תזכורת 10.4.3 בעבר הגדרנו את רציף בהחלט באופן הבא: לכל $\varepsilon>0$ יש $\delta>0$ כך שאם: $|\mu|(E)<\delta$ אזי: $|\nu(E)|<\varepsilon$.

למעשה, מדובר ברציפות בהחלט במ"ש. בזמנו הדרישה הייתה מספיק טובה, כעת אנו רוצים קצת להעמיק. נרצה להגדיר מחדש את רציפות בהחלט:

הגדרה 10.4.4 רציפות בהחלט: נאמר כי ν רציפה בהחלט ביחס לμ אם לכל קבוצה E עם $|\mu|(E)=0$ מתקיים כי $\nu(E)=0$.
נסמן: $\nu\ll\mu$.

ראשית נבחין כי רציפות בהחלט במ"ש גוררת רציפות בהחלט (הוכחה טריוויאלית).

טענה 10.4.5

אם ν,μ מידות מסומנות ו ν סופית אזי רציפות בהחלט של ν ביחס ל μ גוררת רציפות בהחלט במידה שווה.

הוכחה: בה"כ μ,ν מידות. על דרך השלילה: נניח $\nu\ll\mu$ ונניח שיש $\varepsilon>0$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}$ יש קבוצה E_n עם $\nu(E_n)\geq\varepsilon$ ו: $\mu(E_n)<2^{-n}$.

הערה 10.4.6 קל לראות משתי ההגדרות כי μ,ν מידות מסומנות. $\nu\ll\mu$ אם"ם $(\nu_-\ll|\mu|\,,\ \nu_+\ll|\mu|)$ אם"ם $|\nu|\ll|\mu|$.
נראה את הגרירה הראשונה $\Leftarrow$ (כלומר נניח $\nu\ll\mu$ נראה $(\nu_-\ll|\mu|\,,\ \nu_+\ll|\mu|)$):
אם $X=A\cup A^c$ פירוק האן ל ν אזי אם: $|\mu|(E)=0$, $|\mu|(E\cap A)=0$, $|\mu|(E\cap A^c)=0$. ואז, מכיוון ש $\nu\ll\mu$ נקבל כי:

$$\nu(E\cap A)=0$$

אבל $\nu(E\cap A)=\nu_E(E)$ ולכן: $|\mu|(E)=0$ גורר $\nu_+(E)=0$ וגם $\nu_-(E)=0$.

נגדיר $F_n = \bigcup_{k\geq n} E_k$ אזי:

$$\mu\left(F_n\right) \leq \sum_{k\geq n} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

$\nu\left(F_n\right) \geq \varepsilon$. תהי $F = \bigcap F_n$ אזי $F_n \downarrow F$. אזי: $\nu\left(F\right) \downarrow \nu\left(F_n\right)$ לכן: $\nu\left(F\right) \geq \varepsilon$

$$0 \leq \mu\left(F\right) \leq \lim \mu\left(F_n\right) = 0$$

F סותרת את ההנחה $\nu \ll \mu$. ■

הערה 10.4.7 השתמשנו בסופיות ב: $\nu\left(F\right) \downarrow \nu\left(F_n\right)$ (ייתכן כי לכל n מתקיים $\nu\left(F_n\right) = \infty$ אבל $\nu\left(F\right) < \infty$).

דוגמה 10.4.8 : m מידת לבג על $\mathbb{R}$. ונגדיר: $\nu\left(E\right) = \int_E e^t \mathrm{d}t$.

(אם מעדיפים, נגדיר ν ע"י: $\nu\left(\left[a,b\right]\right) = \int\limits_a^b e^t \mathrm{d}t = e^b - e^a$).

קל להראות כי אם $m\left(E\right) = 0$ אי $\nu\left(E\right) = 0$ ולכן $\nu \ll m$. מאידך, לכל $\delta < 1$:

$$m\left(\left|\log\delta\right|, \left|\log\delta\right| + \delta\right)$$

לעומת זאת:

$$\nu\left(\left(\left|\log\delta\right|, \left|\log\delta\right| + \delta\right)\right) = \int\limits_{-\log\delta}^{-\log\delta+\delta} e^t \mathrm{d}t \geq \int\limits_{-\log\delta}^{-\log\delta+\delta} \frac{1}{\delta}\mathrm{d}t = 1$$

פרק 11

משפט רדון ניקודים

11.1 טענת המשפט

משפט 11.1.1 רדון ניקודים

בהינתן (X,β,μ) מרחב מידה σ־סופי. $\mu \gg \nu$ מידה מסומנת σ־סופית. אזי, בתנאים האלה יש f מדידה כך ש:

$$\nu(E)=\int_E f\mathrm{d}\mu$$

לכל קבוצה מדידה E. ו f יחידה עד כדי קבוצה בעלת מידה 0.

הערה 11.1.2 f לא בהכרח אינטגרבילית (היא כן אם לμ מידה סופית), אבל לפחות אחד מ f^+ או f^- אינטגרבילי.

01/01/2013
את השיעור היום מעביר המתרגל איליה חיוטין

מכיוון שאילון לא בארץ, אנו נעבור כעת לנוסה קצת שונה, ונחזור להוכחת המשפט בהמשך.

11.2 פונקציה קמורה

הגדרה 11.2.1 פונקציה $\varphi:(a,b)\to\mathbb{R}$ (מותר $a=-\infty$, $b=\infty$)
תקרא קמורה אם לכל $x,y\in(a,b)$ ולכל $0\le\lambda\le1$FormFcumpqkiim מתקיים:

$$\varphi((1-\lambda)x+\lambda y)\le(1-\lambda)\varphi(x)+\lambda\varphi(y)$$

באופן שקול ל: $a<s<t<u<b$ מתקיים:

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s}\le\frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t}$$

הערה 11.2.2 השקילות ניתנת ע"י: $y=(1-\lambda)s+\lambda u$ כאשר: $\lambda=\frac{t-s}{u-s}$.

11.2.1 תכונות של פונקציות קמורות

1. $\varphi:(a,b)\to\mathbb{R}$ קמורה $\Leftarrow$ רציפה. (לכל $[c,d]\subseteq(a,b)$ φT$[c,d]$ היא ליפשיץ על $[c,d]$).

הערה 11.2.3 $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ קמורה לאו דווקא רציפה. לדוגמה: הפונקציה הקבועה על אפס בקטע $[0,1]$ פרט לנקודה 1 שבוא היא מקבלת את הערך 1.

2. $\varphi:(a,b)\to\mathbb{R}$ גזירה $\Leftarrow$ φ קמורה אם"ם φ' מונוטונית עולה חלש.

3. ל$\varphi:(a,b)\to\mathbb{R}$ קמורה, הנגזרות הימניות והשמאליות הן קיימות בכל נקודה.

11.2.2 דוגמאות

1. $x\mapsto e^{x}$ קמורה.
2. $x\mapsto |x|$ קמורה (ויש מיתרים כנ"ל שממש מתלכדים עם הפונקציה.
3. $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ נקבל כי: $f(x)=x^{p}$ עבור: $p\geq 1$

11.3 מרחב הסתברות

הגדרה 11.3.1 מרחב מידה (Ω,Σ,μ) יקרא מרחב הסתברות אם: $\mu(\Omega)=1$.

משפט 11.3.2 א"ש Jensen

יהי (Ω,Σ,μ) מרחב הסתברות, בהינתן: (a,b) $f:\Omega\to$ (מותר גם $a=-\infty$ ו: $b=\infty$) אינטגרבילית, וכן: $\varphi:(a,b)\to\mathbb{R}$ קמורה אזי:

$$\varphi\left(\int_{\Omega}f\mathrm{d}\mu\right)\leq\int_{\Omega}\varphi\circ f\mathrm{d}\mu$$

הערה 11.3.3 φ קמורה ולכן: φ רציפה. ולכן: $\varphi\circ f$ מדידה.

הערה 11.3.4 אגף ימין מוגדר באופן מוכלל במובן:

$$\int_{\Omega}(\varphi\circ f)_{-}\,\mathrm{d}\mu<\infty$$

אזי נגדיר:

$$\int_{\Omega}\varphi\circ f\mathrm{d}\mu=\int_{\Omega}(\varphi\circ f)_{+}\,\mathrm{d}\mu=\int_{\Omega}(\varphi\circ f)_{-}\,\mathrm{d}\mu$$

$\varphi\circ f$ כנ"ל תכונה אינטגרבילית באופן מוכלל.

הערה 11.3.5 אגף שמאל מוגדר היטב כי:

$$a<b<f\Rightarrow a=\int_{\Omega}a\mathrm{d}\mu<\int_{\Omega}f\mathrm{d}\mu<\int_{\Omega}b\mathrm{d}\mu=b$$

מכיוון ש $\mu(\Omega)=1$.
ולכן:

$$\int_{\Omega}f\mathrm{d}\mu\in\underbrace{\mathrm{Domain}\varphi}_{\equiv(a,b)}$$

הוכחה: נסמן: $t=\int_{\Omega}f\mathrm{d}\mu$ ($a<t<b$).
נגדיר:

$$\beta=\sup_{a<s<t}\frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s}$$

הערה 11.3.6 זוהי למעשה הנגזרת השמאלית של φ ב t.

מתקיים ל $a<s<t$:

$$\frac{\varphi(t)-\varphi(s)}{t-s}\leq\beta\Rightarrow\varphi(t)-\varphi(s)-\beta(t-s)\leq 0$$

לכל $t<u<s$ מתקיים מקמירות φ כי:

$$\frac{\varphi(u)-\varphi(t)}{u-t}\geq\beta$$

ולכן:

$$\varphi(u)-\varphi(t)-\beta(u-t)\geq 0$$

כלומר:

$$\varphi(t)-\varphi(u)-\beta(t-a)\leq 0$$

ולכן, נסיק משני האי שיוויות שקיבלנו כי לכל $(a,b)\in S$ מתקיים:

$$\varphi(t)-\varphi(s)-\beta(t-s)\leq 0$$

כלומר:

$$\varphi(s)-\varphi(t)-\beta(s-t)\geq 0$$

ניקח: $s=f(x)$ לכל $x\in\Omega$ אזי קיבלנו כי:

$$\varphi(f(x))-\underbrace{\left[\varphi\left(\int_\Omega f\mathrm{d}\mu\right)+\beta\left(f(x)-\int_\Omega f\mathrm{d}\mu\right)\right]}_{g(x)}\geq 0$$

כלומר, נגדיר:

$$g(x)=\varphi(t)+\beta(f(x)-t)$$

$g(x)$ אינטגרבילית, בפרט:

$$\varphi\circ f-g\geq 0$$

ולכן:

$$(\varphi\circ f)_-\leq|g|\Rightarrow\int_\Omega(\varphi\circ f)_-\mathrm{d}\mu\leq\int_\Omega|g|\mathrm{d}\mu<\infty$$

בפרט, $g\circ f$ אינטגרבילית במובן המוכלל. נבצע אינטגרציה על:

$$\varphi(f(x))-\left[\varphi\left(\int_\Omega f\mathrm{d}\mu\right)+\beta\left(f(x)-\int_\Omega f\mathrm{d}\mu\right)\right]$$

ונקבל:

$$\int_\Omega \varphi \circ f \mathrm{d}\mu - \varphi\left(\int_\Omega f \mathrm{d}\mu\right) - \beta\cancelto{0}{\left(\int_\Omega f \mathrm{d}\mu - \int_\Omega f \mathrm{d}\mu\right)} \geq 0$$

כלומר:

$$\varphi\left(\int_\Omega f \mathrm{d}\mu\right) \leq \int_\Omega \varphi \circ f \mathrm{d}\mu$$

כנדרש. ■

חלק VI

מרחבי $\mathcal{L}^P$

פרק 12

מרחבי $\mathcal{L}^P$

12.1 הגדרה

הגדרה 12.1.1 (X,Σ,μ) מרחב מידה, $1\leq p<\infty$ (p מספר ממשי), $f:x\to\mathbb{R}$ מדדה.
נגדיר "נורמת" - P באופן הבא:

$$\|f\|_p=\left[\int_X |f|^p\,\mathrm{d}\mu\right]^{1/p}$$

נגדיר גם:

$$\mathcal{L}^p_\mu(X)=\left\{f:X\to\mathbb{R}\mid\ \|f\|_p<\infty\right\}$$

הגדרה 12.1.2 (X,Σ,μ) מרחב מידה, $f:X\to\mathbb{R}$ מדידה. נגדיר:

$$M_f=\{s\in\mathbb{R}\mid\ \mu(\{x\mid\ f(x)>s\})=0\}$$

אם $M_f=\varnothing$ נאמר : $\operatorname{ess\,sup} f=\infty$.
אחרת:

$$\operatorname{ess\,sup} f=\inf M_f$$

טענה 12.1.3

$f\leq\operatorname{ess\,sup} f$, μ־כמעט בכל מקום. באופן שקול:

$$s_0=\operatorname{ess\,sup} f\in M_f$$

הוכחה: ל $s_0=\infty$ טריוויאלי.
במקרים האחרים, נתבונן בקבוצה:

$$\mu(\{x\mid\ f(x)>s_0\})=\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x\mid\ f(x)>s_0+\frac{1}{n}\right\}\right)$$

(משוויון הקבוצות).

אבל:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x \mid \ f\left(x\right)>S_0+\frac{1}{n}\right\}$$

הוא איחוד בן־מניה של קבוצות ממידה 0 (כי לכל n מתקיים: $s_0+\frac{1}{n}\in M_f$) ולכן הוא ממידה אפס! כנדרש. ■

הגדרה 12.1.4 נגדיר:

$$\operatorname{ess\,inf} f=-\operatorname{ess\,sup}\left(-f\right)$$

הערה 12.1.5 אם $\left(X,\Sigma\right)$ מרחב מדיד, $f:X\to\mathbb{R}$ מדידה, אזי: $\operatorname{ess\,sup}\left(f\right)$ תלוי במידה שבוחרים.
למשל $X=\mathbb{R}$, $\Sigma=\mathcal{B}$ (σ־אלגברת בורל): $f\left(y\right)=y$.
לכל $x\in\mathbb{R}$ נגדיר את מידת Dirac: $\delta_x\left(A\right)=\begin{cases}1 & x\in A\\ 0 & x\notin A\end{cases}$ אזי:

$$\operatorname{ess\,sup}_{\delta_x} f=x$$

לחילופין, אם m מידת לבג, אזי: $\operatorname{ess\,sup}_m f=\infty$.

הערה 12.1.6 תמיד: $\operatorname{ess\,sup} f\leq\sup f$.

הערה 12.1.7 <u>**כתרגיל**</u>
אם $X=\left(a,b\right)$, σ־אלגברת לבג, $f:X\to\mathbb{R}$ רציפה, אזי (m מידת לבג):

$$\operatorname{ess\,sup}_m=\sup f$$

הגדרה 12.1.8 $\left(X,\Sigma,\mu\right)$ מרחב מידה, $f:X\to\mathbb{R}$ מדידה. נגדיר:

$$\left\|f\right\|_{\infty}=\operatorname{ess\,sup}_{\mu}\left|f\right|$$

כמו כן:

$$\mathcal{L}_{\mu}^{\infty}\left(x\right)=\left\{f:X\to\mathbb{R}\mid\ \left\|f\right\|_{\infty}<\infty\right\}$$

גם זה, כמו $\mathcal{L}^P$ קרוב מאוד להיות מרחב נורמי, רק יש לנו בעיה שהנורמה מחזירה אפס יותר לא רק באפס.

הגדרה 12.1.9 $\left(X,\Sigma,\mu\right)$ מרחב מידה, $f,g:X\to\mathbb{R}$ מדידות. נגדיר יחס שקילות: $f\overset{\mu}{=}g$ אם:

$$\mu\left(\left\{x\mid\ f\left(x\right)\neq g\left(x\right)\right\}\right)=0$$

טענה 12.1.10
(כתרגיל)

יחס השקילות $\stackrel{\mu}{=}$ מתחלף עם $\cdot,+$. כלומר, אם $f_1 \stackrel{\mu}{=} f_2$ ו: $g_1 \stackrel{\mu}{=} g_2$ כאשר $c \in \mathbb{R}$ אז:

$$\begin{aligned} f_1+g_1 &\stackrel{\mu}{=} f_2+g_2 \\ f_1\cdot g_1 &\stackrel{\mu}{=} g_2\cdot g_2 \\ cf_1 &\stackrel{\mu}{=} cf_2 \\ \int f_1\mathrm{d}\mu &= \int f_2\mathrm{d}\mu \\ \|f_1\|_p &= \|f_2\|_p \end{aligned}$$

לכל $1 \le p \le \infty$.

הגדרה 12.1.11

$$L_\mu^P = {}^{\mathcal{L}_\mu^P(x)}/_{\stackrel{\mu}{=}}$$

ונסמן זאת גם:

$$L^P(\mu) = L^p$$

12.2 אי שיוויני Minkowski & Holder

הגדרה 12.2.1 עבור: $1 < p,q < \infty$ אם: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ $(p+q\equiv pq)$ נאמר ש: (p,q) הם אקספוננטים צמודים.
בקשר הזה, אם נקח $p\to 1$ אז: $q\to\infty$. לכן גם: $(1,\infty)$ ו: $(\infty,1)$ אקספוננטים צמודים.

המקרה המרכזי הוא $p=q=2$.

משפט 12.2.2

אם p,q אקספוננטים צמודים, $1<p<\infty$. (X,Σ,μ) מרחב מידה. $f,g:X\to\mathbb{R}_{\ge 0}$ מדידות אז:

1. (אי שיוויון *Holder*):

$$\int_X fg\mathrm{d}\mu \le \left[\int_X f^p\mathrm{d}\mu\right]^{1/p}\left[\int_X g^q\mathrm{d}\mu\right]^{1/q}$$

לצרכינו: $\infty^{1/p}=\infty$ ו: $0=\infty\cdot 0$.
מקרה פרטי או: $p=q=2$ וזהו אי שיוויון *Cauchy-Schwartz*.

2. (אי שיוויון *Minkowski*):

$$\left[\int_X (f+g)^p\mathrm{d}\mu\right]^{1/p} = \left[\int_X f^p\mathrm{d}\mu\right]^{1/p} + \left[\int_X g^p\mathrm{d}\mu\right]^{1/p}$$

הוכחה:

1. יהיו A,B הכופלים באגף ימין. כלומר:

$$\begin{aligned} A &= \left[\int_X f^p\mathrm{d}\mu\right]^{1/p} \\ B &= \left[\int_X g^q\mathrm{d}\mu\right]^{1/q} \end{aligned}$$

אם $A=0$ אזי: $\int_X f^p \mathrm{d}\mu = 0$ ולכן: $f^p \overset{\mu}{=} 0$ – ולכן: $f \overset{\mu}{=} 0$. אבל אז בהכרח גם: $fg \overset{\mu}{=} 0$ ולכן: $\int_X fg \mathrm{d}\mu = 0$ ולכן האי שיוויון טריביאלי.

אם $A>0$ ו־$B=\infty$ אזי אגף ימין הוא אינסוף. ואז זה טריוויאלי, כי ברור שמה שלא יהיה באגף שמאל הוא יהיה קטן מאינסוף.

בעצם, מסמטריה נותרו המקרים שבהם $0<A,B<\infty$.

נגדיר:

$$F(x) = \frac{f}{A}$$
$$G(x) = \frac{g}{B}$$

אזי:

$$\int_X F^p \mathrm{d}\mu = 1$$
$$\int_X G^q \mathrm{d}\mu = 1$$

לכל $x \in X$, $0 < F(x), G(x)$ אזי:

$$F(x)G(x) = e^{\frac{1}{p}\log(F(x)^p)+\frac{1}{q}\log(G(x)^q)}$$

אבל הפונקציה: $\exp$ היא קמורה, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ולכן, עבור $\lambda = \frac{1}{p}$ נקבל:

$$\le \frac{1}{p}e^{\log F(x)^p} + \frac{1}{q}e^{\log G(x)^q} = \frac{1}{p}F(x)^p + \frac{1}{q}G(x)^q$$

נבחין כי אם $F(x)=0$ או $G(x)=0$ אזי הנ"ל נכון באופן טריוויאלי.

מאינטגרציה:

$$\int_X FG\mathrm{d}\mu = \frac{1}{p}\int_X F(x)^p \mathrm{d}\mu + \frac{1}{q}\int_X G(x)^q \mathrm{d}\mu = \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$$

נכפול ב AB ונקבל כי:

$$\int_X fg\mathrm{d}\mu \le AB$$

.2

$$(f+g)^p \underbrace{=}_{p>1} (f+g)(f+g)^{p-1} = f(f+g)^{p-1} + g(f+g)^{p-1}$$

מ Holder נקבל כי:

$$\int_X f(f+g)^{p-1}\mathrm{d}\mu \le \left[\int_X f^p \mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_X (f+g)^{(p-1)q}\mathrm{d}\mu\right]^{1/q}$$

וכנ"ל ל $g(f+g)^{p-1}$. נשים לב ש: $(p-1)q = p$.

מחיבור של תוצאות האינטגרלים הנ"ל (שקיבלנו מהולדר) נקבל כי:

$$\int_X (f+g)^p \mathrm{d}\mu \le \left\{\left[\int_X f^p \mathrm{d}\mu\right]^{1/p} + \left[\int_X g^p \mathrm{d}\mu\right]^{1/p}\right\} \cdot \underbrace{\left[\int_X (f+g)^p\right]^{1/q}}_{=C}$$

אם $0<C<\infty$ נחלק ב C ונקבל: $\left(1-\frac{1}{q}\right) = \frac{1}{p}$ ולכן נקבל באגף שמאל:

$$\left[\int_X (f+g)^p \mathrm{d}\mu\right]^{1/p} = \text{מה שצריך...}$$

אם $C=0$ אזי מהטיעון כמו קסדם: $f+g \overset{\mu}{=} 0$ ואז: $f \overset{\mu}{=} g \overset{\mu}{=} 0$. ולכן שני האברים באי־שיוויון מינקובסקי הם 0 ונכונים טריוויאלית.
אם שני האגפים הם אינסוף, אזי גם מינקובסקי נכון.
אם אגף ימין סופי, אזי אגף שמאל $\left[\int_X (f+g)^p \, \mathrm{d}\mu\right]$ סופרי ולכן $C<\infty$ וסיימנו.
הפונקציה: $t \mapsto t^p$ $(p>1)$ קמורה, לכן:

$$\left(\frac{f+g}{2}\right)^p \le \frac{1}{2}f^p + \frac{1}{2}g^p$$

לכן אגף ימין סופי:

$$\int f^p < \infty, \int g^p < \infty$$

ולכן:

$$\frac{1}{2^p}\int (f+g)^p \le \frac{1}{2}\int f^p + \frac{1}{2}\int g^p < \infty$$

ולכן: $\int (f+g)^p < \infty$ ולכן $C<\infty$ (מותר לחלק).

■

02/01/2013
גם את השיעור היום העביר המתרגל איליה.

הערה 12.2.3 $L^1, \mathcal{L}^1$ הם בדיוק המרחבים של הפונקציות האינטגרביליות:

$$\|f\|_1 = \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu$$

הרי f אינטגרבילית $\iff \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu < \infty$.

הערה 12.2.4 אנו הגדרנו את:

$$L^p_\mu (X, \mathbb{R})$$

התמונה של הפונקציה ב $\mathbb{R}$.
בד"כ מתכוונים: $L^p_\mu(X) = L^p_\mu(X, \mathbb{C})$.

מסקנה 12.2.5

(X, Σ, μ) מרחב מידה, לכל $1 \le p \le \infty$ ולכל $f,g : X \to \mathbb{R}$ מדידות וכאשר: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ אזי מתקיים:

1.
$$\|fg\|_1 \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q$$

2.
$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\| + p$$

הוכחה: עבור $1 < p < \infty$ אזי מדובר בדיוק באי־שיוויון Holder ו: Minkowski עבור $|f|, |g|$.
הבהרה ל2:

$$\left(\int_X |f+g|^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{1/p} \underbrace{\le}_{|f+g| \le |f|+|g|} \left(\int_X (|f|+|g|)^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{1/p}$$

ל $p=1$ נקבל כי:

1. $p=1$ סימטרי עם $p=\infty$ (מוכיחים ל1 מקבלים ל∞): נקבל:

$$\|fg\|_1=\int_X|f|\,|g|\,\mathrm{d}\mu \underbrace{\le}_{\substack{|g|\overset{\mu}{\le}\operatorname{ess\,sup}|g|=\|g\|_\infty \\ \mu\text{-כמעט בכל מקום}}} \int_X|f|\underbrace{\|g\|_\infty}_{\text{קבוע}}\mathrm{d}\mu=\int_X|f|\,\mathrm{d}\mu\cdot\|g\|_\infty=\|f\|_1\|g\|_\infty$$

2. נקבל כי:

$$\|f+g\|_1=\int_X|f+g|\,\mathrm{d}\mu \underbrace{\le}_{|f+g|\le|f|+|g|} \int_X(|f|+|g|)\,\mathrm{d}\mu=\|f\|_1+\|g\|_1$$

עבור $p=\infty$ אותה הוכחה.

■

מסקנה 12.2.6

$L^p_\mu(X)$ הוא מרחב נורמי מעל $\mathbb{R}$ עם נורמה: $\|\cdot\|_p$.
בפרט, $f,g\in L^p$, $a,b\in\mathbb{R}$ אזי:

$$af+bg\in L^p$$

הוכחה: קל לבדוק כי: $\|af\|_p=|a|\,\|f\|_p$.
במסקנה הקודמת הראינו את אי־שיוויון המשולש (ובפרט הוא מבטיח כי אם: $f,g\in L^p$ אזי: $\|f+g\|_p<\infty$ ולכן: $f+g\in L^p$.
ומכיוון שאנו עובדים עם מחלקות שקילות, נקבל כי:

$$\|f\|_p=0\iff f\overset{\mu}{=}0$$

■

12.3 מרחב בנך ומרחב הילברט

הגדרה 12.3.1 מרחב בנך: מרחב נורמי שהוא שלם ביחס למטריקה שהנורמה משרה נקרא מרחב בנך (Banach).

הגדרה 12.3.2 מרחב הילברט: מרחב מכפלה פנימית שהמרחב הנורמי שמתקבל מהנורמה:

$$\|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle}$$

הוא מרחב Banach נקרא מרחב Hilbert.

משפט 12.3.3

(X,Σ,μ) מרחב מידה. $1\le p\le\infty$ אזי: $L^p=L^p_\mu(x)$ הוא מרחב מטרי שלם ביחס למטריקה:

$$\mathrm{d}(f,g)=\|f-g\|_p$$

דהיינו, מרחב בנך.

✎ **דוגמה 12.3.4 :** $L^1_m([0,1])$. הדבר הנ"ל הוא בפירוש אינסוף מימדי.
כל הפונקציות הרציפות $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ נמצאות בו. (לשתי רציפות $g\overset{\mu}{=}f\Leftarrow g=f$ נקודתית).
אפשר בקלות לקבל קבוצה אין־סופית בת"ל.

הערה 12.3.5 התכנסות בנורמת $\|\cdot\|_p$: $f \xrightarrow[n\to\infty]{L_p} f_n$ כלומר: $\|f_n - f\|_p \to 0$ לא שקולה במקרה הכללי ליתר מושגי ההתכנסות שלמדנו.

הוכחה: נתחיל מ $1 \leq p < \infty$. תהי $\{f_n\}_n \subseteq L^p$ סדרת קושי (ביחס ל $\|\cdot\|_p$).
נקח תת סדרה $\{f_{n_i}\}_i$ שתקיים לכל i ש:

$$\left\|f_{n_{i+1}} - f_{n_i}\right\|_p < 2^{-i}$$

נגדיר:

$$g_k = \sum_{i=1}^{k} \left|f_{n_{i+1}} - f_{n-i}\right|$$

מאי־שיוויון המשולש, לכל k:

$$\|g_k\|_p \leq \sum_{i=1}^{n} \left\|f_{n_{i-1}} - f_{n_i}\right\|_p \leq \sum_{i=1}^{k} 2^{-1} \leq 1$$

נגדיר: $g : X \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ע"י:

$$g(x) = \lim_{k\to\infty} g_k(x)$$

בפרט, $\int_X g \mathrm{d}\mu$ מוגדר היטב (אולי אינסוף, לכל $a > 0$, $\infty \cdot a = \infty$, $\infty \cdot 0 = 0$).
לפי הלמה של Fatou, נקבל:

$$\int_X |g|^p \,\mathrm{d}\mu = \int_X \liminf_{k\to\infty} |g_k|^p \,\mathrm{d}\mu = \liminf \|g_k\|_p^p \leq 1$$

כלומר: $|g|^p$ סופית כמעט בכל מקום, משמע $g(x) < \infty$ כמעט בכל מקום.
דרך נוספת, שלמעשה שקולה:

$$E = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \; g(x) = \lim_{k\to\infty} g_k(x) = \infty\right\}$$

נניח בשלילה כי $\mu(E) > 0$.
בפרט לכל $x \in E$ קיים k_0 כך שלכל$k > k_0$ מתקיים: $g_k(x) \geq \frac{100}{\mu(E)}$. נרשום:

$$E = \bigcup_{k_0=1}^{\infty} \underbrace{\left\{x \in E \mid \; (\forall x \geq k_0) \; g_k(x) \geq \frac{100}{\mu(E)}\right\}}_{E_k}$$

נבחין כי: $E_k \subseteq E_{k+1}$ כלומר: $\mu(E_k) \to \mu(E)$ עבור: k_1 מספיק גדול:

$$\mu(E_{k_1}) \geq \frac{1}{2}\mu(E)$$

$$\|g_{k_1}\|_p^p = \int_X |g_{k_1}|^p \,\mathrm{d}\mu \geq \int_{E_{k_1}} |g_{k_1}|^p \,\mathrm{d}\mu \geq \int_{E_{k_1}} \frac{100}{\mu(E)} \mathrm{d}\mu = \frac{\mu(E_{k_1})}{\mu(E)} 100 \geq 50 > 1$$

סתירה לכך ש: $\|g_{k_1}\|_p^p \le 1$.

כלומר, קיבלנו ש $\{g_k\}_k$ מתכנסת μ־כמעט בכל מקום $\Leftarrow$ $\sum_{i=1}^{\infty}\left(f_{n_{i+1}}-f_{n_i}\right)$ מתכנס כמעט בכל מקום $\Leftarrow$ f_{n_i} מתכנסת כמעט בכל מקום (טור טלסקופי).

נגדיר: $f(x)=\lim_{i\to\infty} f_{n_i}$ לכל x שהגבול קיים ו: $f(x)=0$ איפה שהגבול לא קיים (קבוצה ממידה אפס).

לכל $\varepsilon>0$ קיים $N>0$ כך שלכל $n,m\ge N$ מתקיים: $\|f_n-f_m\|_p<\varepsilon$. כעת, נשתמש בלמה של Fatou ל $n\ge N$, $m=n_i$:

$$\underbrace{\|f-f_n\|_p^p}_{\text{אולי } \infty}=\int_X \liminf_{i\to\infty}|f_{n_i}-f_n|^p\,\mathrm{d}\mu \underbrace{\le}_{\text{Fatou}} \liminf_{i\to\infty}\int_X |f_{n_i}-f_n|^p\,\mathrm{d}\mu=\liminf_{i\to\infty}\|f_{n_i}-f_n\|_p^p\le\varepsilon^p$$

כלומר, הוכחנו כי: $f\in L^p$ וש: $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{L_p} f$.

עבור $p=\infty$:

תהי $\{f_n\}\subseteq L^\infty$ סדרת קושי. נסמן:

$$E_n=\{x \mid \ |f_n(x)|>\|f_n\|_\infty\}$$

וגם:

$$G_{n,m}=\{x \mid \ |f_n(x)-f_m(x)|>\|f_n-f_m\|_\infty\}$$

אלה קבוצות ממידה 0, ולכן:

$$B=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n\cup\bigcup_{s,t\in\mathbb{N}} G_{s,t}$$

ממידה אפס (איחוד בן־מניה).

על המשלים של B, $f_n(x)$ הן קושי במידה שווה וההוכחה כמו באינפי. ■

טענה 12.3.6

(X,Σ,μ) מרחב מידה, $1\le p<\infty$ אזי הפונקציות הפשוטות האינטגרביליות, $\mathcal{S}$, צפופות ב L^p.

הוכחה: $\mathcal{S}\subseteq L^p$ כי לכל $f=\sum b_i\chi_{B_i}\in\mathcal{S}$ מתקיים:

$$\|f\|_p^p=\sum|b_i|^p\mu(B_i)<\infty$$

אם $0\le f\in L^p$. בנינו בעבר: $\{f_n\}_n\subseteq\mathcal{S}$ של פשוטות מונוטונית עולות כ.ב.מ לf.

$$f_n=\sum_{k=0}^{2^n\cdot n}\frac{k}{2^n}\chi_{\left\{x\mid\ \frac{k}{2^n}\le f(x)<\frac{k+1}{2^n}\right\}}$$

לכל n: $|f_n|^p\le|f|^p$ ולכן: $\|f_n\|_p\le\|f\|_p<\infty$ ולכן: $|f_n|^p$ אינטגרבילית, כלומר: f_n אינטגרבילית.

נבחין כי:

$$|f_n-f|^p\le(|f_n|+|f|)^p\underbrace{\le}_{0\le f_n\le f}2^p|f|^p$$

אבל $2^p|f|^p$ אינטגרבילית כי $f\in L^p$. ממשפט ההתכנסות הנשלטת:

$$\lim\int_X|f_n-f|^p\,\mathrm{d}\mu=\int_X 0\mathrm{d}\mu=0$$

ולכן: $\|f_n-f\|_p\to 0$.

כעת, לפונקציה $f\in L^p$ נחלק: $f=f_+-f_-$ ואזי: $f_+,f_-\in L^p$ ולכן קיבלנו את הנדרש. ■

טענה 12.3.7

ניתן להגדיר מכפלה פנימית על L^2:

$$\langle f,g\rangle=\int_X fg\mathrm{d}\mu$$

בפרט: $\|f\|_2=\sqrt{\langle f,f\rangle}$. משמע: L^2 מרחב הילברט.

זה טריוויאלי, לכן לא נוכיח זאת.

טענה 12.3.8

יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה, Σ היא σ־אלגברה נוצרת בת־מניה (בפרט קיים חוג $R\subseteq\Sigma$ בן־מניה כך ש: $\Sigma=\sigma(R)$). ו X הוא σ־סופי, אזי: $L_\mu^p(X)$ ל $1\le p<\infty$ ספרבילי.

לפני שנוכיח את הטענה הזאת נרצה להוכיח את הלמה הבאה:

למה 12.3.9

יהי (X,Σ,μ) מרחב מידה σ־סופי. אזי קיימת $w:X\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ אינטגרבילית כך ש $w>0$ כמעט לכל x. אם נגדיר $\tilde{\mu}$ ע"י:

$$\mathrm{d}\tilde{\mu}=w\mathrm{d}\mu$$

אזי נקבל:

1. $\tilde{\mu}$ מידה סופית. $\mu\ll\tilde{\mu}$ (רציפה בהחלט ביחס ל μ וגם מתקיים $\tilde{\mu}\ll\mu$ מכיוון ש $\mathrm{d}\mu=\frac{1}{w}\mathrm{d}\tilde{\mu}$).
2. קיימת איזומטריה על $L_\mu^p(X)\mapsto L_{\tilde{\mu}}^p(X)$.

כאשר $1\le p<\infty$.

הוכחה: $\tilde{\mu}\ll\mu$ ראינו בתרגיל\שיעור.

כעת, נראה כי היא סופית. אבל נבחין כי:

$$\tilde{\mu}(x)=\int_X w\mathrm{d}\mu<\infty$$

מכיוון ש w אינטגרבילית.

נראה את 2.

איזומטריה היא טרנספורמציה לינארית בין מרחבים נורמיים. $T:A\to B$ שמשמרת נורמה. $\|T_x\|_B=\|x\|_A$. כמו כן, איזומטריה היא תמיד חח"ע, מכיוון ש:

$$x\in\ker T\iff\|T_x\|_B=0\iff\|x\|_A=0\iff x=0$$

כעת נבחין כי:

$$f\in L_{\tilde{\mu}}^p(X)\iff\int_X|f|^p w\mathrm{d}\mu<\infty\iff\int_X\left|fw^{1/w}\right|^p\mathrm{d}\mu<\infty$$

לכן, נגדיר את האיזומטריה:

$$f\mapsto fw^{1/p}\in L_\mu^p(X)$$

האיזומטריה היא על כי לכל $g\in L_\mu^p(X)$ $\frac{g}{w^{1/p}}$ תהיה שייכת ל $L_\mu^p(X)$.

בניית w:

$$X=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n$$

כאשר $\mu\left(E_n\right)<\infty$. נגדיר:

$$w=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{-n}}{\mu\left(E_n\right)+1}\chi_{E_n}$$

קל לראות כי $w>0$ כמעט בכל מקום. וכן: $\int w\mathrm{d}\mu\leq 1$. ■

כעת נוכיח את הטענה: **הוכחה:** מהלמה, מספיק להראות כי: $\mu\left(X\right)<\infty$.
נסתכל על:

$$M=\left\{B\in\Sigma\mid\ \exists\left\{A_n\right\}\subseteq R\ \chi_{A_n}\xrightarrow[n\to\infty]{L^p}\chi_B\right\}$$

ברור כי: $R\subseteq M$ (סדרות קבועות), אם $\left\{B_n\right\}_n\subseteq M$ ומתקיים $B_n\subseteq B_{n+1}$ לכל n או: $B_{n+1}\subseteq B_n$ לכל n אזי
קל לראות כי: $\chi_{B_n}\xrightarrow[n\to\infty]{L^p}\chi_B$ כאשר: $B=\bigcup\limits_n B_n$ אם B_n עולה. $B=\bigcap\limits_n B_n$ אם יורדת.
למשל אם $B_n\uparrow B$ אזי:

$$\left\|\chi_{B_n}-\chi_B\right\|_p^p=\int_X\left|\chi_{B_n}-\chi_B\right|^p\mathrm{d}\mu=\int_X\left|\chi_{B\backslash B_n}\right|^p\mathrm{d}\mu=\mu\left(B\backslash B_n\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

עכשיו תהי $\left\{A_{n,k}\right\}_k$ ששואפת $\chi_{A_{n,k}}\xrightarrow[k\to\infty]{L^p}\chi_{B_n}$.

מטיעון האלכסון: ניקח k_n כך ש $\left\|\chi_{A_{n,k}}-\chi_{B_n}\right\|_p<2^{-n}$ ונקבל: $\chi_{A_{n,k_n}}\xrightarrow[n\to\infty]{L^p}\chi_B$ כלומר: $B\in M$.
כלומר $M\subseteq\Sigma$, מחלקה מונוטונית. $R\subseteq M$. $\Sigma=\sigma\left(R\right)\Leftarrow$ וממשפט המחלקה המונוטונית: $M=\Sigma$.
ובכך, קיבלנו שלכל $B\in\Sigma$ מתקיים ש: $\chi_B\in\overline{\left\{\chi_A\mid A\in R\right\}}$ ב L^p.
לפונקציה פשוטה: $f=\sum\limits_{i=1}^{r}b_i\chi_{B_i}$ נקח: $\left\{A_{i,n}\right\}_n\subseteq R$ כך ש: $\chi_{A_{i,n}}\xrightarrow{L^p}\chi_B$ וניקח: $\left\{q_{i,n}\right\}_n\subseteq\mathbb{Q}$.
כך ש $q_{i,n}\to b_i$ נקבל:

$$f=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{r}q_{i,n}\chi_{A_i,n}$$

כאשר הגבול ב L^p. אזי כל פונקציה פשוטה בסגור של:

$$\mathcal{S}_0=\left\{\sum_{i=1}^{r}q_i\chi_{A_i}\mid\ r\in\mathbb{N}\ (\forall i)\ q_i\in\mathbb{Q},\ A_i\in\mathbb{R}\right\}$$

קיבלנו כי:

$$L^p=\overline{\mathcal{S}}=\overline{\mathcal{S}}_0$$

ולכן ספרבילי. ■

08/01/2013

פרק 13

הוכחת רדון ניקודין

13.1 תזכורת

הגדרנו:

הגדרה 13.1.1 $\mu \ll \nu$ אם לכל קבוצה E עם $|\mu|(E)=0$ מתקיים: $\nu(E)=0$.

אםν מידה סופית, הראינו כי תכונה זו שקולה לכך שלכל $\varepsilon>0$ יש $\delta>0$ כך שאם: $|\mu|(E)<\delta$ אז $|\nu(E)|<\varepsilon$.

13.2 משפט רדון ניקודין והוכחתו

משפט 13.2.1

μ מידה σ־סופית, $\mu \ll \nu$ אזי יש פונקציה מדידה f כך שלכל E מדידה:

$$\nu(E)=\int_E f\mathrm{d}\mu$$

הערה 13.2.2 ליתר דיוק, אם $\nu(E)$ סופית, אזי $f\chi_E$ אינטגרבילית ומתקיים השיוויון. אם $\nu(E)=+\infty$ אזי $f_{-}\chi_E$ אינטגרבילית ו $f_{+}\chi(E)$ לא אינטגרבילית (אבל כמובן מדידה).

הוכחה: בלי הגבלת הכלליות, μ,ν סופיות. מכיוון שיש: $X=\dot{\bigcup}_{n=1}^{\infty} X_n$ כך שגם ν וגם μ סופית על כל X_i.

נגדיר: $\mu_i(E)=\mu(X_i\cap E)$ זו מידה סופית. וכמו כן, נגדיר: $\nu_i(E)=\nu(X_i\cap E)$, זו מידה מסומנת סופית.

נניח ש: $\mu_i(E)=0$ לכן נקבל כי: $\mu(E\cap X_i)=0$ ולכן: $\nu(E\cap X_i)=0$ כלומר: $\nu_i(E)=0$.

ולכן: $\mu_i \ll \nu_i$ אם נוכיח את המשפט עבור מידות סופית נדע כי: $\nu_i(E)=\int_E f_i\mathrm{d}\mu_i$ לכל E.

נגדיר f מדידה ע"י:

$$\begin{aligned} f(x) &= f_i(x) \text{ if } x\in X_i \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} f_i\chi_{X_i}(x) \end{aligned}$$

בדיקה מראה כי אם לכל i מתקיים $\nu_i(E)=\int_E f_i\mathrm{d}\mu_i$ אז נקבל את $\nu(E)=\int_E f\mathrm{d}\mu$.

μ מידה סופית. ν מידה מסומנת סופית.$\mu \ll \nu$. ז"א: $\mu \ll \nu_{+},\nu_{-}$.

אם נציג:

$$\begin{aligned} \nu_{+}(E) &= \int_E f_{+}\mathrm{d}\mu \\ \nu_{-}(E) &= \int_E f_{-}\mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

אזי: $f=f_+-f_-$ תקיים את המשפט, ולכן, נבצע רדוקציה נוספת: בלה"כ נניח כי ν מידה.
נתבונן באוסף:

$$\mathcal{F}=\left\{ f \text{ אינטגרבילית ביחס ל} \mu \mid \int_E f\mathrm{d}\mu\le\nu\left(E\right) \text{ לכל } E \text{ מדידה}\right\}$$

זהו אוסף לא ריק של פונקציות (כי $0\in\mathcal{F}$) תהי:

$$\alpha=\sup\left\{ \int_X f\mathrm{d}\mu\mid\ f\in\mathcal{F}\right\}$$

הערה 13.2.3 נשים לב כי $\alpha\le\nu\left(X\right)$.

נשים לב כי אם: $f,g\in\mathcal{F}$ אזי גם: $\max\left(f,g\right)\in\mathcal{F}$. תהי E כלשהי. נסמן:

$$\begin{aligned}E_1 &= E\cap\left\{ x\mid\ f>g\right\} \\ E_2 &= E\cap\left\{ x\mid\ f\le g\right\} \end{aligned}$$

אזי:

$$\nu\left(E\right)=\nu\left(E_1\right)+\nu\left(E_2\right)\ge\int_{E_1}f\mathrm{d}\mu+\int_{E_2}g\mathrm{d}\mu=\int_E\max\left(f,g\right)$$

לכן, אם $g_n\in\mathcal{F}$ מקיימות כי:

$$\int_X g_n\mathrm{d}\mu\to\alpha$$

אזי גם: $f_n=\max\left(g_1,\ldots,g_n\right)$ תקיים:

$$\int_X f_n\mathrm{d}\mu\to\alpha$$

אבל נבחין כי זו כבר סדרה מונוטונית! לכן, ממשפט ההתכנסות המונוטונית: $f=\lim\limits_{n\to\infty}f_n$ אינטגרבילית. ומתקיים:

$$\int_X f\mathrm{d}\mu=\alpha$$

בנוסף, ממשפט ההתכנסות המונוטונית, לכל E מדידה:

$$\int_E f\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int_E f_n\mathrm{d}\mu\le\nu\left(E\right)$$

ולכן: $f\in\mathcal{F}$.
לכן, יש ב $\mathcal{F}$ איבר מקסימלי f (אם $f_1\in\mathcal{F}$ אזי: $f_1\le qf$ בפרט לקבוצה בעלת מידה 0).

תרגיל: נניח $g\ge f$ וגם: $\mu\left(\left\{ x\mid\ f\left(x\right)>g\left(x\right)\right\} \right)>0$ אזי: $\int f>\int G$.

סיכום ביניים: יש לנו $\tilde{f}\in\mathcal{F}$ כך ש: $\int\tilde{f}\mathrm{d}\mu=\alpha$.

נסמן: $\nu_1(E)=\nu(E)-\int_E\tilde{f}\mathrm{d}\mu$. מכיוון ש $\tilde{f}\in\mathcal{F}$ זו מידה (לא מסומנת!) על X. בנוסף, $\nu_1\ll\mu$.

כעת, נוכיח את הלמה הבאה:

למה 13.2.4

μ היא מידה סופית, ו ν_1 מידה סופית. ו: $\nu_1\ll\mu$. כמו כן: ν_1 אינה מנוונת (אינה מידת האפס).
אזי יש $\varepsilon>0$ וקבוצה A עם $\mu(A)>0$ כך ש: $\nu-\varepsilon\mu$ חיובית על A.

ראשית, נניח את הלמה, ונסיים את ההוכחה בעזרה.

נניח בשלילה כי $\nu_1\neq 0$, לפי הלמה יש A,ε כך ש: $\nu_1-\varepsilon\mu$ חיובית על A. ז"א, שלכל קבוצה $E\subset A$ מתקיים: $\nu_1(E)\geq\varepsilon\mu(E)$. ולכן:

$$\nu_1(E)\geq\nu_1(E\cap A)\geq\varepsilon\mu(E\cap A)=\varepsilon\int_E\chi_A\mathrm{d}\mu$$

אבל אז, אם נגדיר:

$$\nu(E)=\nu_1(E)+\int_E\tilde{f}\mathrm{d}\mu\geq\int_E\left(\tilde{f}+\varepsilon\chi_A\right)\mathrm{d}\mu$$

אזי: $\tilde{f}+\varepsilon\chi_A\in\mathcal{F}$. מאידך, מכיוון ש $\mu(A)>0$ אזי:

$$\int_X\tilde{f}+\varepsilon\chi_A\mathrm{d}\mu>\int_X\tilde{f}=\alpha$$

בסתירה להגדרה של α.

כעת נוכיח את הלמה: **הוכחה:** נשתמש בפירוק האן ל $\nu_1-\frac{1}{n}\mu$. נניח ש $\nu_1-\frac{1}{n}\mu$ חיובית על A_n ושלילית על $A_n^c=B_n$. הלי הגבלת הכלליות:

$$\begin{aligned}A_1&\subseteq A_2\subseteq A_3\ldots\\B_1&\supseteq B_2\supseteq B_3\ldots\end{aligned}$$

נתבונן ב $B=\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n$. על B נקבל כי: $\nu_1-\frac{1}{n}\mu$ שלילית על כל n. בפרט:

$$\nu_1(B)\leq\frac{1}{n}\mu(B)$$

לכל n. ולכן: $\nu_1(B)=0$. מכאן, ש: $\nu_1\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)>0$. מכיוון ש $\nu\ll\mu$ אזי: $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)>0$. מכאן, שיש n כך ש: $\mu(A_n)>0$, ז"א, יש קבוצה $A=A_n$ עם $\mu(A)>0$ כך ש: $\nu_1-\frac{1}{n}\mu$ חיובית על A. ■

הוכחת הלמה כאמור מסיימת את ההוכחה. ■

13.3 מסקנות מהמשפט

הערה 13.3.1 לגבי היחידות:
בתרגיל ראינו שאם f אינטגרבילית על (X,β,μ) ואם: $\int_E f\mathrm{d}\mu=0$ אזי: $f=0$ כמעט תמיד.

מהמשפט נובע כי אם E קבוצה בעלת $|\nu(E)|<\infty$ ו: $f\chi_E$ אינטגרבילית. אילו הייתה עוד פונקציה, נאמר f_1, שמקיימת את מסקנת המשפט אזי: $f_1\chi_E$ תהיה אינטגרבילית ולכל קבוצה F:

$$\nu(F)=\int_F f_1\chi_E=\int_F f\chi_E$$

ולכן:

$$\mu\left(\{x \mid f(x) \neq f_1(x)\} \cap E\right) = 0$$

מכיוון ש ν היא σ־סופית, ניתן להציג: $X = \dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} E_i$. כעת $\nu(E_i)$ סופי ולכן:

$$\{x \mid f(x) \neq f_1(x)\} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(\{x \mid f(x) \neq f_1(x)\} \cap E_i\right)$$

וזהו איחוד בן מניה של קבוצות עם מידה אפס. ומש"ל יחידות.

לכן: $\mu \gg \nu$ קובעים את f עד כדי קבוצה בעלת מידה 0, נסמן פונקציה זו ב:

$$f = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$$

מכיוון ש: $\int_E \left(\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}\right) \mathrm{d}\mu = \nu(E)$ $\Leftarrow$ לכל פונקציה פשוטה g:

$$\int_E g\left(\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}\right) \mathrm{d}\mu = \int g \mathrm{d}\nu$$

אם $g \geq 0$ אינטגרבילית לפי ν וניקח: $g_n \uparrow g$ סדרה של פונקציות פשוטות אזי:

$$\begin{array}{ccc} \int g_n \left(\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}\right) \mathrm{d}\mu & \underbrace{=}_{\text{רדון ניקודין}} & \int g_n \mathrm{d}\nu \\ \downarrow & & \downarrow \\ \int g \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} \mathrm{d}\mu & = & \int g \mathrm{d}\nu \end{array}$$

מסקנה 13.3.2

אם ν, μ מידות σ־סופיות, $\mu \gg \nu$ ו $g \geq 0$ אינטגרבילית ביחס ל ν אזי: $g\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$ אינטגרבילית ביחס ל μ ומתקיים:

$$\int g \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} \mathrm{d}\mu = \int g \mathrm{d}\nu$$

מסקנה 13.3.3 (מהמסקנה)

כל מה שאמרנו בחלק זה נכון ל g כללית ו ν מידה מסומנת.

הגדרה 13.3.4 $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu}$ נקראת נגזרת רדון ניקודין.

13.4 שימושים

$(X, \mathcal{B}, \mu)$ מרחב מידה σ־סופי.

לכל $\infty \geq p \geq 1$ הגדרנו מרחב בנך: $L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ (כל הפונקציות המדידות כך ש: $\int |f|^p \mathrm{d}\mu < \infty$ כדי זיהוי פונקציות ששונות רק בקבוצה בעלת מידה 0).

אם $V, \|\cdot\|$ מרחב בנך, אזי פונקציונל לינארי $F : V \to \mathbb{R}$ נקרא חסום אם יש C כך ש:

$$\|F(v)\| \leq C \|v\|$$

לכל $v\in V$ ו:

$$\|F\|:=\sup_{v\in V\setminus\{0\}}\frac{\|F(v)\|}{\|v\|}$$

הנורמה האופרטורית.

ראינו גם כי אם: $f\in L^{q}(X,\mathcal{B},\mu)$ כך ש: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ אזי:

$$F(g)=\int gf\mathrm{d}\mu$$

פונקציונל לינארי חסום על L^{p}, מתקיים: $\|F\|\leq\|f\|_{q}$. הבחירה של:

$$g=\operatorname{sgn}(f)|f|^{\frac{q}{p}}$$

נותנת פונקציה g עם:

$$\|g\|_{p}^{q}=\|f\|_{q}^{q}\Rightarrow\|g\|_{p}=\|f\|_{q}^{\frac{q}{p}}$$

$$F(g)=\int|f|^{1+\frac{q}{p}}\mathrm{d}\mu=\int|f|^{q}\mathrm{d}\mu=\|f\|_{q}^{q}=\|f\|_{q}\|g\|_{p}$$

המעבר מכיוון ש:

$$1+\frac{q}{p}=q\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{p}\right)=q$$

ולכן:

$$\|F\|=\|f\|_{q}$$

משפט 13.4.1 משפט ההצגה של ריס

אם $1\leq p<\infty$, כל פונקציונל לינארי חסום $F:L^{p}\to\mathbb{R}$ נתון ע"י $F(g)=\int fg\mathrm{d}\mu$, עבור $f\in L^{q}$ (כאשר $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$).

לכן, ניתן לזהו את L^{q} עם המרחב הדואלי של L^{p}.

תזכורת 13.4.2 אנו מניחים ש $(X,\mathcal{B},\mu)$ הוא σ־סופי.

9.1.13 **הוכחה:** למען הפשטות, נוכיח ל: $(X,\mathcal{B},\mu)$ סופי, המעבר ל: $(X,\mathcal{B},\mu)$ σ־סופי לא דורש רעיונות נוספים.

נגדיר $\nu(E)=F(\chi_{E})$. ראשית, $|\nu(E)|<\infty$ לכל E:

$$|\nu(E)|=|F(\chi_{E})|\leq\|F\|\|\chi_{E}\|_{p}=\|F\|\left(\int_{X}\chi_{E}d\mu\right)^{\frac{1}{p}}=\|F\|\mu(E)^{\frac{1}{p}}$$

שנית, ν אדיטיבית סופית מלינאריות F:

$$\nu(E_{1}\dot{\cup}E_{2})=F(\chi_{E_{1}\dot{\cup}E_{2}})=F(\chi_{E_{1}}+\chi_{E_{2}})=\nu(E_{1})+\nu(E_{2})$$

שלישית, ν σ־אדיטיבית: עבור $E=\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$ איחוד זר, לכל ε יש N כך ש־$\mu\left(E\backslash\bigcup_{i=1}^{N}E_i\right)<\varepsilon$, ולכן:

$$\left|\nu\left(E\right)-\nu\left(\bigcup_{i=1}^{N}E_i\right)\right|=\left|\nu\left(E\backslash\bigcup_{i=1}^{N}E_i\right)\right|\leq\left\Vert F\right\Vert \varepsilon^{\frac{1}{p}}$$

ולכן $\sum_{i=1}^{\infty}\nu\left(E_i\right)=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\nu\left(E_i\right)=\lim_{N\to\infty}\nu\left(\bigcup_{i=1}^{N}E_i\right)=\nu\left(E\right)$.

כלומר, ν מידה מסומנת סופית על X, עם $\mu\gg\nu$ - ישירות מההגדרה, אפילו יש לנו הערכה מפורשת $\left|\nu\left(E\right)\right|\leq\left\Vert F\right\Vert \mu\left(E\right)^{\frac{1}{p}}$.

ממשפט רדון ניקודין, יש f אינטגרבילית (או $f\in L_{\mu}^{1}\left(X\right)$) כך ש־$\nu\left(E\right)=\int_E fd\mu$ לכל E. לכן, לכל פונקציה פשוטה $g=\sum_{i=1}^{n}c_i\chi_{E_i}$ מתקיים כי:

$$F\left(g\right)=\sum c_iF\left(\chi_{E_i}\right)=\sum c_i\nu\left(E_i\right)=\int f\sum c_i\chi_{E_i}d\mu=\int fgd\mu$$

נותר להראות ש־$f\in L^{q}\left(\mu\right)$. אם נראה זאת, אזי ינבע כי $g\mapsto\int fgd\mu$ היא פונקציונל רציף על $L^{p}\left(\mu\right)$, ולכן מקיום $(\star)$ (השוויון בשאלה) על תת־מרחב צפוף של L^{p} (ראינו כי הפונקציות הפשוטות צפופות ב־L^{p}, לטענתנו), נובע כי $(\star)$ מתקיים תמיד.

ניקח $f_n\geq0$ פשוטות כך ש־$0\leq f_n\left(x\right)\leq\left|f\left(x\right)\right|$ לכל x, עם $f_n\left(x\right)\nearrow\left|f\left(x\right)\right|$ לכל x. נגדיר $g_n\left(x\right)=\operatorname{sgn}\left(f\left(x\right)\right)f_n\left(x\right)^{\frac{q}{p}}$. אזי:

$$\begin{aligned}F\left(g_n\right) & \leq \left\Vert F\right\Vert \left\Vert g_n\right\Vert _p=\left\Vert F\right\Vert \left(\int\left|g_n\right|^{p}d\mu\right)^{\frac{1}{p}}=\left\Vert F\right\Vert \left(\int\left|f_n\right|^{q}d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\\ F\left(g_n\right) & = \int g_n\left(x\right)f\left(x\right)dx=\int f_n^{\frac{q}{p}}\left|f\left(x\right)\right|d\mu\geq\int f_n\left(x\right)^{\frac{q}{p}+1}d\mu=\int f_n\left(x\right)^{q}d\mu\end{aligned}$$

כלומר:

$$\begin{aligned}\int f_n^{q}d\mu & \leq \left\Vert F\right\Vert \left(\int\left|f_n\right|^{q}d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\\ \int f_n^{q}d\mu & \leq \left\Vert F\right\Vert ^{\frac{1}{1-\frac{1}{p}}}=\left\Vert F\right\Vert ^{q}\end{aligned}$$

ממשפט ההתכנסות המונוטונית:

$$\int\left|f\right|d\mu=\lim_{n\to\infty}\int f_n^{q}d\mu\leq\left\Vert F\right\Vert ^{q}<\infty$$

■

נניח ש־X מרחב מטרי קומפקטי (נניח $X=[0,1]$), עם $\mathcal{C}\left(X\right)$ הפונקציות הרציפות על X.

בנורמת ה־sup ($\left\Vert f\right\Vert _{\infty}=\sup_{x\in X}\left|f\left(x\right)\right|$), המרחב הזה נהיה מרחב בנך (ספרבילי).

משפט 13.4.3 גם משפט ההצגה של ריס

הפונקציונלים הלינאריים החסומים על $\mathcal{C}\left(X\right)$ נתונים על ידי:

$$f\mapsto\int fd\nu$$

כאשר ν מידה מסומנת סופית על $\left(X,\mathcal{B}\right)$ עם $\mathcal{B}$ σ־אלגברת בורל.

נסיק את המשפט מהמשפט (המקרה הפרטי) הבא (עם קצת הגדרות לפניו):

הגדרה 13.4.4 פונקציונל לינארי $F:\mathcal{C}\left(X\right)\to\mathbb{R}$ יקרא **חיובי** אם $F\left(f\right)\geq0$ לכל $f\geq0$.

טענה 13.4.5

אם F חיובית אז היא בהכרח חסומה.

הוכחה: נניח $|f| \leq M$, אזי

$$0 \leq F(f+M) = F(f) + MF(1) \Longrightarrow F(f) \geq -MF(1)$$

וגם

$$0 \leq F(-f+M) = -F(f) + MF(1) \Longrightarrow F(f) \leq MF(1)$$

כלומר:

$$|F(f)| \leq F(1) \|f\|_\infty$$

■

משפט 13.4.6 *עוד* משפט הצגה של ריס

הפונקציונלים החיוביים $F : \mathcal{C}(X) \to \mathbb{R}$ נתונים על ידי:

$$F(f) = \int f d\nu$$

עבור ν מידה סופית.

15/01/2013

טענה 13.4.7

נניח X מרחב מטרי קומפקטי, μ מידת בורל סופי. אזי לכל $A \in \mathcal{B}$:

$$\sup\{\mu(K) \mid K \subset A\} = \mu(A) = \inf\{\mu(U) \ \ U \supset A \text{ פתוחה}\}$$

כאשר K קומפקטית.

הוכחה: בהוכחה של משפט ההצגה, עשינו שימוש בחוג R של $\{$איחודים סופיים, Uפתוחה, Fסגורה $\mid U \cap F\}$. נראה כי:

$$\sup\{\mu(K) \mid K \subset A\} = \mu(A) = \inf\{\mu(U) \ \ U \supset A \text{ פתוחה}\}$$

מתקיים לכל קבוצה מהצורה הזו.

נניח $A = U \cap F$ אזי:

$$U_n = U \cap \left\{x \mid \ \mathrm{d}(x,F) < \frac{1}{n}\right\}$$

$U_n \downarrow A$ ולכן: $\mu(U_n) \downarrow \mu(A)$ ולכן השיוויון הימני מתקבל. השיוויון השני מתקבל באותה בצורה. ■

אוסף הקבוצות: $\mathcal{C} = \{A \in \mathcal{B} \mid$ מקיימת את התנאי מהטענה$A\}$ סגור מונוטונית.

נניח $A_n \in \mathcal{C}$, $A_n \downarrow A$. נבדוק את השיוויון הימני עבור A. מכיוון ש $A_n \downarrow A$ אזי: $\mu(A_n) \downarrow \mu(A)$ לכן יש n שעבור ε נתון נתקיים: $\mu(A_n) < \mu(A) + \varepsilon$.

$A_n \in \mathcal{C}$, ולכן יש U כך ש $A_n \subset U$ ומתקיים: $\mu(U) < \mu(A_n) + \varepsilon$. לכן: $\mu(U) < \mu(A) + 2\varepsilon$ ומתקיים השיוויון הימני.

כעת נניח $A_n \uparrow A$. נמצא U_n כך ש $\mu(U_n) < \mu(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$. אזי:

$$\mu(U_n \backslash A_n) < \frac{\varepsilon}{2^n} \Rightarrow \mu(U_n \backslash A) < \frac{\varepsilon}{2^n}$$

ולכן:

$$A = \bigcup A_n \subset \bigcup U_n$$

ולכן:

$$\bigcup U_n = A \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (U_n \backslash A)$$

ונקבל:

$$\mu\left(\bigcup U_n\right) \leq \mu(A) + \sum \mu(U_n \backslash A) < \mu(A) + \varepsilon$$

13.5 משפט לוז'ין

משפט 13.5.1 משפט לוז'ין

תהי $f : X \to \mathbb{R}$ מדידה וחסומה. μ מידת בורל סופית על X, אזי לכל ε ניתן למצוא פונקציה רציפה $g : X \to \mathbb{R}$ כך ש $\max_{x\in X} |g| \leq \|f\|_\infty$ וכך ש:

$$\mu(\{x \mid \ f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon$$

הוכחה: בלה"כ $0 \leq f \leq 1$. $\|f\|_\infty = 1$. אזי, יש A_1, B_1 קומפקטיות כך ש:

$$A_1 \subset \left\{X \mid \ f(x) \leq \frac{1}{2}\right\}$$
$$B_1 \subset \left\{X \mid \ f(x) > \frac{1}{2}\right\}$$

כך ש:

$$\mu(A_1 \cup B_1) \geq \mu(X) - \frac{\varepsilon}{2}$$

נגדיר:

$$g_1(x) = \frac{\mathrm{d}(x, A_1)}{\mathrm{d}(x, A_1) + \mathrm{d}(x, B_1)}$$

נבחין כי: $0 \leq g_1(x) \leq 1$ וכי: $g_1 \mid_{A_1} = 0$ ואליו: $g_1 \mid_{B_1} = 1$ ולכן:

$$0 \leq f(x) - \frac{1}{2} g_1(x) \leq q\frac{1}{2}$$

עבור $x \subset A_1 \cup B_1$.

נמצא A_1, B_2 כך ש:

$$A_2 \subset \left\{x \mid \ f(x) - \frac{1}{2} g_1(x) \leq \frac{1}{4}\right\} \cap (A_1 \cup B_1)$$
$$B_2 \subset \left\{c \mid \ f(x) - \frac{1}{2} g_1(x) > \frac{1}{4}\right\} \cap (A_1 \cup B_2)$$

ואז:

$$g_2 = \frac{\mathrm{d}(x, A_2)}{\mathrm{d}(x, A_2) + \mathrm{d}(x, B_2)}$$

ונדרוש כי:

$$\mu\left(A_2 \cup B_2\right) \geq \mu\left(A_1 \cup B_1\right) - \frac{\varepsilon}{4}$$

כעת:

$$0 \leq f\left(x\right) - \frac{1}{2}g_1\left(x\right) - \frac{1}{4}g_2\left(x\right) \leq \frac{1}{4}$$

עבור $x \in A_2 \cup B_2$. נחזור על התהליך.
אם קיבלנו: $A_n, B_n, g_1, \ldots, g_n$ כך ש:

$$0 \leq f\left(x\right) - \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} g_i\left(x\right) \leq 2^{-n}$$

נגדיר:

$$\begin{aligned} A_{n+1} &\subset \left\{x \mid f - \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} g_i \leq 2^{-(n+1)}\right\} \cap \left(A_n \cup B_n\right) \\ B_{n+1} &\subset \left\{x \mid f - \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} g_i > 2^{-(n+1)}\right\} \cap \left(A_n \cup B_n\right) \end{aligned}$$

וכו'.
הטור: $\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} g_i\left(x\right)$ מתכנס במ"ש. ומכיוון שכל g_i רציפות, הוא מתכנס לפונקציה רציפה g. ומכיוון ש:

$$0 \leq f\left(x\right) - \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} g_i\left(x\right) \leq 2^{-n}$$

נובע כי: $f\left(x\right) = g\left(x\right)$ לכל $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cup B_n\right) \Leftarrow$ קבוצה בעלת מידה:

$$\mu\left(X\right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \mu\left(X\right) - \varepsilon$$

■

פרק 14

מרחב מכפלה

14.1 הגדרה

הגדרה 14.1.1 $(X,\mathcal{B})$ ו $(Y,\mathcal{C})$ מרחבים מדידים (דוגמה טובה: $(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ (מידת בורל))
נגדיר σ אלגברה שתסומן ע"י "$\mathcal{B}\times\mathcal{C}$". להיות ה σ־אלגברה הנוצרת ע"י "מלבנים מוכללים". זאת אומרת, ע"י קבוצות מהצורה: $\{B\times C \mid B\in\mathcal{B},\ C\in\mathcal{C}\}$.

דוגמה 14.1.2 : $X=Y=\mathbb{R}$ עם σ־אלגברות בורל. נקבל: $\left(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\times\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\right)$.
נשווה אותה לσ אלגברת $\left(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}\right)$ (σ אלגברה הנוצרת ע"י הקבוצות הפתוחות ב $\mathbb{R}^2$).

טענה 14.1.3
$\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\times\mathcal{B}_{\mathbb{R}}=\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$.

הוכחה: נראה כי $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}\subseteq\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\times\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. מספיק להראות כי כל קבוצה פתוחה מוכלת ב $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\times\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.
כל קבוצה פתוחה $U\subset\mathbb{R}^2$ ניתן להציג ע"י

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}\underbrace{(a_i,b_i)\times(c_i,b_i)}_{\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\times\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\times\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

נראה כי: $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\times\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\subset\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$. זאת אומרת שלכל B,C קבוצות בורל ב $\mathbb{R}$, $B\times C\in\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$. אם $A\subset\mathbb{R}$ קבוצה כלשהי, $\mathcal{D}$ σ־אלגברה כלשהי של תתי קבוצות של $\mathbb{R}^2$, האוסף:

$$\{D\subset\mathbb{R}\mid\ A\times D\in\mathcal{D}\}=\mathcal{F}_{\mathcal{D}}(A)$$

הוא σ־חוג.
לכן, עבור $\mathcal{D}=\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ אם $U\subseteq\mathbb{R}$ פתוחה, $\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}}(U)$ σ חוג המכיל את כל הקבוצות הפתוחות, ולכן מזדהה עם σ־אלגברת בורל. ולכן לכל F בורל: $U\times F$ מדידה בורל ($\mathbb{R}^2$) לכל $U\subset\mathbb{R}$ פתוחה. ולכן: $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}=\mathcal{F}_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}}(F)$ ולכן לכל $F,G\subset\mathbb{R}$, F בורל, $F\times G$ בורל ב $\mathbb{R}^2$ ∎

דוגמה 14.1.4 : $X=Y=\mathbb{R}$ עם σ־אלגברה $\overline{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}$ של קבוצות מדידות לבג. מהו: $\overline{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}\times\overline{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}$?
(הסימן $\overline{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}$ הוא הסימן לσ־אלגברת לבג).
בקרוב יהיה קל לראות כי: $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\times\mathcal{B}_{\mathbb{R}}\subsetneq\overline{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}\times\overline{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}\subsetneq\overline{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}}$

נחזור להקשר הכללי, $(Y,\mathcal{C}),(X,\mathcal{B})$ מרחבים מדידים. $A\in\mathcal{B}\times\mathcal{C}$.
נסמן

$$\begin{aligned}A_x &= \{y\mid\ (x,y)\in A\}\subset Y\\ A^y &= \{x\mid\ (x,y)\in A\}\subset X\end{aligned}$$

טענה 14.1.5

אם $A\in\mathcal{B}\times\mathcal{C}$ אזי לכל $x\in X$ ולכל $y\in Y$, $A_x\in\mathcal{C}$ ו $A^y\in\mathcal{B}$.

הוכחה: נתבונן באוסף $\mathcal{D}$ של הקבוצות $A\subset\mathbb{R}^2$ כך ש $A_x\in\mathcal{C}$ לכל $x\in X$, $A^y\in\mathcal{B}$, $y\in Y$.

האוסף הזה ודאי מכיל כל קבוצה מהצורה: $B\times C$ אשר $B\in\mathcal{B}$ ו $C\in\mathcal{C}$.

האוסף הזה הוא בבירור σ אלגברה.

נניח $A=\cup A_i$, כל ה־A_i־ים ב $\mathcal{D}$.

$$(A)_x=\bigcup_{i=1}^{\infty}(A_i)_x$$

ולכן מדיד. כנ"ל לחיתוך.

לגבי משלים, נבחין כי:

$$(A^c)_x=(A_x)^c$$

ולכן, כנדרש. ■

הערה 14.1.6 נראה דוגמה למה זה לא שווה זהותית ל $\overline{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}}$. לדוגמה $A\subset\mathbb{R}$ אינה מדידה לבג. אזי $A\times\{0\}$ בעלת מידת לבג דו־מימדית אפס ולכן מדידה לבג ב $\mathbb{R}^2$. אבל לא ב $\overline{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}\times\overline{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}$.

דוגמה 14.1.7 : בדוגמה הבאה יש הרבה תורת קבוצות. תחזיקו חזק.

נניח שאקסיומת הרצף נכונה. ז"א עוצמה הכי קטנה שגדולה מ$\aleph_0$ היא עוצמת הרצף.

אזי ניתן למצוא סדר טוב על אברי $\mathbb{R}$ כך שלכל x, $\{y\mid y\prec x\}$ בת־מניה (או סופי).

ואז, אם נתבונן ב: $A=\{(x,y)\mid x\prec y\}$. מקבלים קבוצה כך שלכל y, A^y היא בת מניה ולכל x המשלים של A_x בן־מניה. אבל הקבוצה A הזאתי היא אינה מדידה.

כעת נוסיף מבנה של מרחבי מידה ל X,Y, $(X,\mathcal{B},\mu)$ ו: $(Y,\mathcal{C},\nu)$ מרחבי מידה σ־סופיים.

הערה 14.1.8 אם f מדידה ביחס ל $\mathcal{B}\times\mathcal{C}$ אזי לכל x:

$$f_x(y):=f(x,y)$$

מדידה לפי $\mathcal{C}$ (וכנ"ל לפי $\mathcal{B}$ הפונקציה: $f^y(x)=f(x,y)$ מדידה).

משפט 14.1.9

נניח ש A מדידה לפי $\mathcal{B}\times\mathcal{C}$ אזי:

$$\begin{aligned} f(x) &= \nu(A_x)=\int\chi_A(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\\ g(y) &= \mu(A^y)=\int\chi_A(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\end{aligned}$$

מדידות ומתקיים כי:

$$\int f\mathrm{d}\mu=\int g\mathrm{d}\nu$$

הוכחה: נתבונן באוסף הקבוצות A אליהן המשפט מתקיים ש $B\in\mathcal{B},C\in\mathcal{C}$ אזי $\mathcal{B}\times\mathcal{C}\in\mathcal{A}$. כי אז:

$$\begin{aligned} f(x) &= \nu(C)\chi_B(x)\\ g(y) &= \mu(B)\chi_C(y)\end{aligned}$$

ו:

$$\int f\mathrm{d}\mu = \int g\mathrm{d}\nu = \mu(B)\,\nu(C)$$

כנ"ל לאיחודים סופיים זרים של מלבנים מוכללים והאיחודים הסופיים של מלבנים מוכללים מהווים חוג של קבוצות.

כדי להוכיח את המשפט, מספיק להראות ש $\mathcal{A}$ מחלקה מונוטונית. 16/01/2013

כיוון ראשון: $A_i \uparrow A$, $A_i \in \mathcal{A}$ גם $A \in \mathcal{A}$. נבחין כי $\chi_{A_i} \uparrow \chi_A$ לכן, אם נגדיר:

$$\begin{aligned} f_i &= \nu\left((A_i)_x\right) \\ g_i &= \mu\left((A_i)^y\right) \end{aligned}$$

נכתוב:

$$f_i(x) = \int \chi_{A_i}(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)$$

ממשפט ההתכנסות המונוטונית:

$$\rightarrow \int \chi_A(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) = f(x)$$

בפרט, f מדידה (כפונקציה המתקבלת על ערכים ב $\{\infty\} \cup \mathbb{R}_{\geq 0}$).

נפעיל שוב את משפט ההתכנסות המונוטונית:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}\mu(x) \leftarrow \int f_i(x)\,\mathrm{d}\mu(x) = \int g_i(y)\,\mathrm{d}\nu(y) \rightarrow \int g(y)\,\mathrm{d}\nu(y)$$

מכיוון ש X, Y הם σ־סופיים, ניתן למצוא $X_i \uparrow X$ ו $Y_i \uparrow Y$ כך ש: $\nu(Y_i), \mu(X_i) < \infty$.

נראה כי לכל $A \in \mathcal{B} \times \mathcal{C}$ אז $A \cap (X_i \times Y_i) \in \mathcal{A}$. עכשיו, צריך רק להוכיח את המשפט למרחבי מידה סופית:

$$(Y_i, \mathcal{C}|_{Y_i}, \nu|_{Y_i}),\ (X_i, \mathcal{B}|_{X_i}, \mu|_{X_i})$$

כעת, אותו טיעון ממקודם עובד.

נניח כי: $A'_i \downarrow A'$ וכי $A'_i \subset X_1 \times Y_1$. נבחין כי $\chi_{A'_i} \downarrow \chi_{A'}$. אנו רוצים להראות:

$$f_i(x) = \int \chi_{A'_i}(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) \rightarrow \int \chi_{A'}(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) = f(x)$$

משפט ההתכנסות המונוטונית אומר: $f_i \uparrow f$, f_i אינטגרביליות, אזי: $\int f_i\mathrm{d}\mu \rightarrow \int f\mathrm{d}\mu$. אבל אנחנו לא רוצים להניח f_i אינטגרביליות. לכן, צריך להניח $f_i \geq 0$ (או משהו בסגנון).

ולכן:

$$f_i(x) = \int \chi_{A'_i}(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) \rightarrow \int \chi_{A'}(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) = f(x)$$

ממשפט ההתכנסות המונוטונית לפנוקציה $1 - \chi_{A'_i}(x)$.

כנ"ל $f_i(x) \downarrow f(x)$, $f_i(x) \leq \nu(Y)$ ושוב אפשר להפעיל את המשפט ונקבל:

$$\int f_i \rightarrow \int f$$

הערה 14.1.10 ממש לא ברור לי מה הלך כאן.

לכן אם $A_i \downarrow A$, לכל ℓ מתקיים: $A\cap(X_\ell\times Y_\ell)\in\mathcal{A}$ ומכיוון ש $A\cap(X_\ell\times Y_\ell)\uparrow A$ גם $A\in\mathcal{A}$.
ולכן $\mathcal{A}$ מחלקה מונוטונית ולכן $\sigma(R)\subset\mathcal{A}$ ולכן $\mathcal{A}=\mathcal{B}\times\mathcal{C}$. ■

נגדיר כעת מועמדת למידה:

$$\mu\times\nu(A)=\int\nu(A_x)\,\mathrm{d}\mu(x)=\int\mu(A^y)\,\mathrm{d}\nu(y)$$

בפרט:

$$\mu\times\nu(\mathcal{B}\times\mathcal{C})=\mu(\mathcal{B})\,\nu(\mathcal{C})$$

משפט 14.1.11

$\mu\times\nu$ המוגדרת כך היא מידה σ־סופית הנקבעת באופן יחיד ע"י האילוץ:

$$\mu\times\nu(\mathcal{B}\times\mathcal{C})=\mu(\mathcal{B})\,\nu(\mathcal{C})$$

הוכחה: אדטיביות, חיוביות, σ־סופיות ראינו.
σ־אדיטיביות: שוב ששימוש סטנדרטי במשפט ההתכנסות המונוטונית.
והיחידות נובעת ממשפט היחידות לאור ה־σ־סופיות של $\mu\times\nu$. ■

הערה 14.1.12 ישירות מההגדרה נובע כי אם יש איזשהו A כך ש $\mu\times\nu(A)=0$ א זי ל μ כמעט כל x מתקיים $\nu(A_x)=0$ וגם ל ν כמעט כל y מתקיים $\mu(A^y)=0$.

מסקנה 14.1.13 עקרון קווליירי

אם A,A' מדידות, $\nu(A_x)=\nu(A'_x)$ לכמעט כל x אזי:

$$\mu\times\nu(A)=\mu\times\nu(A')$$

נניח A,A' מדידות על $X\times Y$. נגדיר:

$$\begin{aligned}D_1&=\{x\mid\ \nu(A_x)>0\}\\D_2&=\{x\mid\ A_x\neq\varnothing\}\end{aligned}$$

D_1 מדידה ביחס ל $\mathcal{B}$. אבל D_2 היא לא בהכרח $\mathcal{B}$ מדידה.

14.2 משפט פוביני

משפט 14.2.1 משפט פוביני גרסה 1

$f\geq 0$ על $X\times Y$. אם:

$$\begin{aligned}h_1(x)&=\int f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y)\\h_2(y)&=\int f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\end{aligned}$$

מדידות, אזי:

$$\int h_1(x)\,\mathrm{d}\mu(x)=\int h_2(y)\,\mathrm{d}\nu(y)$$

הוכחה: המשפט בוודאי נכון אם $f=1_{A}\left(x,y\right)$ (רדוקציה להגדרה של $\mu\times\nu$ + המשפט שאפשר הגדרה זו).
לכן, גם לכל פונקציה אי־שלילית פשוטה.
אם $f\geq0$ כללית, ניתן למצוא f_{n} פשוטות כל ש $f_{n}\uparrow f$ ואזי:

$$h_{1}\left(x\right)=\int f\left(x,y\right)\mathrm{d}\nu\left(y\right)\underbrace{\leftarrow}_{\text{עולה ל}}\int f_{i}\left(x,y\right)\mathrm{d}\nu\left(y\right)=h_{1}^{\left(i\right)}\left(x\right)$$

ולכן:

$$\int h_{1}\left(x\right)\mathrm{d}\mu\left(x\right)=\lim\int h_{1}^{\left(i\right)}\left(x\right)\mathrm{d}\mu\left(x\right)=\lim\int h_{2}^{\left(i\right)}\mathrm{d}\nu\left(y\right)=\int h_{2}\left(y\right)\mathrm{d}\nu\left(y\right)$$

■

משפט 14.2.2 משפט פוביני גרסה 2

נניח ש f אינטגרבילית, אזי: $f_{x}\left(y\right)\left(=f\left(x,y\right)\right)$ אינטגרבילית לכמעט כל x. נסמן:

$$h_{1}\left(x\right)=\begin{cases}\int f_{x}\left(y\right)\mathrm{d}\nu\left(y\right) & \text{אם מוגדר}\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

וכנ"ל לגבי $f^{y}\left(x\right)$ ו h_{1},h_{2} אינטגרביליות ומתקיים:

$$\int f\mathrm{d}\mu\times\nu=\int h_{1}\mathrm{d}\mu=\int h_{2}\mathrm{d}\nu$$

הערה 14.2.3 גרסה 2 נובעת מגרסה 1, פשוט מפעילים אותו פעמיים פעם אחת על החלק השלילי של f ופעם אחת על החיובי.

23/01/2013

חלק VII

ובחזרה ללבג...

פרק 15

משפט הצפיפות של לבג

15.1 המשפט

ראינו שאם X מרחב מטרי קומפקטי, μ מידת בורל סופית על X, אזי כל פונקציה מדידה ניתנת לקירוב ע"י פונקציה רציפה. וכל קבוצה מדידה ניתנת לקירוב ע"י קבוצות פתוחות.

דוגמה 15.1.1 : קטע סופי ב $\mathbb{R}$ (ניתן לעבור גם לכל $\mathbb{R}$).
גם כדור ב $\mathbb{R}^n$.

משפט 15.1.2 משפט הצפיפות של לבג

בהינתן $E \subset \mathbb{R}^n$ חסומה, מדידה. m מידת לבג על $\mathbb{R}^n$.
אזי:

1. לכמעט כל $x \in E$ מתקיים:

$$\lim_{r \to 0} \frac{m(E \cap B_r(x))}{c_n r^n} = 1$$

בפרט הגבול קיים. כאשר c_n נפח כדור יחידה ב $\mathbb{R}^n$ (ז"א: $c_1 = 2, c_2 = \pi, c_3 = \frac{4}{3}\pi \ldots$).

2. לכמעט כל $x \notin E$ מתקיים:

$$\lim_{r \to 0} \frac{m(E \cap B_r(x))}{c_n r^n} = 0$$

המשפט הנ"ל מעניין כבר עבור $n = 1$.

אנו ננסה להתחיל להוכיח, באיזשהו שלב נצטרך להוכיח איזשהי למה. **הוכחה:** נשים לב כי החסימות של E אינה רלוונטית, מכיוון שאנו מדברים על כדורים קטנים.

אם נראה את 1, ב' ינבע מהפעלת המשפט על E^c (או למען הקפדנים על: $E^c \cap \overline{B_R(0)}$ לכל R).

נניח בשלילה כי א' לא נכון. נבחין כי הביטוי עליו אנו לוקחים את הגבול הוא תמיד לכל היותר 1. לכן, הנחת השלילה אומרת שקיימת תת קבוצה של E בעלת מידה חיובית של נקודות כך ש:

$$\liminf_{r \to 0} \frac{m(E \cap B_r(x))}{c_n r^n} < 1$$

כלומר, אנו מסתכלים על הקבוצות:

$$A_\rho = \left\{ x \in E \mid \liminf_{r \to 0} \frac{m(E \cap B_r(x))}{c_n r^n} < \rho \right\}$$

וספציפית על הקבוצה A_1, ומניחים בשלילה כי מתקיים $m(A_1) > 0$.

שאלה: מדוע קבוצה זו מדידה? או, באופן שקול, מדוע הפונקציה $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ הנתונה ע"י $f(x)=m(E\cap B_r(x))$ היא מדידה?

בלה"כ E מדידה בורל (ההבדל הוא במידה אפס, ולכן לא מעניין לשאלה).

נגדיר:

$$F=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^{2n}\mid \ \|x-y\|<r\right\}\cap(\mathbb{R}^n\times E)$$

F היא מדידה ב $\mathbb{R}^{2n}$ לכן, אם נתבונן בחתך:

$$F_x=\{y\in\mathbb{R}^n\mid \ (x,y)\in F\}=E\cap B_r(x)$$

מכיוון ש F מדידה ב $\mathbb{R}^{2n}$ הפונקציה: $x\mapsto m(F_x)$ מדידה מפוביני.

כעת, נגדיר:

$$g(x)=\inf_{r<r_0}\frac{m(E\cap B_r(x))}{r^n}=\inf_{\substack{r<r_0\\ r\text{רציונלי}}}\frac{m(E\cap B_r(x))}{r^n}$$

מדיד (inf של מספר בן־מניה של פונקציות מדידות).

$$\liminf\frac{m(E\cap B_r(x))}{r^n}=\sup_{k\in\mathbb{N}}\inf_{r<\frac{1}{k}}\frac{m(E\cap B_r(x))}{r^n}$$

מדיד. ולכן A_ρ מדידה לכל ρ.

כמו כן, $A_\rho\uparrow A_1$ כאשר $1\uparrow\rho$. ולכן, יש $\rho_0<1$ כך ש: $m(A_{\rho_0})>0$.

יהי $\varepsilon>0$ כלשהו. נמצא פתוחה $U\supseteq A_{\rho_0}$ כך ש: $m(U\backslash A_{\rho_0})<\varepsilon$. בכל נקודה $x\in A_{\rho_0}$, נמצא כדור $B_x:=B_{r_x}(x)$ כך ש: $B_x\subset U$ וגם:

$$m(E\cap B_{r_x}(x))<(\rho_0+\varepsilon)\,c_nr_x^n$$

יהי:

$$\mathcal{F}=\{B_x\mid \ x\in A_{\rho_0}\}$$

נניח שנמצא כדורים זרים $B_1,B_2,\ldots$ בתוך $\mathcal{F}$ (יש לכל היותר מספר בן־מניה של כדורים זרים, מכיוון שיש מספר בן־מניה של רציונלים, וכל כדור מכיל מספר רציונלי. אזי:

$$\varepsilon>m(U\backslash A_{\rho_0})\geq\sum_i m(B_i\cap(U\backslash A_{\rho_0}))=\sum_i m(B_i\backslash A_{\rho_0})\geq\sum_i(m(B_i)-m(B_i\cap E))\geq$$
$$\sum_i m(B_i)(1-\rho_0-\varepsilon)\underbrace{\geq}_{\text{עבור }\varepsilon\text{ קטן מספיק}}\frac{1-\rho_0}{2}\sum_i m(B_i)$$

ז"א, כדי לקבל סתירה, יועיל לנו למצוא כדורים זרים מהאוסף $\mathcal{F}$ עם סכום מידות גדול.

וכאן באה הלמה:

למה 15.1.3 משפט הכיסוי של ויטלי

$A\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה חסומה. לכל $x\in A$ יש כדור B_x סביבו (כך ש x במרכזו). יהי $\tilde{B}_x$ כדור סביב x ברדיוס הגדול פי 5 מהרדיוס של B_x. אזי יש תת אוסף זר (סופי או בן־מניה) $B_1,B_2,\ldots$ ב$\mathcal{F}\cup\{\varnothing\}$ (אם סופי אז $B_n=\varnothing$ לכל n גדול

מספיק). כאשר:

$$\mathcal{F} = \{B_x \mid \ x \in A\}$$

כך ש:

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{B}_i$$

הוכחה: נבחר B_1 כך שרדיוסו r_1 מקיים: $r_1 \geq \frac{1}{2}\sup\{r_x \mid \ x \in A\}$ כאשר r_x היא הרדיוס של הכדור B_x (ז"א $B_x = B_{r_x}(x)$).

הערה 15.1.4 בלה"כ אין B_x המכיל את A, ולכן r_x קבוצה חסומה.

נגדיר באינדוקציה סדרה B_i כך שהרדיוס r_i מקיים:

$$r_i \geq \frac{1}{2}\sup\{r_x \mid \ x \in A, \ B_x \cap B_j = \varnothing \quad \forall j < i\}$$

אוסף הכדורים זרים, מוכלים בתוך קבוצה חסומה.

הנחנו כבר שאין כדורים המכילים את A, ולכן הרכדיוס של כל כדור חסום ע"י הקוטר של A, ולכן כל הכדורים מוכלים בכדור גדול ברדיוס $2\operatorname{diam}(A)$.

כעת, ישנן שתי אפשרויות:

1. אם שהתהליך נגמר לאחר בחירה של מספר סופי של כדורים.
2. $r_i \to 0$.

בכל מקרה: $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \tilde{B}_i$.

נבדוק זאת. נקח $x \in A$ כך שהכדור B_x לא נבחר. מדוע B_x לא נבחר?

זה קורה מכיוון שהיה מועמד אחר B_i כך ש $B_i \cap B_x \neq \varnothing$ כך ש $r_i \geq \frac{1}{2}r_x$, אז נבחין כי במקרה זה, $B_x \subset \tilde{B}_i$. ובפרט $x \in \tilde{B}_i$. ■

הערה 15.1.5 מספיק היה פי 3, מכיוון שאז אנו גם נקבל ש $x \in \tilde{B}_i$ פשוט לא כל הכדור מוכל.

מסקנה 15.1.6

$A \subset \mathbb{R}^n$ קבוצה חסומה, לכל $x \in A$ יש כדור B_x. אזי יש תת אוסף זר (סופי או בן־מניה) $B_1, B_2, \ldots$ כך ש:

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(B_i) \geq 3^{-n} m^*(A)$$

כעת, נמשיך עם הוכחת המשפט. עפ"י משפט הכיסוי של ויטלי, יש כדורים זרים $B_1, B_2, \ldots \subset \mathcal{F} \cup \{\varnothing\}$ כך ש:

$$\sum_{i=1}^{\infty} m(B_i) \geq 3^{-n} m(A_{\rho_0})$$

ואזי:

$$\varepsilon > \left(\frac{1-\rho_0}{2}\right) \cdot 3^{-n} m(A_{\rho_0})$$

אבל מכיוון ש ε היה שרירותי, קיבלנו סתירה. ■

הערה 15.1.7 במהלך המשפט דנו במדידות של $f\left(x\right)=m\left(E\cap B_{r}\left(x\right)\right)$ כש E מדידה.
היה ניתן להראות זאת ישירות כי:

$$m\left(E\cap B_{r}\left(x\right)\right)-m\left(E\cap B_{r}\left(x'\right)\right)\leq m\left(B_{r}\left(x\right)\Delta B_{r}\left(x'\right)\right)\leq C\left\Vert x-x'\right\Vert$$

הטיעון שהראינו מראה כי לכל מידת בורל μ על $\mathbb{R}^{n}$:

$$g\left(x\right)=\mu\left(E\cap B_{r}\left(x\right)\right)$$

מדידה. (כאן $g\left(x\right)$ בוודאי לא חייבת להיות רציפה).
קיים משפט יפה (Preiss) שאומר כי אם μ מדידה על $\mathbb{R}^{n}$ כך ש $\lim\limits_{r\to0}\frac{\mu\left(B_{r}\left(x\right)\right)}{r^{s}}$ קיים, סופי, חיובי לכמעט כל x אזי s חייב להיות שלם, ואפשר לפרק את μ לסכום מידות על תתי יריעות s ממדיות.
נקח $n=2$ (ככל הנראה Besicovitch). אם $s=0$ אז μ היא סכום מידות אטומיות. $s=2$ $\mu\ll m$ (זה קשור למשפט הצפיפות של לבג, אבל צריך להרחיב קצת).
ואם $s=1$ אז μ הוא סכום בן מניה של מסילות בעלות אורך.

חלק VIII

חומר למבחן

כל מה שהיה בשיעורים, ורוב מה שהיה בתרגולים ונמצא ברפרנסים (אלמוס וכו').

את משפט ההצגה של ריס, יהיה צריך לדעת את המשפט, אבל ככל הנראה לא להוכיח אותו.

צריך לדעת שמות של משפטים! הוא כן יגיד על מה מדובר בגדול, אבל לא את הטענות בהכרח.