מבוא למשוואות דיפרנציאליות חלקיות - 80711

אור דגמי, or@digmi.org

23 בינואר 2013

אתר אינטרנט: http://digmi.org

סיכום הרצאות של פרופ' מתניה בן־ארצי בשנת לימודים 2013.

ספר לימוד של פינצ'ובר־רובינשטיין - מבוא למד"ח (ספר בעברית מהטכניון. הוא גם יצא באנגלית Cambridge U. Press, Pinchover Rubinstein) מומלץ להשתמש באנגלית, אבל יש רק אחד בספריה והוא שמור. בעברית יש מספר עותקים.

יהיה בוחן אמצע ומבחן סופי שיתבסס על תרגילים מהשיעורי בית שאינם להגשה.

תוכן עניינים

I משוואות מסדר ראשון 4

1 סיסמה כללית 6

2 משוואה לינארית וקוואזי־לינארית 7
2.1 המשוואה הלינארית הכללית 8
2.1.1 משפט הקיום והיחידות למשוואות קוואזי־לינאריות 9
2.2 קווים קרקטריסטיים 11
2.3 דוגמה למשוואה לינארית 11
2.4 דוגמה של משוואה קוואזי לינארית 12

3 פתרון חלש 14
3.1 מהו פתרון חלש? 14
3.2 דוגמה של שימוש בפתרון חלש עם משוואת בורגרס 14
3.2.1 דוגמאות לפתרונות חלשים במשוואת Burgers $u_y + uu_x = 0$ 17
3.3 פתרון לא יחיד 18
3.4 חוק השימור הכללי 20

II משוואת הגלים 23

4 משוואת הגלים במימד יחיד 24
4.1 הגדרת המשוואה 24
4.2 הפתרון הכללי למשוואת הגלים 24
4.3 פתרון ספציפי 26
4.4 יציבות פתרונות 27

5 משוואת הגלים ב $\mathbb{R}^n$ 30
5.1 הכללה למימד גבוהה 30
5.2 ממוצעי פונקציות (ממוצעים כדוריים) 30
5.3 ממשוואת Darboux אל משוואת הגלים. או: משוואת Euler-Poisson-Darboux 31

III אופטרטורים מדרגה כלשהי, משטחים קרקטריסטיים ומשפט Cauchy-Kowalewski 35

6 במה מדובר? 36
6.1 מולטי־אידקסים 36
6.1.0.1 אופרטור D: 36
6.1.0.2 משפט הבינום: 36
6.1.0.3 פולינום טיילור מסדר m: 37
6.1.0.4 הפיתוח המולטינומי: 37

7 פונקציות אנליטיות ממשיות **42**

7.1 טורים במוטלי אינדקס 42

7.1.1 הגדרה ודוגמאות 42

7.1.2 טור חזקות 43

7.1.3 עקרונות השוואה 45

7.1.4 משפט ההרכבה 46

8 משפט Cauchy-Kovalewski **48**

8.1 המקרה הכללי 48

IV משוואת Laplace ו: Poisson ב$\mathbb{R}^n$ **54**

9 משוואת Laplace **55**

9.1 פונקציות הרמוניות 55

9.1.1 ובחזרה לממוצעים... 55

9.2 משפט הערך הממוצע (חלק 2) 57

9.3 משפט המקסימום החזק 57

10 בעיית דיריכלה (Dirichlet) **60**

10.1 נוסחאת Green 60

10.2 הגדרת הפתרון היסודי ב $\mathbb{R}^n$ 61

10.2.1 נגזרות x של $\Gamma(x-y)$ 61

10.3 פונקציית גרין 63

10.3.0.1 שאלה? 65

10.3.1 פונקציית Green וגרעין Poisson לכדור $B_R(0)$ 65

10.3.1.1 גרעין Poisson של $B_R(0)$ 66

10.3.2 הסימטריה של פונקציית Green 67

10.3.3 סיכום: 70

10.4 עובדות לגבי גרעין Poisson 70

10.5 תכונות גרעין Poisson 70

10.5.1 מסקנות 71

10.6 בעיית דיריכלה בתחום כללי 72

V משוואת החום **80**

11 משוואת החום על רגל אחת **81**

11.1 מה היה עד כה? 81

11.2 ממשוואת החום על תחום חסום 82

11.3 משפט המקסימום מינימום למשוואת החום 82

11.4 פתרון משוואת החום ב $t \geq 0$ ו $x \in \mathbb{R}$ 84

11.5 עקרון Duhamel 86

חלק I

משוואות מסדר ראשון

פרק 1

סיסמה כללית

במד"ח מחפשים פונקציה נעלמת, ממש כמו שבמשוואות אלגבריות מחפשים מספר (או סדרה של מספרים). ולכן משוואה של סדר ראשון תהיה מהצורה:

$$F\left(x,y,u\left(x,y\right),u_x\left(x,y\right),u_y\left(x,y\right)\right)=0$$

כאשר $u\left(x,y\right)$ הפונקציה הנעלמת ו: u_x,u_y הנגזרות החלקיות לפי x,y בהתאמה.

הערה 1.0.1 נשים לב שלקחנו את המקרה "הכי פשוט", כלומר שני משתנים בלתי תלויים.

דוגמה 1.0.2 :

$$x\sin\left(y\right)e^{u(x,y)}+u_x\left(x,y\right)^2u\left(x,y\right)+u_xu_y=0$$

המטרה למצוא את הפונקציה u המקיימת משוואה זו.

פרק 2

משוואה לינארית וקוואזי־לינארית

נתחיל במקרה הלינארי, כלומר:

$$a(x,y)\,u_x + b(x,y)\,u_y = c_0(x,y)\,u(x,y) + c_1(x,y)$$

משוואה זו נקראת משוואה לינארית מכיוון שהיא לינארית ב u, u_x, u_y.

הגדרה 2.0.3 משוואה קוואזי־לינארית: משוואה קוואזי לינארית:

$$a(x,y,u)\,u_x + b(x,y,u)\,u_y = c(x,y,u)$$

כלומר, היא תלויה לינארית רק בנגזרות u_x, u_y. אבל לא בהכרח תלויה לינארית בu.

דוגמה 2.0.4 : נתבונן במשוואה לינארית פשוטה:

$$u_x(x,y) = c_0(x,y)\,u + c_1(x,y)$$

אנו רוצים לפתור את המשוואה במישור x, y. $c_0(x,y), c_1(x,y)$ נתונות במישור כולו וחלקות. דהיינו, קיימות הנגזרות מכל סדר שנצטרך.
נכפול ב: $e^{-\int_{x_0}^{x} c_0(\xi,y)\mathrm{d}\xi}$ ונקבל:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{-\int_{x_0}^{x} c_0(\xi,y)\mathrm{d}\xi} u(x,y)\right) = e^{-\int_{x_0}^{x} c_0(\xi,y)\mathrm{d}\xi} \cdot c_1(x,y)$$

ומהמשפט היסודי של החשבון האינפינטסימלי נקבל כי:

$$e^{-\int_{x_0}^{x} c_0(\xi,y)\mathrm{d}\xi} u(x,y) = \int^{x} e^{-\int_{x_0}^{t} c_0(\xi,y)\mathrm{d}\xi} c_1(t,y)\,\mathrm{d}t + g(y)$$

כלומר, כל y הוא "פרמטר".
ובכך, נקבל את $u(x,y)$ אם נדע את $g(y)$. כלומר, אם נקח $x = 0$ ונחליט $x_0 = 0$ נקבל כי:

$$u(0,y) = g(y)$$

במילים אחרות, $g(y)$ הנתונה לגמרי לבחירתנו תייצג את ערכי $u(x,y)$ על הציר $x = 0$.

מסקנה 2.0.5

"תנאי ההתחלה" של המשוואה הוא פונקציה.

הערה 2.0.6 x_0 שהשתמשנו באינטגרציה לא חייב להיות קבוע, הוא יכול להיות תלוי בy במקרה בו לא נתונה לנו הפונקציה u ב$x=0$ אלא נתון על עקום כלשהו. ואז אנו יכולים לפרש את $g(y)$ בעזרת שימוש ב x_0 שונים לפי y. אם אותו y חוזר פעמיים בעקום, אז ייתכן והמצב יניב סתירה. מכיוון שלכל y שנתון ע"י העקום עליו אנו יודעים את u הוא מתפתח לפי הערך בנקודה. על כן, ייתכן כי אם אותו y חוזר פעמיים בעקום הנתון הערכים לא יתאימו להתפתחות. כלומר, $g(y)$ יכולה להיות נתונה על קו החותך פעם אחת בלבד כל ישר אופקי (מקביל לציר x).

✎ **דוגמה 2.0.7 :** גם בדוגמה זו נדון במשוואה לינארית, ואף פשוטה יותר:

$$u_x + u_y = 0$$

משוואה זו בניגוד לקודמת היא בפירוש לא משוואה רגילה. ראשית נחפש משהו דמוי הקווים שהיו לנו בדוגמה הראשונה.

אבחנה: $u_x + u_y$ הינה הנגזרת הכיוונית בכיוון האלכסון $x=y$. נקח את הוקטור $\alpha(1,1)$, המשוואה שלנו היא למעשה:

$$\alpha \nabla u = 0$$

ולכן, u קבועה על כל קו מהצורה $y = x + c$ כאשר $c \in \mathbb{R}$. כלומר, u למעשה היא למעשה פונקציה לא של x, y אלא של $y - x$ דהיינו: $u(x,y) = u_0(\underbrace{y-x}_{c})$. כלומר, בהינתן $u_0(c)$, לכל $c \in \mathbb{R}$ הפתרון יהיה $u(x,y) = u_0(y-x)$.

נניח $u_0(c) = c^2$, כלומר נקבל כי: $u(x,y) = (y-x)^2$, ובפרט כאשר $y=0$ מתקיים: $u(x,0) = x^2$ כאשר: $c = -\begin{pmatrix} \text{נקודת החיתוך עם} \\ y=0 \end{pmatrix}$.

הערה 2.0.8 נבחין כי אנו גם בדוגמה זו, יכולים לקחת קו אחר.
ניתן להסיק את ערכו של c מתוך חיתוך עם קו Γ ובתנאי ש Γ חותך כל $y = x + c$ בדיוק פעם אחת. למשל Γ יכול להיות: $\{x > 0, y = 0\} \cup \{y \geq 0, x = 0\}$.

כעת, נסתכל מהכיוון השני. תהי $u_0(c)$ פונקציה כלשהי. נסתכל ב: $u(x,y) := u_0(y-x)$. אז:

$$\begin{cases} u_x(x,y) = u_0'(y-x) \cdot (-1) \\ u_y(x,y) = u_0'(y-x) \cdot 1 \end{cases}$$
$$\Downarrow$$
$$u_x(x,y) + u_y(x,y) = 0$$

2.1 המשוואה הלינארית הכללית

כפי שכבר ציינו, המשוואה הלינארית הכללית הינה:

$$a(x,y)\, u_x + b(x,y)\, u_y = c_0(x,y)\, u(x,y) + c_1(x,y)$$

נחשוב על הפתרון $u = u(x,y)$ כמשטח ב $\mathbb{R}^3$. הרי, פונקציה בשני משתנים מתארת משטח ב $\mathbb{R}^3$.
מה הנורמל למשטח הזה? נסמנו $N(x,y,u(x,y))$ (אבל לא ננרמל אותו). אנו יכולים לקחת נורמל כזה בצורה:

$$N(x,y) = (u_x(x,y), u_y(x,y), -1)$$

מדוע? המשטח $z = u(x,y)$ ניתן לכתיבה כ: $u(x,y) - z = 0$. מהו ווקטור מאונך למשטח גובה כללי $\varphi(x,y,z) = 0$? זהו כמובן $\nabla\varphi(x,y,z)$.

אז במשטח שלנו $\varphi(x,y,z)=u(x,y)-z$ הגרדיאנט הוא כמובן:

$$N(x,y)=(u_x(x,y),u_y(x,y),-1)$$

ואז, המשוואה הכללית ניתנת לכתיבה בצורה הבאה:

$$N\cdot\underbrace{(a(x,y),b(x,y),c_0(x,y)u(x,y)+c_1(x,y))}_{K(x,y)}=0$$

24/10/2012 במילים אחרות, הוקטור $K(x,y)$ (בנקודה $(x,y,u(x,y))$) משיק למשטח הפתרון.

2.1.1 משפט הקיום והיחידות למשוואות קוואזי־לינאריות

כפי שראינו כבר, המשוואה הקוואזי לינארית היא:

$$a(x,y,u)u_x+b(x,y,u)u_y=c(x,y,u) \tag{2.1.1}$$

נתונים: קו חלק ב$\mathbb{R}^3$ (לצורך משוואות מסדר ראשון, נגדיר חלק בתור C^2) מהצורה: $\Gamma(s)=(x_0(s),y_0(s),u_0(s))$, $s\in(a,b)$.

משפט 2.1.1

נניח כי a,b,c הן פונקציות חלקות בסביבה של נקודה $\Gamma(s_0)$. נניח כי קיים $\delta>0$ כך שמתקיים התנאי $a(\Gamma(s))y_0'(s)-b(\Gamma(s))x_0'(s)\neq 0$ עבור $s\in(s_0-2\delta,s_0+2\delta)$. אזי, קיימת סביבה של $\{\Gamma(s)\mid s\in(s_0-\delta,s_0+\delta)\}$ שבה קיים פתרון יחיד למשוואה (2.1.1) המקיים: $u(x_0(s),y_0(s))=u_0(s)$.

הוכחה: נסתכל במערכת המשוואות הרגילות:

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x(t,s)=a(x(t,s),y(t,s),u(t,s))\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}y(t,s)=b(x(t,s),y(t,s),u(t,s))\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(t,s)=c(x(t,s),y(t,s),u(t,s))\end{cases}$$

כאשר:

$$\begin{cases}x(0,s)=x_0(s)\\ y(0,s)=y_0(s)\\ u(0,s)=u_0(s)\\ s\in\left(s_0-\frac{3}{2}\delta,s_0+\frac{3}{2}\delta\right)\end{cases}$$

לפי משפט הקיום והיחידות של מד"ר, קיים $\varepsilon_0>0$ כך שהפתרונות קיימים ויחידים עבור $-\varepsilon_0<t<\varepsilon_0$ ו: $s\in\left(s_0-\frac{3}{2}\delta,s_0+\frac{3}{2}\delta\right)$. פתרונות אלה הם פונקציות C^2 בתחום הזה של (t,s).
הפתרונות האלה הם קווים ב $\mathbb{R}^3$ העוברים דרך Γ (לפחות ל $t=0$).

הגדרה 2.1.2 קווים אלה נקראים הקווים הקרקטריסטיים של (2.1.1).

אנו רוצים להראות שהקבוצה $\left\{(x(t,s),y(t,s),u(t,s)),t\in(-\varepsilon_0,\varepsilon_0),s\in\left(s_0-\frac{3}{2}\delta,s_0+\frac{3}{2}\delta\right)\right\}$ היא המשחט הפותר, בהסתייגות שאולי נצטרך לצמצם את קטעי s,t.
מה שעלינו לעשות כמובן הוא להחליף את (t,s) ב (x,y). נחשב את היעקוביאן:

$$J(t,s)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,s)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial x}{\partial s}\\ \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial s}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a(x(t,s),y(t,s),u(t,s)) & \frac{\partial x}{\partial s}\\ b(x(t,s),y(t,s),u(t,s)) & \frac{\partial y}{\partial s}\end{pmatrix}$$

נחשב את הדטרמיננטה של היעקוביאן בנקודה $t=0$.

$$\det J(t,s)\mid_{t=0}=a(\Gamma(s))y_0'(s)-b(\Gamma(s))x_0'(s)$$

בגלל התנאי במשפט, ידוע ממשפט הפונקציות הסתומות כי עברו $0<\varepsilon<\varepsilon_0$ ו $\delta>0$ מספיק קטן, אכן ניתן להפוך את הפונקציות $(t,s)\mapsto(x(t,s),y(t,s))$ עבור $-\varepsilon<t<\varepsilon$, $s_0-\delta,s<s_0+\delta$. כאשר התמונה היא משטח חלק שעליו $t=t(x,y)$ ו: $s=s(x,y)$. ואז, נגדיר $u(x,y)=u(t(x,y),s(x,y))$. 30/10/2012

היא מוגדרת יפה וחלק על $(x,y)\in D$ (D הוא התחום עליו הפונקציה ההפוכה עובד), נראה שהיא פתרון של המשוואה (2.1.1).

$$a(x,y,u(x,y))\,u_x(\ldots)+b(\ldots)\,u_y(\ldots)=a(u_tt_x+u_ss_x)+b(u_tt_y+u_ss_y)=$$
$$u_t(at_x+bt_y)+u_s(as_x+bs_y)$$

אבל $a=x_y$ ו $b=y_t$ לכן: $at_x+bt_y=x_tt_x+y_tt_y=\frac{\partial t}{\partial t}=1$. וכמו כן: $as_x+bs_y=x_ts_x+y_ts_y=\frac{\partial s}{\partial t}=0$ ולכן:

$$=u_t=c(x,y,u(x,y))$$

אבחנה: קו שמשיקו (a,b,c) מאונך לאנך של הישר הפותר. כלומר⇐ משיק למשטח. מכיוון ש: $(a,b,c)(u_x,u_y,-1)=0$. הקווים הנ"ל אמורים להיות אבני הבניין של המשטח של הפתרון.

נרצה להראות יחידות של הפתרון.

נניח כי קיים משטח פותר $z=f(x,y)$ המוגדר בסביבת $(x_0(s_0),y_0(s_0))$ ונראה כי הוא מתלכד עם המשטח שבנינו. נסתכל עבור s בסביבה קטנה של s_0 בפונקציה:

$$\Psi(t,s)=\underbrace{u(t,s)}_{\text{הפתרון שבנינו}}-f\underbrace{(x(t,s),y(t,s))}_{\text{הקווים האופייניים}}$$

נגזור כפונקציה של t ונקבל:

$$\Psi_t(t,s)=u_t(t,s)-f_xx_t-f_yy_t=$$
$$u_t(t,s)-f_x\cdot a(x(t,s),y(t,s),f(t,s))-f_y\cdot b(x(t,s),y(t,s),f(t,s))\underbrace{=}_{\text{כיוון ש } f \text{ פתרון של } (2.1.1)}$$
$$u_t(t,s)-c(x(t,s),y(t,s),f(t,s))=c(t,s,u(t,s))-c(t,s,f(t,s))$$

כאשר $f(t,s)=f(x(t,s),y(t,s))$. לכן:

$$\Psi_t=c(t,s,u(t,s))-\underbrace{c(t,s,u(t,s)-\Psi(t,s))}_{\text{הגדרת } \Psi} \tag{2.1.2}$$

לכן, $\Psi(\cdot,s)$ מקיימת משוואה דיפרנציאלית רגילה מסדר ראשון (2.1.2).

$$\Psi(0,s)=u(0,s)-f(x(0,s),y(0,s))\underbrace{=}_{\text{בגלל התנאי ההתחלה: } f|_\Gamma=u_0(s)}u_0(s)-u_0(s)=0$$

מצד שני, הפונקציה $\Psi(t,s)\equiv 0$ מקיימת את (2.1.2) באופן טריוויאלי. לכן, בגלל יחידות מד"ר $\Psi(t,s)\equiv 0$ כפונקציה של t. נניח כי התנאי $ay_0'-bx_0'|_{S_0}\neq 0$. לכן היעקוביאן יהיה רגולי בסביבה של s_0 על Γ ולכן גם עבור (t,s) מספיק קרובים ל$(0,s_0)$. ואז נוכל לקבל פתרון יחיד בסביבה מספיק קטנה של $(x_0(s_0),y_0(s_0))$. ■

הערה 2.1.3 מה בעצם אומר התנאי באופן גיאומטרי?
הוא אומר כי הוקטור:

$$(a(x_0(s),y_0(s),u_0(s)),b(x_0(s),y_0(s),u_0(s)))$$

איננו מקביל לווקטור $(x_0'(s),y_0'(s))$ במישור.
הראשון הוא השלכה של המשיק לקרקטריסטיקה היוצאת מ $(x_0(s),y_0(s),u_0(s))\in\Gamma$ על $\mathbb{R}^2$.
לכן, התנאי אומר שההשלכות של הקרקטריסטיקה וΓ הן טרנסוורסליות (יש בניהן זווית לא טריוויאלית, לא אפס) לכל s בקטע הפרמטרי (על Γ). ולכן, התנאי נקרא תנאי הטרנסוורסליות.
בקיצור, Γ איננו קרקטריסטי עבור שום s בסביבה s_0.

2.2 קווים קרקטריסטיים

המקרה ה"פרטי" של משוואה קוואזי־לינארית הוא כמובן המשוואה הלינארית:

$$a(x,y)\,u_x + b(x,y)\,u_y = c_0(x,y)\,u + c_1(x,y) \tag{2.2.1}$$

המשוואות הקרקטריסטיות:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x(t,s)}{\mathrm{d}t} = a\left(x(t,s), y(t,s)\right) \\ \frac{\mathrm{d}y(t,s)}{\mathrm{d}t} = b\left(x(t,s), y(t,s)\right) \end{cases}$$

עומדות בפני עצמן.

הקווים הקרקטריסטיים נקבעים (במישור x, y) ללא תלות ב $u_0(s)$!

מהי המשמעות שלהם? לאורך כל קו כזה, הפתרון מתקדם "באופן עצמאי". כלומר:

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}u(t,s)}{\mathrm{d}t}}_{\text{אגף שמאל ב (2.2.1)}} = c_0\left(x(t,s), y(t,s)\right) u(t,s) + c_1\left(x(t,s), y(t,s)\right)$$

s פרמטר!

נזכור כי: $x(t,s), y(t,s)$ כבר ידועים. זאת משוואה לינארית מסדר ראשון ל $u(t,s)$ כפונקציה של t. וביודענו את
31/10/2012 $u(0,s) = u_0(s)$ אנו יודעים את $u(t,s)$ לכל $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

2.3 דוגמה למשוואה לינארית

נחזור להתבונן במוושאה כמעט והכי פשוטה:

$$u_y + cu_x = 0$$

נתונה:

$$u(x,0) = h(x)$$

ו $c \in \mathbb{R}$ קבוע.

הקווים האופיניים הם:

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = c}_{x(t,s)=s+ct}, \quad \underbrace{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 1}_{y(t,s)=t}, \quad \underbrace{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0}_{u(t,s)=h(s)}$$

ולכן:

$$u(x,y) = h(x - cy)$$

נבדוק:

$$\begin{aligned} u_x &= h'(\ldots)\cdot 1 \\ u_y &= h'(\ldots)(-c) \end{aligned}$$

כלומר אם נציב במשוואה אכן נקבל 0.

הפתרון הנ"ל קבוע על כל קו מהצורה $x - cy = k = \text{const}$. כלומר, על כל אחד מהקווים המקבילים של המשפחה $x = cy + k$, או $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = x$.

במילים אחרות, הפתרון הוא "גל נוסע" במהירות $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = c$.

נשים לב כי:

$$\begin{aligned} (x_0'(s), y_0'(s)) &= (1,0) \\ (a,b) &= (c,1) \end{aligned}$$

כלומר, מתקיים תנאי הטרנסוורסליות.

2.4 דוגמה של משוואה קוואזי לינארית

נרצה קצת לסבך את העניינים, נעבור למשוואה הקוואזי־לינארית:

$$u_y + uu_x = 0 \tag{2.4.1}$$

משוואה זו נקראת משוואת Burgers. היא קוואזי־לינארית, לכן שוב אם: $u(x,0) = h(x)$ ו $h(x)$ חלקה, אזי קיים פתרון יפה בסביבת $y = 0$. כאשר מתקיים תנאי הטרנסוורסליות כאשר:

$$(x_0'(x), y_0'(s)) \equiv (1,0) \nparallel (a(x_0(s), y_0(s), u_0(s)), b(\ldots)) \equiv (u_0(s), 1)$$

לכן מתקיים תנאי הטרנסוורסליות תמיד כיוון שהקאורדינטה השניה תמיד יש 1.

אנו רוצים לפתור בשיטה של הוכחת המשפט, אבל ראשית נביט בנקודת מבט גיאומטרית.

במקרה הזה $c = u$ שזה מוזר. לאורך הקו ששיפועו u הפונקציה הפותרת u תהא קבועה. לכן הקו חייב להיות ישר ושיפועו יהיה u איפה שהוא התחיל, כלומר בחיתוך עם ציר הx, נגדיר נקודה כזו בתור $s_0 = x_0$ כלומר, שיפועו $u(x_0, 0) = h(x_0)$.

נניח כעת כי יש לנו $x_1 < x_0$ כך ש $h(x_1) > h(x_0)$ אבל נשים לב שבמקרה כזה תיהיה לנו התנגשות של הקווים בנקודה החיבור, ולכן כאן נשבר לנו הפתרון מכיוון שאז:

$$u = \begin{cases} h(x_1) \\ h(x_0) \end{cases}$$

זה מראה לנו שלא תמיד קיים פתרון לכל זמן.

כעת נפתור את זה בשיטה הקודמת:

$$\begin{aligned} a(x,y,u) &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u(t,s) \\ & \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 1 \\ & \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0 \end{aligned}$$

מכאן נובע, כי $u(t,s) = h(s)$, $y(t,s) = t$ (מכיוון שבזמן $t = 0$ הוא שווה 0) ולבסוף: $x(t,s) = s + th(s)$.

לכן:

$$\boxed{u(x,y) = h(x - yu(x,y))}$$

זוהי משוואה סתומה ל $u(x,y)$ שיש לה פתרון חלק עבור סביבה קטנה של קטע (α, β) סופי לכל $\alpha < \beta \in \mathbb{R}$ בגלל משפט הפונקציות הסתומות.

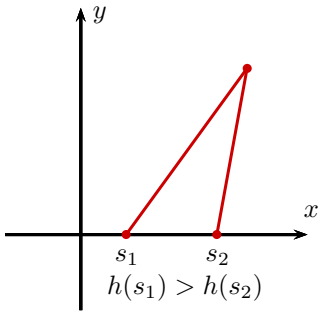
בדוגמה הקודמת הפתרון של $u(x,y)=h(x-cy)$ היה פתרון יפה לכל (x,y) כאשר רמת החלקות שלו (הרגולריות שלו) זהה לזו של h הנתונה.

מצד שני, ראינו כי זה גל נוסע במקום לדבר על כמה חלקות יש, אנו רוצים לדבר על המב ההפוך. כאשר $h(x)=1$, $u(x,0)=1$ עבור $x<0$ ואילו: $u(x,0)=0$ עבור $x>0$ ונקבל למעשה פונקציית מדרגה אשר פותרת את המשוואה על אף שאיננו יודעים כיצד לגזור אותה. 06/11/2012

איך אנו רואים את החילוץ של u בעזרת משפט הפונקציות הסתומות? נסמן: $G(x,y,u)=u-h(x-yu)$. ואז אנו דורשים: $G(x,y,u)=0$. לשם שימוש במשפט הפונקציות הסתומות לחליוץ u נדרש $\frac{\partial G}{\partial u}\neq 0$ כלומר:

$$1+h'y\neq 0$$

כלומר, כל זמן ש: $y\neq -\frac{1}{h'}$ ניתן לפתור ולקבל את $u(x,y)$. נניח כי $h(s_1)>h(s_2)$ כאשר $s_1<s_2$. אבל אז השיפוע של הקו הקרקטריסטי של s_2 יהיה גדול יותר כאשר אנו מתקדמים ב y (למעשה בt) ועל כן הקווים יחתכו.



באופן כללי, אם $h'(s)<0$ אזי הקרקטיסטיקה המתחילה ב s_1 תחתוך את זאת המתחילה ב s_2 אם $s_2>s_1$.

אם נחזור לתנאי $y=-\frac{1}{h'(s)}$ אזי ה"שבר" יקרה ב: $0<y_c=\min\limits_{s\in\mathbb{R}}\left(-\frac{1}{h'(s)}\right)$. כלומר, קיים פתרון קלאסי $0\leq y<y_c$.

נחזור (עבור $0<y<y_c$) למשוואה הסתומה: $u(x,y)=h(x-yu(x,y))$. אנו יודים כי ניתן לגזור:

$$u_x(x,y)=h'(x-yu(x,y))(1-yu_x(x,y))\Rightarrow u_x(x,y)\left[1+yh'(x-yu(x,y))\right]=h'(x-yu(x,y))$$

כל זמן ש $1-yh'(x-yu(x,y))\neq 0$ ניתן לחשב את u_x.

פרק 3

פתרון חלש

3.1 מהו פתרון חלש?

בהמשך לדגומה בסוף הפרק הקודם, אנו מעוניינים בפתרון שיהיה קיים מעבר ל $y = y_c$ ($y > y_c$). ולכן נצטרך להגדיר פתרון חלש (weak solution).

נרשום את משוואת Burgers ($u_y + uu_x = 0$) בצורה:

$$u_y + \frac{1}{2}\left(u^2\right)_x = 0$$

הערה 3.1.1 הסימן $\left(u^2\right)_x$ משמעותו גזירה של u^2 לפי x, דהיינו: $\left(u^2\right)_x = 2uu_x$.

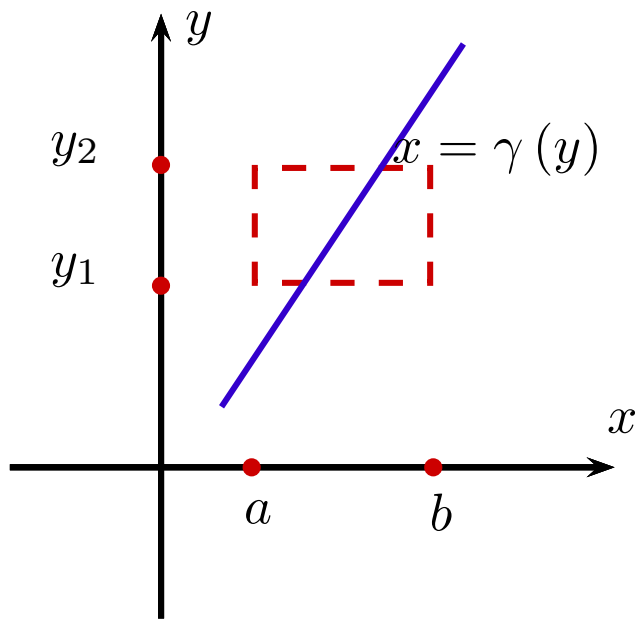
נחשוב על u כפתרון קלאסי המאפשר שימוש במשפטי אינפי, בפרט המשפט היסודי, ונבצע אינטגרציה על קטע $[a,b] \subseteq \mathbb{R}_x$ עבור $0 < y$ קבוע.

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_a^b u\left(\xi, y\right)\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2}\left(u\left(b,y\right)^2 - u\left(a,y\right)^2\right) = 0 \tag{3.1.1}$$

הגדרה 3.1.2 (לא באמת הגדרה פורמלית)
אם השיוויון הנ"ל מתקיים לכל $a, b \in \mathbb{R}$ ולכל $y \in \mathbb{R}_+$ נאמר כי $u\left(x,y\right)$ היא פתרון חלש של המשוואה $u_y + uu_x = 0$.
בפרט, $u\left(x,y\right)$ לא חייבת אפילו להיות רציפה.

3.2 דוגמה של שימוש בפתרון חלש עם משוואת בורגרס

לדוגמה, נניח שאנו נמצאים במסגרת של מלבן $(a,b) \times (y_1, y_2) \subseteq \mathbb{R}^2$:



ומניחים כי קיים פתרון חלש $u(x,y)$ שהוא בעל קפיצה לאורך קו חלק $x = \gamma(y)$. בשני החלקים של המלבן (המופרדים ע"י הקו) הפונקציה $u(x,y)$ חלקה.

לפי 3.1.1:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\int_a^{\gamma(y)} u(\xi,y)\,\mathrm{d}\xi + \int_{\gamma(y)}^{b} u(\xi,y)\,\mathrm{d}\xi\right] + \frac{1}{2}u(b,y) - \frac{1}{2}u(a,y)^2 = 0$$

לכן:

$$\underbrace{\gamma'(y)\,u\left(\gamma(y)^-,y\right)}_{\frac{\partial}{\partial y}\left[\int_a^{\gamma(y)}\right]} + \int_a^{\gamma(y)} \underbrace{-\frac{1}{2}\left(u^2(\xi,y)\right)_\xi}_{\text{לפי המשוואה}}\mathrm{d}\xi - \underbrace{\gamma'(y)\,u\left(\gamma(y)^+,y\right)}_{\frac{\partial}{\partial y}\left[\int_{\gamma(y)}^{b}\right]} +$$
$$\int_{\gamma(y)}^{b} -\frac{1}{2}\left(u^2(\xi,y)\right)_\xi \mathrm{d}\xi + \frac{1}{2}u(b,y)^2 - \frac{1}{2}u(a,y)^2 = 0$$

ולכן:

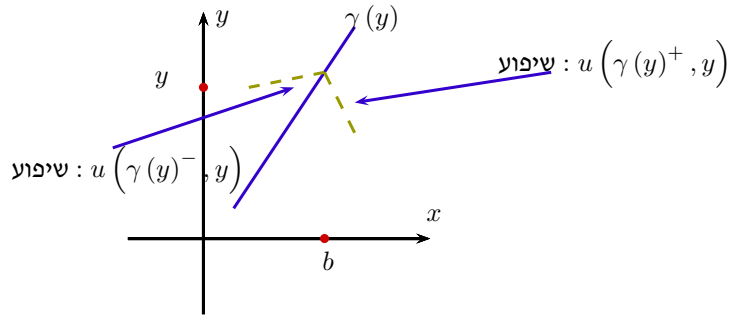
$$\gamma'(y)\left[u\left(\gamma(y)^-,y\right) - u\left(\gamma(y)^+,y\right)\right] - \frac{1}{2}\left[u\left(\gamma(y)^-,y\right)^2 - \cancel{u(a,y)^2}\right] -$$
$$\frac{1}{2}\left[\cancel{u(b,y)^2} - u\left(\gamma(y)^+,y\right)^2\right] + \cancel{\frac{1}{2}u(b,y)^2} - \cancel{\frac{1}{2}u(a,y)^2} = 0$$

$$\gamma'(y)\left[u\left(\gamma(y)^-,y\right) - u\left(\gamma(y)^+,y\right)\right] - \frac{1}{2}u\left(\gamma(y)^-,y\right)^2 + \frac{1}{2}u\left(\gamma(y)^+,y\right)^2 = 0$$

מייטב ענייננו הוא ב $\gamma'(y)$ לכן נבודד אותו:

$$\gamma'(y) = \frac{1}{2}\cdot\frac{u\left(\gamma(y)^-,y\right)^2 - u\left(\gamma(y)^+,y\right)^2}{u\left(\gamma(y)^-,y\right) - u\left(\gamma(y)^+,y\right)} = \frac{1}{2}\left[u\left(\gamma(y)^-,y\right) + u\left(\gamma(y)^+,y\right)\right]$$

אם משווים זאת עם שיפוע הקרקטריסטיקות (דהיינו $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=u(x,y)$), נמצא את המסקנה הגיאומטרית הבאה:



$$\underbrace{u\left(\gamma(y)^{-},y\right)}_{\text{חיובי בציר}}>\underbrace{u\left(\gamma(y)^{+},y\right)}_{\text{שלילי בציר}}.$$

כלומר שיפוע קו האי־הרציפות הוא ממוצע השיפועים האופיינים משני צדדיו.

הגדרה 3.2.1 פתרון $u(x,y)$ שיש לו את המבנה הזה (קו אי־רציפות חלק המבדיל שני תחומים חלקיים של u), נקרא גל הלם (shock wave).

הערה 3.2.2 העובדה ש:

$$\gamma'(y)=\frac{1}{2}\left[u\left(\gamma(y)^{-},y\right)+u\left(\gamma(y)^{+},y\right)\right] \tag{3.2.1}$$

נקראת Rankine-Hugoniot.

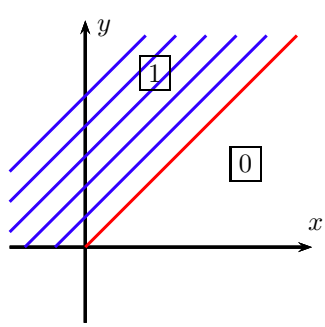
הערה 3.2.3 הקווים הקרקטריסטיים (האופיינים) יכולים להראות כקווים אקוסטיים. כלומר שיפועם הוא מהירות התנועה של ההפרעה.
מנקודת מבט זאת, אומר תנאי RH (3.2.1) כי מהירות גל ההלם היא ממוצע מהירויות ההפרעות משני צדדיו. בהנחה שהייתה לנו: $u\left(\gamma(y)^{-},y\right)>u\left(\gamma(y)^{+},y\right)$. כלומר, קו ההלם הוא סבסוני (subsonic) ביחס לאחוריו ($\gamma(y)^{-}$) וסופרסוני (supersonic) ביחס למצב שלפניו ($\gamma(y)^{+}$). סוני$\Leftarrow$ מתייחס לשיפוע הקרקטריסטיקה.

הערה 3.2.4 חוק השימור (balance law) (ומכאן $u_y+\frac{1}{2}\left(u^2\right)_x=0$).
נחשוב על (3.1.1) בתורה הבאה: $u(x,y)$ היא איזושהי צפיפות חומר כך ש $\int_a^b u(\xi,y)\,\mathrm{d}\xi$ מבטא את כמות החומר בקטע $[a,b]$ בזמן y. $\frac{\partial}{\partial y}\int_a^b u(\xi,y)\,\mathrm{d}\xi$ הוא לכן קצב ההשתנות של הכמות הזאת. $\frac{1}{2}u(b,y)^2$ לכן מבטא את הכמות הזורמת ימינה דרך b (כלומר מה שיוצא מהקטע) וכן $\frac{1}{2}u(a,y)^2$ הכמות הזורמת ימינה דרך a (כלומר מה שנכנס).

07/11/2012

תרגילים 1-13, בסעיף 2.10 עמוד 67.

נתבונן שוב במקרה של $u_y+u_x=0$. אנו רוצים להבין מה המשמעות של הפתרון: $u(x,0)=1$ עבור $x<0$ ו: $u(x,0)=0$ עבור $x>0$.



לדבר זה קוראים הפיסיקאים קוראים לו מדרגה מתקדמת.
לשם כך, נשתמש בפתרון חלש, נבצע אינטגרציה ב x ונדרוש:

$$\partial_y \int_a^b u(\xi, y)\,\mathrm{d}\xi + u(b,y) - u(a,y) = 0$$

אם קיים קו קפיצה חלק $x = \gamma(y)$ (למעשה הקו האדום באיור) אז:

$$\partial_y \left[\int_a^{\gamma(y)} u(\xi,y)\,\mathrm{d}\xi + \int_{\gamma(y)}^b u(\xi,y)\,\mathrm{d}\xi \right] + u(b,y) - u(a,y) = 0 \Rightarrow$$

$$\gamma'(y)\left[u\left(\gamma(y)^-, y\right) - u\left(\gamma(y)^+, y\right)\right] + \int_a^{\gamma(y)} \cancelto{-u_\xi(\xi,y)}{u_y(\xi,y)}\mathrm{d}\xi + \int_{\gamma(y)}^b \cancelto{-u_\xi(\xi,y)}{u_y(\xi,y)}\mathrm{d}\xi + u(b,y) - u(a,y) = 0 \Rightarrow$$

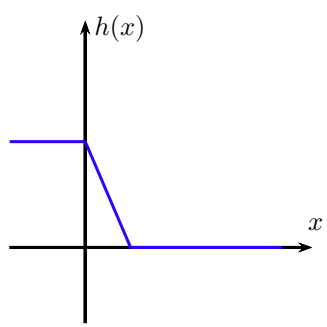
$$\gamma'(y)\left[u\left(\gamma(y)^-, y\right) - u\left(\gamma(y)^+, y\right)\right] - \left[u\left(\gamma(y)^-, y\right) - \cancel{u(a,y)} + \cancel{u(b,y)} - u\left(\gamma(y)^+, y\right)\right] + \cancel{u(b,y)} - \cancel{u(a,y)} = 0 \Rightarrow$$

$$\gamma'(y)\left[u\left(\gamma(y)^-, y\right) - u\left(\gamma(y)^+, y\right)\right] = u\left(\gamma(y)^{-1}, y\right) - u\left(\gamma(y)^+, y\right) \Rightarrow \gamma'(y) \equiv 1$$

3.2.1 דוגמאות לפתרונות חלשים במשוואת Burgers $u_y + uu_x = 0$

הדוגמה הראשונה שנרצה להתבונן בה היא:

$$h(x) = \begin{cases} 1 & x \le 0 \\ 1 - \frac{x}{\alpha} & 0 \le x \le \alpha \\ 0 & x \ge \alpha \end{cases}$$



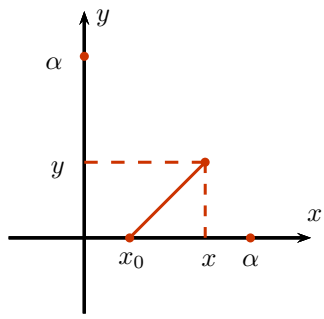
אנו מצפים לפתרון קלאסי אם $y < y_c = \min\left(-\frac{1}{h'}\right) = \alpha$.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = u\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 1\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 0$$

כמו שכבר ראינו:

$$\begin{aligned} x(t,s) &= s + th(s) \\ y(t,s) &= t \\ u(t,s) &= h(s) \end{aligned}$$

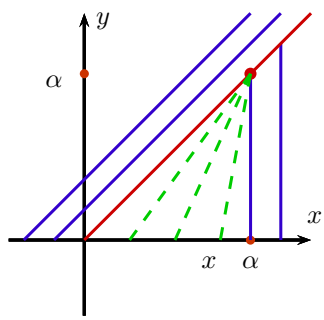
$$u(x,y) = h(x - tu)$$



$$\begin{aligned} 1 - \frac{x_0}{\alpha} &= u(x,y) \\ x_0 &= x - y + y\frac{x_0}{\alpha} \\ x_0\left(1 - \frac{y}{\alpha}\right) &= x - y \end{aligned}$$

$$u(x,y) = \frac{x - x_0}{y} = \frac{x - \frac{x-y}{1-\frac{y}{\alpha}}}{y} = \frac{x\left(1 - \frac{y}{\alpha}\right) - (x-y)}{\left(1 - \frac{y}{a}\right)y} = \frac{\left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)}{\left(1 - \frac{y}{\alpha}\right)}$$

כלומר החל מהנקודה α הקווים הקרקטריסטיים עולים למעלה בניצב לציר הx ואילו כל היתר נראים כי:

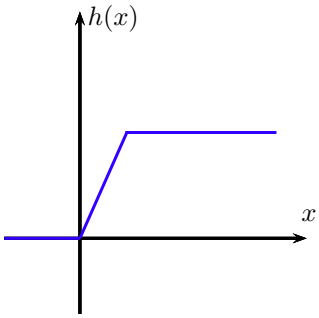


(בירקרק הקרקטריסטיקות בתחום $0 < x < \alpha$, בכחול היתר, הקו האדום הוא הגל הלם)
כלומר, כל הקרקטריסטיקות מתכנסות לנקודה (α, α) ושם הן נפגשות.
מה קורה כאשר $\alpha \to 0^+$? הפתרון שלנו: $u(x,y) = \frac{x-\alpha}{y-\alpha}$ לפחות כאשר $y < y_c = \alpha$ לא נדון בזה השיעור, הטענה
היא שב 0 נקבל $\frac{1}{2}$ וביתר נקבל $0, 1$ כמו בדוגמה עם המדרגה. 13/11/2012

3.3 פתרון לא יחיד

כעת נרצה לעבור להתבונן על מקרה דומה רק קצת שונה:

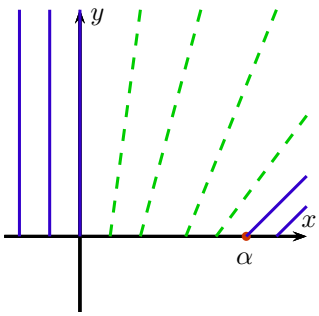
$$h(x) = \begin{cases} 0 & x \le 0 \\ \frac{x}{\alpha} & 0 \le x \le \alpha \\ 1 & x \ge \alpha \end{cases}$$



הדברים הברורים: $u \equiv 0$ עבור $x \leq 0$ וכל $y \geq 0$. עבור $x \geq \alpha$ הקרקטרסיסטיקות הן בשיפוע 1 ונושאות ערך $u = 1$, כלומר $u(x,y) = 1$ אם $x \geq y + \alpha$.

כעת, אם $0 < x_0 < \alpha$ אזי $u = \frac{x_0}{\alpha}$ ולאורך הקו $x = x_0 + \frac{x_0}{\alpha} y = x_0 \left(1 + \frac{y}{\alpha}\right)$ נקבל:

$$u(x,y) = \frac{x}{\left(1 + \frac{y}{\alpha}\right)\alpha} = \frac{x}{\alpha + y}$$



במקרה הזה, אין לנו ערך קריטי y_c! והפתרון ממשיך להיות רציף לכל $y > 0$.

כאשר $y \gg 1$, אנו מקבלים כי הפונקציה $h(x)$ הולכת ו"מתרווחת" באופן לינארי. במקום שהעליה תסתיים ב α, היא מסתיימת ב $y + \alpha$.

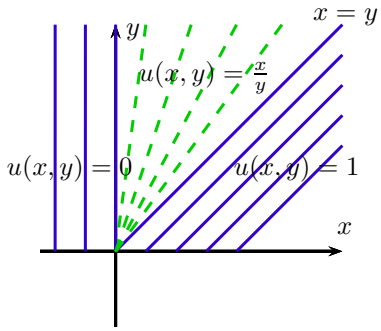
הגדרה 3.3.1 פתרון כזה נקרא "גל התרווחות" (rarefaction expansion wave).

נסתכל בפתרון הגבולי $\alpha \to 0^+$. אם נתבונן בתמונה של הקרקטריסטיקות, כל הקווים באגף הימני מתקרבים לאפס. באופן דומה ניתן באופן פורמלי להשאיף את α לאפס ב $\frac{x}{\alpha+y}$.

הפתרון הגבולי יהיה:

$$\overline{u}(x,y) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{x}{y} & 0 \leq x \leq y \\ 1 & x \geq y \end{cases}$$

כלומר הפתרון הקרקטריסטי הוא:

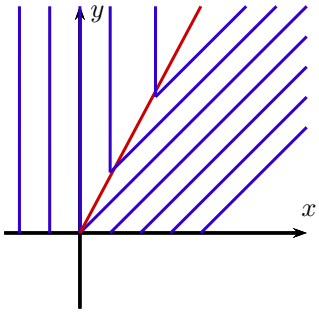


נבחין כי בתחום הירקרק, השיפוע של הקרקטריסטיקה הוא השיפוע של הקו המחבר את הראשית לנקודה (x,y).

הגדרה 3.3.2 הפתרון $\overline{u}(x,y)$ נקרא גל התרוחות מרוכז (centered rarefaction).

תרגיל: לוודא שזה פתרון חלש.

מה בדבר פתרון עם קפיצה? כלומר קו אי רציפות. כאשר $u\equiv 0$ בכל התחום ה"שמאלי" לקו הקפיצה ו $u\equiv 1$ מימין לקו הקפיצה. כלומר, פתרון עם קפיצה $x=\gamma(y)$ כאשר $\gamma'y=\frac{1}{2}$. ניתן לראות כי גם זה פתרון חלש לפי RH (3.2.1).



מסקנה 3.3.3

הפתרון הראשון שראינו, וגם הפתרון עם הקפיצה הם שני פתרונות חלשים לאותו תנאי התחלה:

$$u(x,0)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

כלומר, הגדרת הפתרון החלש גרמה לאי־יחידות. למעשה, ה"פתרון הנכון" הוא הראשון. ה"טבע" אומר אם אין צורך בקפיצה, אל תשתמש בה.

אנו נגע בהמשך מה המשמעות של ה"טבע", מכיוון שכן יש לו אנלוג מתמטי.

היחידות המתימטית נובעת מהתנאי הבא: בכל קפיצה "מותרות" הקקטיסטיקות "נכנסות" לקפיצה כאשר $y\uparrow$ (y גדל). זהו תנאי האנטרופיה של Lax (Lax entropy law).

3.4 חוק השימור הכללי

מלים אחדות על חוק השימור הכללי (Conservation Law):

$$\partial_u u+\partial_x\left(F(u)\right)=0 \tag{3.4.1}$$

הערה 3.4.1 לBurgers, $F(u)=\frac{1}{2}u^2$.

במידה וF פונקציה חלקה של $u\in\mathbb{R}$, אז מכלל השרשרת:

$$\partial_y u+F'(u)\,\partial_x u=0$$

לכן לפתרון חלק, הקרקטריסטיה היא:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=1\quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=F'(u)\quad \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=0$$

במילים אחרות, הפתרון (החלק) מקיים u קבועה לאורך הקו:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=F'(u)$$

כלומר, הקווים הקרקטריסטיים במישור x,y יהיו קווים ישרים.

✎ **דוגמה 3.4.2 :** גם אם היה מדובר ב:

$$\partial_y u + \cos u \partial_X u = 0$$

במקרה זה:

$$F(u) = \sin(u)$$

ואז אם הם נחתכים, לא יתקיים יותר (כלומר ל y גדול יותר) פתרון חלק.
אחרי־כן, יהיה פתרון עם קפיצות.

הגדרה 3.4.3 פתרון חלש: פתרון חלש $u(x,y)$ הוא פתחון חסום, רציף למקוטעין, המקיים לכל $y > 0$ ולכל $a < b \in \mathbb{R}$:

$$\partial_y \int_a^b u(\xi, y)\,\mathrm{d}\xi + F(u(b,y)) - F(u(a,y)) = 0$$

אם הפתרון כולל קפיצה $x = \gamma(y)$ שמשני צדדיה הפתרון חלק, ו $a < \gamma(y) < b$, נקבל כי:

$$\partial_y \left[\int_a^{\gamma(y)} u(\xi, y)\,\mathrm{d}\xi + \int_{\gamma(y)}^b u(\xi, y)\,\mathrm{d}\xi \right] + F(u(b,y)) - F(u(a,y)) = 0$$

נקבל:

$$\gamma'(y)\left(u^- - u^+\right) + \int_a^{\gamma(y)} \left[-\partial_\xi F(u(\xi,y))\right]\mathrm{d}\xi + \int_{\gamma(y)}^b \left[-\partial_\xi F(u(\xi,y))\right]\mathrm{d}\xi + F(u(b,y)) - F(u(a,y)) = 0$$

כאשר:

$$u^\pm = u\left(\gamma(y)^\pm, y\right)$$

כעת:

$$\gamma'(y)\left(u^- - u^+\right) - \left[F\left(u^-\right) - \cancel{F(u(a,y))} + \cancel{F(u(b,y))} - F\left(u^+\right)\right] + \cancel{F(u(b,y))} - \cancel{F(u(a,y))} = 0$$

לכן קיבלנו:

$$\gamma'(y)\left(u^- - u^+\right) - \left[F\left(u^-\right) - F\left(u^+\right)\right] = 0$$

כלומר:

$$\gamma'(y) = \frac{F(u^-) - F(u^+)}{u^- - u^+} = \underbrace{\frac{[F(u)]}{[u]}}_{\text{מידת הקפיצה}}$$

כלומר הכוונה בצעד האחרון היא שכיוון הקפיצה לא חשוב, העיקר שזה יהיה קונסיסטנטי. כמו כן, אנו לא מחלקים באפס כי יש קפיצה.

דוגמה 3.4.4 :

$$F(u)=\frac{1}{2}u^2\Rightarrow\frac{[F(u)]}{[u]}=\frac{1}{2}\left(\left(u^+\right)^2-\left(u^-\right)^2\right)=\frac{1}{2}\left(u^+-u^-\right)\left(u^++u^-\right)$$

תנאי האנטרופיה (של Lax) יגיד כי קפיצה תהיה מותרת במקרה זה רק אם הקרקטריסטיקות "נכנסות" לקפיצה כאשר y גדל. כיוון שהשיפועים הם הם $F'(u^-),F'(u^+)$, אז אנו צריכים שהתנאי יהיה: $F'(u^-)>\gamma(y)>F'(u^+)$.

דוגמה 3.4.5 : זאת אומרת, אם $F(u)=\frac{1}{2}u^2$ במקרה של בורגרס, אז: $u^->u^+$. כלומר, הקפיצה היא רק קפיצה יורדת, המקרה הראשון שראינו.

דוגמה 3.4.6 : נסתכל שוב במשוואה (2.4.1) (Burgers). נכפיל ב u:

$$\left(\frac{1}{2}u^2\right)_y+\left(\frac{1}{3}u^3\right)_x=0$$

אזי תנאי RH (3.2.1) לקפיצה:

$$\gamma'(y)=\frac{\left[\frac{1}{3}u^3\right]}{\left[\frac{1}{2}u^2\right]}=\frac{\frac{1}{3}\left(\left(u^+\right)^3-\left(u^-\right)^3\right)}{\frac{1}{2}\left(\left(u^+\right)^2-\left(u^-\right)^2\right)}=\frac{2}{3}\frac{\left(u^+\right)^2+u^+u^-+\left(u^-\right)^2}{u^++u^-}\neq\frac{1}{2}\left(u^++u^-\right)$$

במילים אחרות, תנאי RH (3.2.1) לשיפוע הקפיצה אינו אינווריאנטי תחת פעולות אלגבריות פשוטות על המשוואה. לכן, המשוואה עצמה צריכה להיות נתונה.

14/11/2012

חלק II

משוואת הגלים

פרק 4

משוואת הגלים במימד יחיד

4.1 הגדרת המשוואה

משוואת הגלים הינה:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 \tag{4.1.1}$$

$c > 0$ קבוע.
אם $v(x,t)$ פתרון חלק (C^2) של $v_t - cv_x = 0$, נגזור לפי t:

$$v_{tt} - c(v_t)_x = 0$$

אבל $v_t = cv_x$ מהמשוואה, לכן קיבלנו כי:

$$v_{tt} - c(cv_x)_x = 0 \Rightarrow v_{tt} - c^2 v_{xx} = 0$$

כלומר, v היא פתרון משוואת הגלים. כלומר מי שפותר את המשוואה שכבר הכרנו, למעשה פותר את משוואת הגלים.
כתרגיל, ניתן להראות כי גם $v_t + cv_x = 0$ פותר את משוואת הגלים.
אז במקום לכתוב את משוואת הגלים ניתן לתוב:

$$(u_t - cu_x)(u_t + cu_x) = 0$$

וזה כמעט נכון, אבל לא באמת נקבל את משוואת הגלים, אלא:

$$u_t^2 - c^2 u_x^2 = 0$$

וזו משוואת האיקונל, שנדבר עליה.

4.2 הפתרון הכללי למשוואת הגלים

נניח כי $u(x,t)$ פתרון קלאסי בכל $\mathbb{R}^2$. נגדיר שינוי משתנים:

$$\begin{aligned} \xi &= x + ct \\ \eta &= x - ct \end{aligned}$$

כך ש: $u(x,t) = w(\xi,\eta)$. זאת אומרת:

$$u_t = w_\xi \xi_t + w_\eta \eta_t = w_\xi \cdot c - c w_\eta = c\left(w_\xi - w_\eta\right)$$

ולכן:

$$u_{tt} = c\left(w_{\xi\xi} c + w_{\xi\eta}(-c) - w_{\eta\xi} c - w_{\eta\eta}(-c)\right) = c^2\left(w_{\xi\xi} + w_{\eta\eta}\right) - 2c^2 w_{\xi\eta}$$

כמו כן:

$$u_x = w_\xi \xi_x + w_\eta \eta_x = w_\xi + w_\eta$$

ולכן:

$$u_{xx} = w_{\xi\xi} + w_{\xi\eta} + w_{\eta\xi} + w_{\eta\eta} = \left(\omega_{\xi\xi} + w_{\eta\eta}\right) + 2w_{\xi\eta}$$

לכן:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = -4c^2 w_{\xi\eta} = 0$$

דהיינו: $w(\xi,\eta)$ מקיימת: $w_{\xi\eta} \equiv 0$!

מסקנה 4.2.1

$w_\xi(\xi,\eta)$ איננה פונקציה של η, מכיוון שנגזרתה לפי η מתאפסת.

לכן:

$$w_\xi(\xi,\eta) = f(\xi)$$

ואז:

$$w(\xi,\eta) = \underbrace{\int^{\xi} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi}_{=F(\xi)} + G(\eta)$$

וקיבלנו למעשה:

טענה 4.2.2

כל פתרון חלק של משוואת הגלים נתון ע"י:

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$$

$F(x+ct)$ קבוע על כל קו מהצורה: $x+ct=k$ (למעשה, מדובר בפרופיל נוסע במהירות $-c$). $G(x-ct)$ קבוע על כל קו מהצורה $x-ct=k$.

שתי משפחות הקווים האלה מהוות את משפחת הקרקטריסטיקות של המשוואה.

הערה 4.2.3 אלה הן משפחות הקרקטריסטיקות של $v_t \pm c v_x = 0$.

צורת ניסוח: כל פתרון של משוואת הגלים מורכב משני גלים נוסעים במהירויות $\pm c$.

4.3 פתרון ספציפי

ראינו כי הפתרון הכללי הוא:

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct) \tag{4.3.1}$$

כיצד נמצא פתרון ספציפי של המשוואה? נשים לב כי כל בחירה של $F, G \in C^2(\mathbb{R})$ תיתן פתרון של המשוואה. גם אם F תהיה לא רציפה זה יהיה פתרון (חלש).
נחפש פתרון $u(x,t)$ כך ש:

$$u(x,0) = f(x)$$

ו $x \in \mathbb{R}$. אנו בכל המישור, אין לנו תנאי שפה. בפרט, בהצבת $t=0$ ב(4.3.1) יש לנו:

$$f(x) = u(x,0) = F(x) + G(x)$$

אבל זה לא מספיק לנו, כי צריך למצוא F, G. לכן, נצטרך עוד נתון שהוא:

$$u_t(x,0) = g(x)$$

הערה 4.3.1 u_x לא יעזור לנו כי גם כך יש לנו את $f(x)$, הנגזרת שלו לא נותנת לנו מידע נוסף.
הערה נוספת שלי: גם u_t במשוואת הגלים, בפיתוח הניוטוני, נותן לנו את המהירות של הגל בנקודה, מידיעת המהירות והמיקום נדע כיצד הוא מתקדם.

$$u_t(x,t) = cF'(x+ct) - cG'(x-ct)$$

ובפרט:

$$g(x) = u_t(x,0) = C\left(F'(x) - G'(x)\right)$$

ולכן:

$$\int_0^x g(\beta)\,\mathrm{d}\beta = c\left[F(x) - G(x)\right] - c\left[F(0) - G(0)\right]$$

כעת, יש לנו שתי משוואות, ואיתן ניתן לחלץ את F ואת G :

$$\begin{cases} \int_0^x g(\beta)\,\mathrm{d}\beta = c\left[F(x) - G(x)\right] - c\left[F(0) - G(0)\right] \\ cf(x) = c\left(F(x) + G(x)\right) \end{cases}$$

מחיבור המשוואות נקבל:

$$cf(x) + \int_0^x g(\beta)\,\mathrm{d}\beta = 2cF(x) - c\left[F(0) - G(0)\right]$$

ומחיסורן נקבל:

$$cf(x) - \int_0^x g(\beta)\,\mathrm{d}\beta = 2cG(x) + c\left[F(0) - G(0)\right]$$

נחלק ב$2c$ את כלל המשוואות:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2c}\int_0^x g(\beta)\,\mathrm{d}\beta = F(x)-\frac{1}{2}[F(0)-G(0)] \\ \frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2c}\int_0^x g(\beta)\,\mathrm{d}\beta = G(x)+\frac{1}{2}[F(0)-G(0)] \end{cases}$$

לכן:

$$\begin{aligned} F(x+ct) &= \frac{1}{2}[F(0)-G(0)]+\frac{1}{2}f(x+ct)+\frac{1}{2c}\int\limits_0^{x+ct} g(\beta)\,\mathrm{d}\beta \\ G(x-ct) &= -\frac{1}{2}[F(0)-G(0)]+\frac{1}{2}f(x-ct)-\frac{1}{2c}\int\limits_0^{x-ct} g(\beta)\,\mathrm{d}\beta \end{aligned}$$

ועל כן:

$$u(x,t)=F(x+ct)+G(x-ct)=\frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} g(\beta)\,\mathrm{d}\beta$$

כלומר קיבלנו את נוסחאת D'Alembert:

$$\boxed{u(x,t)=\frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2}+\frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} g(\beta)\,\mathrm{d}\beta} \tag{4.3.2}$$

בהינתן $u(x,0)=f(x)\,,u_t(x,0)=g(x)$.

27/11/2012 בעיה כזו נקראת בעיית Cauchy, או התחלה טהורה.

4.4 יציבות פתרונות

משפט 4.4.1 יציבות פתרונות

בהינתן $\varepsilon>0$ ובהינתן $T>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם:

$$\left\|f-\tilde{f}\right\|_\infty+\|g-\tilde{g}\|_\infty+\left\|F-\tilde{F}\right\|_{\infty,T}<\delta\Rightarrow\|u-\tilde{u}\|_{\infty,T}<\varepsilon$$

הנורמות של פונקציות ב x,t.

$$\left\|F-\tilde{F}\right\|_{\infty,T}:=\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}\\|t|<T}}\left|F(x,t)-\tilde{F}(x,t)\right|$$

ו u הוא הפתרון המתאים ל $\tilde{f},\tilde{g},\tilde{F}$.

הוכחה:

$$u(x,t)=\frac{1}{2}(f(x+ct)+f(x-ct))+\frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} g(\xi)\,\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2c}\int_{G_{x,t}} F(x,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$|u(x,t)-\tilde{u}(x,t)| \le \left\|f-\tilde{f}\right\|_{\infty} + \frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} \|g-\tilde{g}\|_{\infty}\,\mathrm{d}\xi + \frac{1}{2c}\int_{G_{x,t}} \left\|F-\tilde{F}\right\|_{\infty,T}\mathrm{d}x\mathrm{d}t \le$$

$$\delta + T\delta + \frac{1}{2c}\delta\cdot 2cT\cdot\frac{1}{2}T = \delta\left(1+T+\frac{1}{2}T^2\right)$$

כלומר, עבור $\delta < \frac{\varepsilon}{\left(1+T+\frac{1}{2}T^2\right)}$ נקבל כי הנ"ל קטן מε כנדרש. ■

הערה 4.4.2 אם אנו מעוניינים להעריך את $(u-\tilde{u})(x,t)$ רק עבור $x\in I=(a,b)\subseteq\mathbb{R}$ ו: $|t|<T$ אזי מספיק להניח קטנות עבור $f-\tilde{f}$, $g-\tilde{g}$ ו $F-\tilde{F}$ בתחום התלות של I. כלומר, בטרפז שבסיסו: $(a-cT,b+CT)$. וצדדיו מחברים את: $(a-cT,0)\to(a,T)$ ו: $(b+cT,0)\to(b,T)$.

לכל הדברים האלה קוראים "מהירות ההתפשטות הסופית".

הגדרה 4.4.3 פתרון חזק: תהי $\tilde{u}(x,t)$ פונקציה רציפה ב $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. נאמר כי $\tilde{u}(x,t)$ היא פתרון חזק (strong) של משוואת הגלים ההומוגנית, אם קיימת סדרה $\{\tilde{u}_m(x,t)\}_{n=1}^{\infty}$ של פתרונות קלאסיים (C^2) של המשוואה ההומוגנית כך ש: $\tilde{u}_n(x,t)\to\tilde{u}(x,t)$ במ"ש על כל קבוצה קומפקטית של $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

משפט 4.4.4

תהיינה $\tilde{f},\tilde{g}\in C(\mathbb{R})$ אזי קיים פתרון חזק יחיד $\tilde{u}(x,t)$ שמקיים את תנאי ההתחלה $\tilde{f},\tilde{g}$.

הוכחה: נקח סדרות $\{f_n,g_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq C^{\infty}(\mathbb{R})$ כך ש: $f_n\to\tilde{f}$ ו: $g_n\to\tilde{g}$ במ"ש על כל קטע $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$. (למה קיים כזה? כתרגיל!)

יהי $\{u_n(x,t)\}$הפתרון ההומוגני הקלאסי היחיד עבור f_n,g_n. $u_n(x,t)$ נתון ע"י (4.3.2).

$$u_n(x,t)=\frac{1}{2}\left(f_n(x+ct)+f_n(x-ct)\right)+\frac{1}{2c}\int\limits_{x-ct}^{x+ct} g_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

ברור כי $\{\tilde{u}_n(x,t)\}$ היא קושי בכל קומפקטית של $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. לכן: $\{u_n(x,t)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במידה שווה בכל קומפקטית לפונקציה $u(x,t)$. ולכן $u(x,t)$ הוא פתרון חזק לפי הגדרה.

בנוסף על כך:

$$u(x,0)\leftarrow\tilde{u}_n(x,0)=f_n(x)\to\tilde{f}(x)$$

ולכן:

$$u(x,0)=\tilde{f}(x)$$

ומה קורה עם g? נחזור אל זה מחר, לחשוב על זה עד אז.

הערה 4.4.5 חזרנו לזה ב28/11/2012.
כאמור:

$$u_n(x,t) = \frac{1}{2}\left(f_n(x+ct) + f_n(x-ct)\right) + \frac{1}{2}\int_{x-ct}^{x+ct} g_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u(x,t)$$

וברור כי $u(x,0) = \tilde{f}(x)$ אבל מה עם הנגזרת? איך אנו מראים את התנאי ההתחלה? נגזור לפי t ונקבל:

$$\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,t) = \frac{c}{2}\left(f_n'(x+ct) - f_n'(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\left[cg_n(x+ct) + cg_n(x-ct)\right]$$

מזה כשה לנו להגיע למשהו, אבל, זהו פתרון קלאסי ולכן, אנו יכולים להסתכל בכל נקודה, בפרט $t=0$ ואז נקבל:

$$\frac{\partial}{\partial t}u_n(x,t)\mid_{t=0} = g_n(x) \to \tilde{g}(x)$$

הנגזרת לא בהכרח קיימת, הרי u רק רציפה, לא בהכרח גזירה. מה שכן נשמר זה העקבה (trace).

נראה יחידות

נניח כי $\{v_n(x,t)\}_{n=1}^{\infty}$ היא סידרה אחרת של פתרונות קלאסיים המתכנסים ל $v(x,t)$ במ"ש על כל קומפקט וכך ש: $v_n(x,0) \to \tilde{f}(x)$ וגם: $\frac{\partial}{\partial t}v_n(x,0) \to \tilde{g}(x)$. צריך להראות כי: $u(x,t) = v(x,t)$. ובאמת, נסתכל על הסידרה: $\{u_n(x,t) - v_n(x,t)\}$, הפונקציות הן כולן פתרונות של המשוואה ההומוגנית (עקרון הסופרפוזיציה). בנוסף לכך:

$$u_n(x,0) - v_n(x,0) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

במ"ש על כל קטע חסום. וגם:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u_n(x,0) - v_n(x,0)\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

אזי, לפי משפט היציבות, $u_n(x,t) - v_n(x,t) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ במ"ש על כל קומפקט של $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. ■

פרק 5

משוואת הגלים ב $\mathbb{R}^n$

5.1 הכללה למימד גבוהה

משוואת הגלים ההומוגנית ב $\mathbb{R}^n$ היא:

$$u_{tt} - c^2 \Delta_x u(x,t) = 0$$

כאשר אנו מחפשים פתרון $u(x,t)$ כאשר $x \in \mathbb{R}^n$ ו $t \in \mathbb{R}$. ומתקיים תנאים ההתחלה: $u_t(x,0) = g(x)$ ו: $u(x,0) = f(x)$.

5.2 ממוצעי פונקציות (ממוצעים כדוריים)

הגדרה 5.2.1 ממוצעי פונקציות (ממוצעים כדוריים): תהי $h(x)$ פונקציה חלקה ב $\mathbb{R}^n$ ונגדיר:

$$M_h(x,r) = \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{|y-x|=r} h(y)\,\mathrm{d}S_y$$

כאשר $r > 0$. ומתקיים: $\omega_n = \left|S^{n-1}\right|$ (כלומר, מידת הספירה ברדיוס r).

נשנה קואורדינטות: $y = x + r\xi$ כאשר $|\xi| = 1$. נקבל:

$$M_h(x,r) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} h(x + r\xi)\,\mathrm{d}S_\xi$$

נוסחה זו מוגדרת לכל $r \in \mathbb{R}$ הפונקציה $M_h(x,r)$ חלקה ב x וב r וזוגית ב r. דהיינו: $M_h(x,-r) = M_h(x,r)$

הערה 5.2.2 $M_h(x,0) = h(x)$, וכמו כן: $\frac{\partial}{\partial r} M_h(x,r)\,|_{r=0} = 0$ (נגזרת של פונקציה זוגית).

גזירה:

$$\frac{\partial}{\partial r} M_h(x,r) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} \sum_{i=1}^{n} h_{x_i}(x + r\xi)\,\xi_i \mathrm{d}S_\xi = \frac{1}{\omega_n r} \int_{|\xi|=1} \mathrm{grad}_\xi\left(h(x + r\xi)\right) \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}S_\xi$$

כאשר $\vec{n}$ הוא נורמל יחידה חיצוני. אבל נבחין כי זה מתחיל להריח לנו כמו משפט גאוס, יש לנו אינטגרל על מעטפת של פונקציה וקטורית. ולכן:

$$= \frac{1}{\omega_n r} \int_{|\xi|\le 1} \Delta_\xi h(x + r\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{1}{\omega_n r} \cdot r^2 \int_{|\xi|\le 1} \Delta_x h(x + r\xi)\,\mathrm{d}\xi \underbrace{=}_{\substack{y = x + r\xi \\ \mathrm{d}y = r^n \mathrm{d}\xi}}$$

$$\frac{r}{\omega_n} \cdot r^{-n} \int_{|y-x|\le r} \Delta_x h(y)\,\mathrm{d}y = \frac{r^{1-n}}{\omega_n} \Delta_x \int_0^r \mathrm{d}\rho \int_{|y-x|=\rho} h(y)\,\mathrm{d}S_y$$

הצעד האחרון, הוא מעבר לקואורדינטות פולריות. כעת נבחין כי:

$$= r^{1-n}\Delta_x \int\limits_0^r \mathrm{d}\rho \cdot \rho^{n-1} \cdot \underbrace{\frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{|y-x|=\rho} h(y)\,\mathrm{d}S_y}_{M_h(x,\rho)} = r^{1-n}\Delta_x \int\limits_0^r \mathrm{d}\rho \cdot \rho^{n-1} M_h(x,\rho)$$

וכל זה כאמור עבור $r > 0$. כלומר, קילבנו עד כה:

$$\frac{\partial}{\partial r} M_h(x,r) = r^{1-n}\Delta_x \int\limits_0^r \mathrm{d}\rho \cdot \rho^{n-1} M_h(x,\rho)$$

נכפיל ב r^{n-1} ונגזור לפי r על מנת לקבל:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r} M_h(x,r)\right) = \Delta_x\left(r^{n-1} M_h(x,r)\right)$$

מהמשפט היסודי, המקום היחידי שנשאר בו r זה בגבול של האינטגרל. אבל r לא מושפע ב Δ_x ולכן:

$$= r^{n-1}\Delta_x\left(M_h(x,r)\right)$$

נחלק ב r^{n-1}, אבל קודם נגזור את $\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r} M_h(x,r)\right)$ ונקבל:

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) M_h(x,r) = \Delta_x M_h(x,r)}$$

ומשוואה זו נקראת משוואה Darboux.

5.3 ממשוואת Darboux אל משוואת הגלים. או: משוואת Euler-Poisson-Darboux

יהי $u(x,t)$ פתרון קלאסי של משוואת הגלים ההומוגנית. נניח $h(x) = u(x,t)$ (t פרמרטר).

$$M_u(x,r,t) = \frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|=1} u(x+r\xi,t)\,\mathrm{d}S_\xi$$

ו:

$$M_u(x,0,t) = u(x,t)$$

ונרשות את משוואת Darboux:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right) M_u(x,r,t) = \Delta_x M_u(x,r,t) = \frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|=1} \Delta_x u(x+r\xi,t)\,\mathrm{d}S_\xi =$$

אבל אנו דנים על משוואת הגלים! לכן:

$$\frac{1}{\omega_n c^2}\int_{|\xi|=1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x+r\xi,t)\,\mathrm{d}S_\xi = \frac{1}{\omega_n c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{|\xi|=1} u(x+r\xi,t)\,\mathrm{d}S_\xi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} M_u(x,r,t)$$

כלומר קיבלנו:

$$\boxed{c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)M_u\left(x,r,t\right)=\frac{\partial^2}{\partial t^2}M_u\left(x,r,t\right)}$$

28/11/2012 ולמשוואה זו נקרא: Euler-Poisson-Darboux.

את המשוואה הנ"ל אפשר לפתור, מדובר בפתרונות של פונקציות בסל ועוד דברים מכוערים. אבל לא נעשה זאת.
כעת נבחין כי עבור משוואת הגלים:

$$\begin{cases} M_u\left(x,r,0\right)=M_f\left(x,r\right) \\ \frac{\partial}{\partial t}M_u\left(x,r,0\right)=M_g\left(x,r\right) \end{cases}$$

נתמקד במקרה של $n=3$ ונקבל:

$$c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)M_u\left(x,r,t\right)=\frac{\partial^2}{\partial t^2}M_u\left(x,r,t\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(rM_u\left(x,r,t\right)\right)=\frac{\partial}{\partial r}\left(M_u\left(x,r,t\right)+r\frac{\partial}{\partial r}M_u\left(x,r,t\right)\right)=2\frac{\partial}{\partial r}M_u\left(x,r,t\right)+r\frac{\partial^2}{\partial r^2}M_u\left(x,r,t\right)=$$
$$r\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)M_u\left(x,r,t\right)=\frac{r}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}M_u\left(x,r,t\right)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(rM_u\left(x,r,t\right)\right)$$

כלומר קיבלנו:

$$\boxed{\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(rM_u\left(x,r,t\right)\right)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(rM_u\left(x,r,t\right)\right)}$$

כלומר זוהי משוואת הגלים! (יש לבדוק שהמשוואה מתקיים גם ל $r<0$ על בסיס זוגיות $M_u\left(x,r,t\right)$).

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(rM_u\left(x,r,t\right)\right)-c^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(rM_u\left(x,r,t\right)\right)=0$$

לכן, הפונקציה $rM_u\left(x,r,t\right)$ ל $x\in\mathbb{R}^3$ קבוע ו: $(r,t)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ מקיימת את משוואת הגלים החד־מימדית ב r,t.
עכשיו, נוסחת דלאמברד (4.3.2) נותנת:

$$rM_u\left(x,r,t\right)=\frac{1}{2}\left[\left(r+ct\right)M_f\left(x,r+ct\right)+\left(r-ct\right)M_f\left(x,r-ct\right)\right]+\frac{1}{2c}\int\limits_{r-ct}^{r+ct}\rho M_g\left(x,\rho\right)\mathrm{d}\rho$$

נקח $t>0$, אנו רוצים להשאיף את $r\to 0$ על מנת לקבל את $u\left(x,t\right)$. עבור $r<ct$ מזוגיות M נקבל:

$$rM_u\left(x,r,t\right)=\frac{1}{2}\left[\left(r+ct\right)M_f\left(x,r+ct\right)-\left(ct-r\right)M_f\left(x,ct-r\right)\right]+\frac{1}{2c}\int\limits_{ct-r}^{ct+r}\rho M_g\left(x,\rho\right)\mathrm{d}\rho$$

(בגלל אי זוגיות של הביטוי באינטגרל נקבל כי: $\int\limits_{r-ct}^{ct-r}\rho M_g\left(x,\rho\right)\mathrm{d}\rho=0$) נחלק ב r ונקבל

$$M_u\left(x,r,t\right)=\frac{1}{2r}\left[\left(r+ct\right)M_f\left(x,r+ct\right)-\left(ct-r\right)M_f\left(x,ct-r\right)\right]+\frac{1}{2cr}\int\limits_{ct-r}^{ct+r}\rho M_g\left(x,\rho\right)\mathrm{d}\rho$$

אבל נבחין כי כל פונקציה:

$$\frac{z(ct+r)-z(ct-r)}{2r} \underset{r\to 0}{\longrightarrow} z'(ct)$$

ולכן:

$$\underbrace{\lim_{r\to 0^+} M_u(x,r,t)}_{u(x,t)} = \frac{\partial}{\partial s}\left(sM_f(x,s)\right)|_{s=ct} + \frac{1}{\cancel{c}}\cancel{c}t\cdot M_g(x,ct)$$

(ערך הפונקציה במקרה של $\rho = ct$ מכיוון שהאינטגרל מצטמצם ואנו מחלקים את אורך האינטגרל). נחליף קצת את הסימון $s = ct$ ונקבל:

$$u(x,t) = \frac{1}{\cancel{c}}\frac{\partial}{\partial t}\left(\cancel{c}tM_f(x,ct)\right) + tM_g(x,ct)$$

כלומר:

$$\boxed{u(x,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{t}{\omega_n}\int_{|\xi|=1} f(x+ct\xi)\,\mathrm{d}S_\xi\right] + \frac{t}{\omega_n}\int_{|\xi|=1} g(x+ct\xi)\,\mathrm{d}S_\xi}$$

04/12/2012 וזוהי נוסחת Kirchoff.

תזכורת קלה, קיבלנו:

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{|y-x|=ct} g(y)\,\mathrm{d}S_y + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{|y-x|=ct} f(y)\,\mathrm{d}S_y\right)$$

אם $u(x,t)\in C^2\left(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\right)$ אזי נוסחאת Kirchoff נותנת את הפתרון (יחידות הפתרון החד־מימדי ב r). בשלב מאוחר יותר, נוכיח את יחידות הפתרון (בעזרת שיטת האנרגייה).

נרשום גם:

$$u(x,t) = \frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{|\xi|=1} g(x+ct\xi)(ct)^2\,\mathrm{d}S_\xi + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi c^2 t}\int_{|\xi|=1} f(x+ct\xi)(ct)^2\,\mathrm{d}S_\xi\right)$$

שזה אותה משוואה כמו קודם, רק בנרמול לכדור יחידה. כעת:

$$= \frac{t}{4\pi}\int_{|\xi|=1} g(x+ct\xi)\,\mathrm{d}S_\xi + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{t}{4\pi}\int_{|\xi|=1} f(x+ct\xi)\,\mathrm{d}S_\xi\right)$$

וזוהי המשוואה שקיבלנו ומסומנת. נבצע את הגזירה ונקבל:

$$= \frac{t}{4\pi}\int_{|\xi|=1} g(x+ct\xi)\,\mathrm{d}S_\xi + \frac{1}{4\pi}\int_{|\xi|=1} f(c+ct\xi)\,\mathrm{d}S_\xi + \frac{t}{3\pi}\int_{|\xi|=1}\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial f}{\partial x_i}(x+ct\xi)\,\xi_i\mathrm{d}S_\xi$$

נזכור כי במקרה החד מימדי אם $f\in C^2$ ו $g\in C^1$ אז $u\in C^2$ (כלומר פתרון קלאסי). כאן אנו קצת בבעיה בגלל שכבר גזרנו את f וגם עם g יש לנו קצת בעיה. לכן נדרשים תנאים קצת יותר חזקים:

טענה 5.3.1

אם $f\in C^3\left(\mathbb{R}^3\right)$ ו $g\in C^2\left(\mathbb{R}^3\right)$ אזי $u\in C^2\left(\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}\right)$ הוא פתרון קלאסי הניתן ע"י *Kirchoff* (של המשוואה

ההומוגנית עם תנאי ההתחלה).

$\square$

אפקט אחד שיש לנו הוא איבוד נגזרת אחת במעבר מתנאי ההתחלה לפתרון (Focussing).

האפקט השני הוא עקרון הויגנס החזק. אם נסתכל על נקודה (x,t) ונרצה לשאול מה הוא u בנקודה הזו? אז נרצה ללכת אחרוה לכל הנקודות על הספירה ברדיוס ct (בזמן $t=0$). ה u בנקודה זו מושפע מהערכים ההתחלתיים בספירה הזאת.

עקרון הויגנס אומר: נניח כי f,g הן בעלות תומך קומפקטי, כעבור מספיק זמן הספירות יהיו מחוץ לתומך. אזי $u(x,t)\equiv 0$ לכל x עבור t מספיק גדול. כמו כן, עבור t מספיק קטן ו x מחוץ לתומך, נקבל כי $u(x,t)=0$ גם כן.

כלומר: $\{y, u(x,t)\neq 0\}\subseteq \xi\in S^2,\ x+ct\xi\in\{\operatorname{supp} f\}\cup\{\operatorname{supp} g\}$.

במילים אחרות, תהי: $K\subseteq\mathbb{R}^3$ קבוצה קומפקטית. אזי קיים $t_0>0$ כך ש $u(x,t)\equiv 0$ לכל $x\in K$ ולכל $x>t_0$ (בתנאי ש $\operatorname{supp} f$ ו $\operatorname{supp} g$ קומפקטיות).

חלק III

אופטרטורים מדרגה כלשהי, משטחים קרקטריסטיים ומשפט Cauchy-Kowalewski

פרק 6

במה מדובר?

מסתכלים במשוואה:

$$Lu = \sum_{\alpha} A_\alpha D_u^\alpha = C$$

6.1 מולטי־אידקסים

אנחנו לוקחים $\alpha \in \mathbb{N}^n$ (אצלנו $\mathbb{N}$ כולל את ה0). כלומר, α יכול להיות $\alpha = (1,0,2,7)$. כלומר $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.
כמו כן נגדיר:

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$$

אם $x \in \mathbb{R}^n$ אז:

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n}$$

6.1.0.1 אופרטור D:

D הוא האופרטור:

$$D = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

ו:

$$D^\alpha u = D_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot D_n^{\alpha_n} u$$

6.1.0.2 משפט הבינום:

$$(x+y)^\alpha = \sum_{\substack{\beta, \gamma \\ \beta + \gamma = \alpha}} \frac{\alpha!}{\beta! + \gamma!} x^\beta y^\gamma$$

6.1.0.3 פולינום טיילור מסדר m:

$$f(x) \approx \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{1}{\alpha!} \left(D^{\alpha} f\right)(0)\, x^{\alpha}$$

6.1.0.4 הפיתוח המולטינומי:

$$(x_1 + \ldots + x_n)^m = \sum_{|\alpha| = m} \frac{m!}{\alpha!} x^{\alpha}$$

כעת נחזור למשוואה. כאשר $A_{\alpha}(x)$ הן מטריצות $N \times N$ ו $u(x) \in \mathbb{R}^n$ וכן: $C(x) \in \mathbb{R}^n$ (המערכת הלינארית הכללית).

דוגמה 6.1.1 :

$$\begin{cases} e^{x_1} \partial^2_{x_2} u_1 + \partial^2_{x_1 x_2} u_2 = c_1(x) \\ \partial_{x_1} u_2 + 7 \partial^3_{x_2^2 x_1} u_2 = c_2(x) \end{cases}$$

עבור האיבר הראשון נקבל:

$$\alpha = (0,2) \quad A_{\alpha} = \begin{pmatrix} e^{x_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

עבור האיבר האחרון (עם ∂^3) נקבל:

$$\alpha = (1,2) \;\; A_{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

בהינתן משטח $S : \varphi(x_1, \ldots, x_n) \equiv 0$ ו $D\varphi \neq 0$. נרצה לתת נתונים על $u|_S$ כך ש: $Lu = \sum_{\alpha} A_{\alpha} D^{\alpha} u = C$ יהיה פתרון יחיד u בסביבת S המקיים את התנאים על S.

נשים לב שבמקרה ש $S : x_n \equiv 0$. אם ניתן $u|_S$ אזי אין חופש בחירה לגבי $D_1 u|_S + \ldots + D_{n-1} u|_S$. כך שעבור נתוני u על S חייבים להתקיים תנאי קומפטיבילות מתאימים.

(למשל, בהינתן $u|_S$ אזי כל הנגזרות המשיקיות על S ידועות). לכן, בקצרה, הנתונים של u על S יכולים להינתן רק ע"י $u|_S$ והנגזרות החלקיות על S.

הגדרה 6.1.2 בשביל המערכת $Lu = \sum_{\alpha} A_{\alpha} D^{\alpha} u = C$, נגדיר כנתוני קושי (Cauchy-data) על S את ערכי u ונגזרותיה הנורמליות עד סדר $m-1$ (ועד בכלל).

הגדרה 6.1.3

1. S ייקרא משטח **<u>לא קרקטריסטי</u>** של הבעיה אם ניתן לחשב את כל הנגזרות $D^{\alpha} u,\ |\alpha| = m$ מתוך המשוואה ונתוני קושי.
2. S ייקרא משטח קרקטריסטי אם הוא לא לא קרקטריטסי. (כן, כן, דאבל לא).

דוגמה 6.1.4 :

$$D_n^2 u - c^2 \sum_{i=1}^{n-1} D_i^2 u = 0$$

כלומר: $\alpha = (0, \ldots, 0, 2)$ ובמקרה של D_i נקבל כי ה α הוא $(0, \ldots, 0, 2, 0, \ldots, 0)$ ו $A_{\alpha} = -c^2$.
בהינתן המשטח $S : x_n = 0$. נתוני קושי הם: $u(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$, אבל צריך גם נגזרות אז: $u_{x_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$.
לכן זהו משטח לא קרקטריסטי מכיוון ש $u_{x_i x_i}$ ניתן לחישוב כיוון שהוא משיק למשחט S.

תרגיל: נניח $n=2$, ונסתכל במשוואה $u_t+cu_x=0$. מיהם הקווים הישרים (דרך $(0,0)$) שאינם קרקטריסטיים.

הערה 6.1.5 נתוני קושי כאן הם u.

נחזור לאופרטור שלנו $Lu=\sum_{\underline{\alpha}}A_\alpha D_u^\alpha$ והמשטח $S:\varphi(x)\equiv 0$. ראשית, נניח כי: $S:x_n=0$. אזי הנגזרת הנורמלית מסדר m ניתנת ע"י $D^{\overline{\alpha}}$ כאשר $\overline{\alpha}(0,\ldots,0,m)$. ולכן, מתוך $Lu=C$ ונתוני u על $u\mid_{x_n=0}$ נוכל לחלץ את $D_{n.}^m u\mid_{x_n=0}$ אם:

$$\det\left(A_{\overline{\alpha}}(x_1,\ldots,x_{n-1},0)\right)\neq 0$$

מסקנה 6.1.6

המשטח $S:\{x_n=0\}$ הוא לא־קרקטריסטי אם"ס:

$$\det\left(A_{(0,\ldots,0,m)}(x_1,\ldots,x_{n-1},0)\right)\neq 0$$

המקרה הכללי: $D_n\varphi\mid_S\neq 0$

נכניס שינוי קואורדינטות כדלקמן:

$$y_i=\begin{cases}x_i & 1\leq i\leq n-1\\ \varphi(x_1,\ldots,x_n) & i=n\end{cases}$$

נסמן:

$$J=\frac{\partial y}{\partial x}=\left(\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right)_{i,k}=\begin{pmatrix}1 & & 0 & \\ & \ddots & & \\ 0 & & 1 & \\ & & & \frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$

הערה 6.1.7 שימוש במשפט הפונקציה הסתומה.

אזי ניתן לרשום (כלל השרשרת):

$$\begin{aligned}D_x &= JD_y\\ D_{x_i} &= \sum\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial y_k}=JD_y\end{aligned}$$

ולכן:

$$D_x^\alpha=(JD_y)^\alpha$$

ונקבל כי:

$$Lu=\sum A_\alpha(x(y))(JD_y)^\alpha u$$

כעת, המשטח S עבר להיות $y_n=0$. לכן, המשטח S יהיה לא קרקטריסטי אם המטריצה המקדמת של $D_{y_n}^m u$ תהיה לא סינגולרית. (מכיוון שמשטח לא קרקטריסטי בקואורדינות x $\iff$ משטח לא קרקטריסטי בקואורדינטות y). 05/12/2012

שאלה: האם קיים פתרון? האם הוא יחיד?

הבעיה הראשונה: האם ניתן לחשב את הנגזר הנורמלית מסדר m של u על S, מתוך ידיעת $C(x)$ ונתוני קושי?

התושבה: ראשית נניח כי $\varphi(x_1,\dots,x_n)=x_n$ (כך ש S הוא $x_n\equiv 0$). במקרה זה, הנגזרת הנורמלית היא $D_n^m u$. ולכן נוכל לחשבה אם: $\det\left(A_{(0,\dots,0,m)}(x)\right)\neq 0$ ו $x\in S$ ($x_n=0$).
שנית, נניח באופן כללי ש$D_n\varphi\neq 0$ כך שהשינוי

$$y_i=\begin{cases}x_i & 1\le i\le qn-1\\ \varphi(x_1,\dots,x_n) & i=n\end{cases}$$

נותן מערכת קואורדינטות חדשה עם יעקוביאן:

$$J=\left(\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right)_{1\le i,k\le n}$$

שהוא רגולרי. כיצד נראה L בקואורדינטות החדשות? אנו יודעים כי:

$$D_x=JD_y$$

כאשר D_x הם וקטור עמודות. ולכן:

$$Lu=\sum_{|\alpha|\le m}A_\alpha D_x^\alpha=\sum_{|\alpha|\le m}A_\alpha\left(x\left(y\right)\right)\left(JD_y\right)^\alpha u\left(x\left(y\right)\right)$$

עכשיו, ירדנו למעשה למקרה הקודם, כי המשטח S הוא $y_n=0$.
לכן, עלינו, בהצגה החדשה, למצוא את המטריצה המקדמת את $D_{y_n}^m$. נשים לב כי אם ניקח:

$$\eta=(0,\dots,0,1)$$

אזי, המטריצה:

$$\sum_{|\alpha|=m}A_\alpha\eta^\alpha$$

נבחין כי:

$$\eta^\alpha=\eta_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\eta_{n-1}^{\alpha_{n-1}}\eta_n^{\alpha_n}\Rightarrow\eta^\alpha\neq 0\iff\alpha\left(0,\dots,0,m\right)$$

ואז $\eta^\alpha=1$. כלומר המטריצה:

$$\sum_{|\alpha|=m}A_\alpha\eta^\alpha=A\left(0,\dots,0,m\right)$$

במקרה של הקואורדינטות בy נפעל כך:

1. החלק שיתן $|\alpha|=m$ בגזירה נתון ע"י:

$$\sum_{|\alpha|=m}A_\alpha\left(x\left(y\right)\right)\left(JD_y\right)^\alpha$$

כאשר לא גוזרים את J!

2. כדי לקבל את המטריצה המקדמת את $D_{y_n}^m$ נפעל עם אותו $\eta=(0,\dots,0,1)$. כלומר המטריצה המקדמת המבוקשת היא:

$$\sum_{|\alpha|=m}A_\alpha\left(x\left(y\right)\right)\underbrace{\left(J\eta\right)^\alpha}_{\text{פונקציה של } y \text{ ממשית}}$$

$$\left(J\eta\right)^\alpha=\left(J\eta\right)_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot\left(J\eta\right)_n^{\alpha_n}$$

כאשר $\eta = (0, \ldots, 0, 1)$. מיהו $J\eta$? (וקטור)

$$J = \left(\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right) = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_1} \\ & & \vdots \\ \cdots & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_i} \\ & & \vdots \\ \cdots & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

וזהו $J\eta$ (העמודה האחרונה) $y_n = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ ו: $J\eta = D\varphi$. ולכן המטריצה המבוקשת בקואורדינטות x היא:

$$\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x) (D\varphi(x))^\alpha$$

כאשר $x \in S$. מטריצה זו על S צריכה להיות רגולרית כדרישת מינימום לקיום פתרון.

מסקנה 6.1.8

(למעשה משפט)
תנאי הכרחי לקיום פתרון קלאסי בסביבת S הוא ש:

$$\det\left(\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x) (D\varphi(x))^\alpha\right) \neq 0$$

כלומר, S חייב להיות לא קרקטריסטי.

דוגמה 6.1.9 :

$$a(x,y)\, u_y + b(x,y)\, u_x = c(x,y)$$

ראשית, $n = 2$. זו לא מערכת, $N = 1$ ו: $m = 1$.
ולכן, משטח לא קרקטריסטי:

$$\varphi(x,y) = 0$$

חייב לקיים:

$$a(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial y} + b(x,y)\frac{\partial \varphi}{\partial x} \neq 0$$

כלומר $(a,b) \not\perp \nabla\varphi$. כלומר (a,b) איננו משיק לקו S. S הוא קרקטריסטי אם (a,b) הוא משיק שלו.

✎ **דוגמה 6.1.10 :** משוואת הגלים ב$\mathbb{R}^n$:

$$u_{tt} - c^2 \Delta_x u = 0$$

מה שנהוג לסמן הוא:

$$u_{x_0 x_0} - c^2 \Delta_x u = 0$$

כאשר החלפנו את t ב x_0 ולכן המימד הוא $n+1$.
$S = \varphi(x, x_0) = 0$ יהיה לא קרקטריסטי אם ($N = 1$, $m = 2$).

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}\right)^2 - c^2 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)^2 \neq 0$$

לכן, המשטח $S : \varphi(x_0, \ldots, x_n) = 0$ הוא קרקטריסטי אם:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}\right)^2 - c^2 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right)^2 = 0$$

אם בפרט נרשום:

$$\varphi(t, x) = t - \psi(x) = 0$$

(כלומר: $S : t = \psi(x)$). אזי התנאי הקרקטריסטי הוא:

$$c^2 \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i}\right)^2 = 1$$

וזו היא משוואה האיקונל (eikonal).
אם ניקח $\psi(x) = \frac{|x|}{c}$ נקבל כי: $t = \frac{|x|}{c} \Rightarrow |x| = ct$ הוא למעשה חזית האור.

11/12/2012

פרק 7

פונקציות אנליטיות ממשיות

7.1 טורים במוטלי אינדקס

7.1.1 הגדרה ודוגמאות

$$\sum_{\alpha} c_\alpha$$

כאשר $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ו $c_\alpha \in \mathbb{R}$. נאמר כי הטור מתכנס אם: $\sum_{\alpha} |c_\alpha| < \infty$. הטור הזה הוא סכום בן־מנייה של איברי אי־שליליים ולכן מתכנס ללא תלות בסדר.

דוגמה 7.1.1 :

$$\sum_{\alpha} x^\alpha = \prod_{i=0}^{n} \left(\sum_{\alpha_i=0}^{\infty} x_i^{\alpha_i} \right) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1-x_i} = \frac{1}{(e-x)^e}$$

בתנאי ש $\max_{1\le i\le n} |x_i| < 1$.

כאשר נסמן: $e = (1,\dots,1) \in \mathbb{N}^n$ ואז:

$$e - x = (1-x_1,\dots,1-x_n)$$

וגם:

$$(e-x)^e = (1-x)^1 \cdot \ldots \cdot (1-x_n)^1$$

ולכן השיוויון האחרון בדוגמה.

דוגמה 7.1.2 :

$$D^\beta \frac{1}{(e-x)^e}$$

כאשר $\beta \in \mathbb{N}^n$ (מדובר בנגזרת) ולכן נקל כי:

$$= \sum_{\alpha \geq \beta} \frac{\alpha!}{(a-\beta)!} x^{\alpha-\beta}$$

דרך נוספת לגזור היא:

$$\frac{\beta!}{(e-x)^{e+\beta}}$$

ולכן נקבל:

$$\sum_{\alpha \geq \beta} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!} x^{\alpha-\beta} = \frac{\beta!}{(e-x)^{e+\beta}}$$

כאשר $|x_i| < 1$.

דוגמה 7.1.3 : נרצה לחשב את הטור הבא:

$$\sum_\alpha \frac{|\alpha|!}{\alpha!} x^\alpha$$

נזכור כי $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$. ולכן:

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=j} \frac{j!}{\alpha!} x^\alpha = \sum_{j=0}^{\infty} (x_1 + \ldots + x_n)^j = \frac{1}{1-(x_1+\ldots+x_n)}$$

7.1.2 טור חזקות

הגדרה 7.1.4 טור חזקות (סביב $x=0$) הוא טור: $\sum_\alpha c_\alpha x^\alpha$.

טענה 7.1.5

אם הטור מתכנס בנקודה $z \in \mathbb{R}^n$ אזי הוא מתכנס לכל $x \in \mathbb{R}^n$ כך ש $|x_i| \leq |z_i|$ לכל $(1 \leq i \leq n)$.

הוכחה: הטור מתכנס, פירושו ש:

$$\sum_\alpha |c_\alpha| \, |z^\alpha| < \infty$$

ואז זה גורר כי:

$$\sum_\alpha |c_\alpha| \, |x^\alpha| < \infty$$

■

הגדרה 7.1.6 תהי $f(x)$ פונקציה מוגדרת בתחום פתוח $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. נאמר כי f אנליטית (אנליטית ממשית) בנקודה $y \in \Omega$ אם קיימת סביבה $N_y \subseteq \Omega$ של y כך ש: $f(x) = \sum_\alpha c_\alpha (x-y)^\alpha$ לכל $x \in N_y$ (עבור מקדמים קבועים c_α אך תלויים ב y).
אם f אנליטית לכל $y \in \Omega$ נאמר כי f אנליטית ב Ω.

הערה 7.1.7 f יכולה להיות פונקציה ווקטורית שאז האנליטיות מוגדרת לכל רכיב.

טענה 7.1.8

תהי f אנליטית ב Ω. אזי: $f \in C^{\infty}(N_y)$.

הוכחה: נניח $y = 0 \in \Omega$ ונסתכל ב $\sum_{\alpha} c_\alpha z^\alpha$ אשר לפי ההנחה מתכנס עבור $|z| < \delta$. בפרט, הטור מתכנס ל $z \in \mathbb{R}^n$ כך ש $z_i \neq 0$ לכל $1 \leq i \leq n$.
נקח x בסביבה של 0 כך ש $|x_i| < |z_i|$ לכל $1 \leq i \leq n$.
לכן, קיים $0 < q < 1$ כך ש $|x_i| \leq q\,|z_i|$ לכל i.
נתבונן ב:

$$\sum_{\alpha} \left|D^\beta\left(c_\alpha x^\alpha\right)\right| \leq \sum_{\alpha \geq \beta} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!} |c_\alpha|\, q^{|a-\beta|} \left|z^{\alpha-\beta}\right|$$

מכיוון ש:

$$\left|x^{\alpha-\beta}\right| \leq q^{|\alpha-\beta|} \left|z^{\alpha-\beta}\right|$$

נמשיך:

$$= \sum_{\alpha \geq \beta} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)} |c_\alpha|\, q^{|\alpha-\beta|} \frac{|z^\alpha|}{|z^\beta|}$$

אנו יודעים כי: $\mu = \sum_{\alpha} |c_\alpha|\,|z^\alpha| < \infty$ ולכן:

$$\leq \frac{\mu}{|z^\beta|} \sum_{\alpha \geq \beta} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!} q^{|\alpha-\beta|} = \frac{\mu}{|z^\beta|} \sum_{\alpha \geq \beta} \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!} (qe)^{\alpha-\beta} =$$

$$\frac{\mu}{|z^\beta|} \frac{\beta!}{(e-qe)^{e+\beta}} = \frac{\mu\beta!}{|z^\beta|} \frac{1}{(1-q)^{n+|\beta|}}$$

בפרט, ע"י גזירה פורמלית מכל סדר מקבלים התכנסות בהחלט כל קומפקט של הקובייה $|x_i| < |z_i|$ עבור $1 \leq i \leq n$.

תזכורת 7.1.9 אם $g = \sum_{j=0}^{\infty} g_j$ טור פונקציות גזירות מכל סדר ב $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ וכך שהטור וכל נגזרותיו מתכנס בהחלט ובמידה שווה בכל קומפקט חלקי לΩ, אזי: $g \in C^{\infty}(\Omega)$ ונגזרותיה מתקבלות ע"י גזירה פורמלית. ולכן זה סיים את הוכחת הטענה.

בנוסף לכך:

$$\left|\left(D^\beta f\right)(x)\right| \leq \frac{M\beta!}{r^{|\beta|}}$$

כאשר $M = \frac{\mu}{(1-q)^n}$ ו: $r = \min\left((1-q)\,|z_i|\right)$ עבור $i \leq i \leq n$. ■

סימון: אם f מקיימת את $\left|\left(D^\beta f\right)(x)\right| \leq \frac{M\beta!}{r^{|\beta|}}$ ב x מסויים, נגיד כי היא במחלקה $C_{M,r}(x)$.

טענה 7.1.10

תהי $f \in C^{\infty}(\Omega)$ וכך שלכל $y \in \Omega$ קיימת סביבה N_y של y כך ש: $f \in C_{M,r}(x)$ לכל $x \in N_y$. ($r > 0$, $M > 0$ התלויים כמובן ב N_y). אזי f אנליטית בΩ. ומתקיים לכל $y \in \Omega$:

$$f(x) = \sum_{\alpha} \frac{(D^\alpha f)(y)}{\alpha!} (x-y)^\alpha$$

עבור x בסביבה מספיק קטנה של y.

הערה 7.1.11 זו הטענה ההפוכה לטענה הקודמת.

$\square$

בנוסף לכך: $C_\alpha = \frac{D^\alpha f(0)}{\alpha!}$

הערה 7.1.12 עקרון ההמשכה (unique continuation): אם f אנליטית ב Ω קשיר, ועבור $y \in \Omega$ קיים $D^\beta f(y) = 0$ לכל $\beta \in \mathbb{N}^n$ אזי: $f \equiv 0$.

הוכחה: ברור ש $f \equiv 0$ בסביבה של y_0 בגלל פיתוח לטור חזקות. נסתכל ב:

$$\Omega_1 = \left\{x \mid \ D^\beta f(x) = 0 \ \forall \beta\right\}$$

ואילו:

$$\Omega_2 = \Omega \backslash \Omega_1 = \left\{x \mid \ \exists \beta, \ D^\beta f(x) \neq 0\right\}$$

Ω_1 פתוחה בגלל האנליטיות. ואילו Ω_2 פתוחה בגלל רציפות. ובגלל קשירות נקבל כי $\Omega_1 = \Omega$. ■

הערה 7.1.13 פונקציות אנליטיות מסמנים C^ω כדי להבדיל אותן מ C^∞.

7.1.3 עקרונות השוואה

הגדרה 7.1.14 תהיינה $f, F \in C^\infty(\Omega)$ ונניח כי $0 \in \Omega$. נאמר כי $f \ll F$ (בנקודה 0) אם לכל $\alpha \in \mathbb{N}^n$ מתקיים:

$$|D^\alpha f(0)| \leq D^\alpha F(0)$$

טענה 7.1.15

תנאי הכרחי ומספיק לכך ש $f \in C_{M,r}(0)$ הוא $f \ll \varphi$ כאשר: $\varphi(x) = \frac{Mr}{r-(x_1+\ldots+x_n)}$ (עבור $|x_i| + \ldots + |x_n| < r$).

$$C_{M,r}(0) = \left\{\left|D^\beta f(0)\right| \leq \frac{M\beta!}{r\,|\beta|}\right\}$$

הוכחה: אם נגזור את φ נקבל:

$$D^\alpha \varphi(x) = \frac{Mr\alpha!}{\left[r - (x_1 + \ldots + x_n)\right]^{1+|\alpha|}}$$

$$D^\alpha \varphi(0) = \frac{M\alpha!}{r^{|\alpha|}}$$

■

מסקנה 7.1.16

אם בנוסף לכך $f(0)=0$ הרי התנאי ההכרחי ומספיק הוא ש:

$$f \ll \varphi - M = \frac{Mr}{r-(x_1+\ldots+x_n)} - M = \frac{M(x_1+\ldots+x_n)}{r-(x_1+\ldots+x_n)}$$

הערה 7.1.17 ברור כי אם $f \ll F$ (בנקודה 0) אזי גם באותה נקודה $D^\beta f \ll D^\beta F$ לכל $\beta \in \mathbb{N}^n$.

7.1.4 משפט ההרכבה

משפט 7.1.18 משפט ההרכבה

תהיינה $f,F \in C^\infty(\Omega)$ כאשר $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ וכך ש $f(0)=F(0)=0$. תהיינה $g,G \in C^\infty(I)$ כאשר $I \subseteq \mathbb{R}$ ו $0 \in I$. נניח כי $f \ll F$ ב $0 \in \Omega$ ו: $g \ll G$ ב $0 \in I$ אזי: $g \circ f \ll G \circ F$ ב $0 \in \Omega$.

הוכחה: בגלל גזירת שרשרת:

$$D^\alpha(g \circ f) = P_\alpha\left(D^\gamma g(f), D^\beta f\right)$$

כאשר $|\beta|,|\gamma| \le |\alpha|$ ו P_α פולינום במקדמים אי־שליליים.

$$D^\alpha(G \circ F) = P_\alpha\left(D^\gamma G(F), D^\beta F\right)$$

בנקודה $0 \in \Omega$ קיים $f(0)=F(0)=0$ ולכן גם: $g \circ f(0) = G \circ F(0) = 0$ ולכן ברור:

$$|D^\alpha(g \circ f)(0)| \le D^\alpha(G \circ F)(0)$$

■

12/12/2012

תזכורת משיעור קודם... **טענה 7.1.19**

f אנליטית $\iff$ לכל $S \ll \Omega$ (קומפקטית) קיים $M,r>0$ כך ש $\forall y \in S,\ f \in C_{M,r}(y)$.

הגדרה 7.1.20 נניח $0 \in \Omega$. אזי: $f \ll F$ (f majorized by F) (ב 0) אם:

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n \ |D^\alpha f(0)| \le D^\alpha F(0)$$

והייתה לנו את הטענה:

טענה 7.1.21

$f \in C_{M,r}(0)$ אס"ס: $f \ll \varphi$ כאשר: $\varphi(x) = \frac{Mr}{r-(x_1+\ldots+x_n)}$.

מסקנה 7.1.22

$f \in C_{M,r}(0)$ ו: $f(0)=0$ אס"ס: $f \ll \varphi - M = \frac{M(x_1+\ldots+x_n)}{r-(x_1+\ldots+x_n)}$.

וכמו כן, הראנו את משפט ההרכבה.

טענה 7.1.23

$y \in \Omega$ ו: $f(y)=v \in \mathbb{R}$. $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ חלקה בסביבת v. נניח כי: $f \in C_{M,r}(y)$ ו: $g \in C_{\mu,\rho}(v)$. אזי: $h(x) := g \circ f(x) = g(f(x))$ מקיימת:

$$h \in C_{M,\frac{\rho r}{M+\rho}}(y)$$

הוכחה: נרשום:

$$h(y+x) = g(v + f(x+y) - f(y)) = g^*(f^*(x))$$

כאשר:

$$\begin{aligned} f^*(x): &= f(y+x) - f(y) \in C_{M.r}(0) \\ g^*(u) &= g(v+u) \in C_{\mu,\rho(0)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^* &\ll \varphi - M = \frac{M(x_1 + \ldots + x_n)}{r - (x_1 + \ldots + x_n)} \\ g^* &\ll \varphi(u) = \frac{\mu\rho}{\rho - u} \end{aligned}$$

במקרה של g^*, $u \in \mathbb{R}$.
על כן:

$$h(y+x) \ll \frac{\mu\rho}{\rho - \left(\varphi^{(x)} - M\right)} = \frac{\mu\rho(r - (x_1 + \ldots + x_n))}{\rho r - (\rho + M)(x_1 + \ldots + x_n)} \ll \frac{\mu\rho r}{\rho r - (\rho + M)(x_1 + \ldots + x_n)}$$

מדוע המעבר האחרון נכון? מכיוון ש:

$$\frac{\mu\rho(r - (x_1 + \ldots + x_n))}{\rho r - (\rho + M)(x_1 + \ldots + x_n)} = \frac{\mu\rho r}{\rho r - (\rho + M)(x_1 + \ldots + x_n)} - \frac{\mu\rho(x_1 + \ldots + x_n)}{\rho r - (\rho + M)(x_1 + \ldots + x_n)}$$

אבל נבחין כי הפונקציה השניה (זו שמחסירים) היא "טיפוס" של "$\varphi - M$" עבור "M, r" מתאימים. ועל כן, היא מתאפסת ב0 וכל הנגזרות שלה כולן אי שליליות. ולכן, השמטתה רק מגדילה את הנגזרות של אגף ימין. כלומר:

$$\frac{\mu\rho(r - (x_1 + \ldots + x_n))}{\rho r - (\rho + M)(x_1 + \ldots + x_n)} \ll \frac{\mu\rho r}{\rho r - (\rho + M)(x_1 + \ldots + x_n)} = \frac{\frac{\mu\rho r}{\rho + M}}{\frac{\rho r}{\rho + M} - (x_1 + \ldots + x_n)}$$

לכן, ה"r" שלנו הוא: $\frac{\rho r}{\rho + M}$ וה"M" שלנו הוא פשוט μ. ■

משפט 7.1.24

תהי f אנליטית (בסביבת y), $f(y) = v$ ו g אנליטית (בסביבת v). אזי $g \circ f = g(f(x))$ אנליטית (בסביבת $x = 0$).

הערה 7.1.25 באופן כללי, f אנליטית ו g אנליטית $\Leftarrow$ $g \circ f$ אנליטית בכל סביבה שבה היא מוגדרת (לא קוראים את הסוגריים).

18/12/2012

פרק 8

משפט Cauchy-Kovalewski

8.1 המקרה הכללי

משפט 8.1.1 משפט Cauchy-Kovalewski

נתונה המערכת הקוואזי לינארית:

$$\sum_{|\alpha|\leq m} A_\alpha\left(x,\left\{D^\beta u\right\}_\beta\right)D^\alpha u = f\left(x,\left\{D^\beta u\right\}_\beta\right) \tag{8.1.1}$$

כאשר $|\beta|\leq m-1$ והמטריצות: $u\in\mathbb{R}^L$ ו: A_α מטריצות $L\times L$.
נתון משטח $\varphi\left(x_1,\ldots,x_n\right)=0$: Γ כך ש $\nabla\varphi\neq 0$ ועליו תנאי קושי של $\left\{D^\beta u\right\}_{|\beta|\leq m-1}$ באופן קומפטיבילי (לחילופין, $u,\frac{\partial}{\partial\nu}u,\ldots,\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^{m-1}u$).
נניח כי:

1. $\left\{A_\alpha\left(x,\left\{D^\beta u\right\}_\beta\right)\right\}_\alpha$ ו: $f\left(x,\left\{D^\beta u\right\}\right)$ הן פונקציות אנליטיות של המשתנים שלהן. כלומר, עבור x בסביבה $0\in\Gamma$ (אני מניחים כאן ש $0\in\Gamma$ לצורך נוחות) ו $\left\{D^\beta u\right\}$ בסביבת $\left\{D^\beta u\left(0\right)\right\}$.
2. הפונקציה $\varphi\left(x_1,\ldots,x_n\right)$ אנליטית.
3. נתוני קושי $D^\beta u\mid_\Gamma$ בסביבת 0 אנליטיים. דהיינו, בלי הגבלת הכלליות: $x_n=\psi\left(x_1,\ldots,x_{n-1}\right)$ על המשטח בסביבת 0, כאשר ψ אנליטית. ואז, $D^\beta u\mid_\Gamma$ מובטאות בעזרת $x_1,\ldots,x_n$ והן אנליטיות (בסביבת $0\in\mathbb{R}^{n-1}$ ו: $\psi\left(0\right)=0$).

נניח כי Γ (בסביבת $x=0$) איננו קרקטריסטי. כלומר:

$$\det\left(\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha\left(x,\left\{D^\beta u\right\}_{|\beta|\leq m-1}\right)\left(D\varphi\right)^\alpha\right)\neq 0$$

עבור $x\in\Gamma$ בסביבת $x=0$. תנאי זה מבטיח כי מתוך הנתונים ניתן לחלץ את $\left(\frac{\partial}{\partial\nu}\right)^m u\mid_\Gamma$.
אזי: קיים פתרון אנליטי יחיד ל *(8.1.1)* בסביבת $x=0$ המקיים את תנאי קושי על Γ (בסביבת $x=0$).

הערה 8.1.2 הכוונה בסימון $\left\{D^\beta u\right\}_\beta$ הם כל הβ אשר מקיימים את התנאי. זאת אומרת β הוא לא קבוע כאן. זאת סתם דרך להגיד שהמשתנים זה כל הנגזרות אשר עולות על דעתנו.

הוכחה: מתחילים בסדרת רדוקציות:

1. נגדיר קואורדינטה $y_n=x_n-\psi\left(x_0,\ldots,x_{n-1}\right)$ ואז: $\Gamma : x_n\equiv 0$. נבחין כי ההנחות ממשיכות להתקיים (למשל אנליטיות המקדמים) בגלל אנליטיות פעולת ההרכבה.
2. כל תנאי קושי (על $x_n\equiv 0$) הם אפס זהותית. נתונים לנו $D^\beta u\left(x_1,\ldots,x_{n-1}\right)$ (מספר סופי של נזגרות, אנו

גם גוזרים את x_n!) נבנה פולינום אלה הנגזרות שלו:

$$P\left(x_1,\ldots,x_n\right)=\sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{j!}\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^j u\left(x_1,\ldots,x_{n-1}\right)x_n^j$$

זהו פולינום ב x_n לא במשתנים האחרים. אזי נתוני קושי של $P\equiv$ נתוני קושי של u. ו P אנליטית ב $x_1,\ldots,x_n$ (למעשה, היא פולינום ב x_n, אבל לא באחרים). ולכן, נחליף את u ב $u-P$ שהיא נעלם חדש.

3. נעבור למערכת מסדר **<u>ראשון</u>** ע"י הגדרת $u_\beta=D^\beta u$ בתור נעלמים נוספים. לווקטור הנעלמים החדש נקרא: $\tilde{u}\left(u,\{u_\beta\}_{\mathbf{b}}\right)$. אזי (8.1.1) נרשמת כך:

$$\sum_{|\alpha|\leq m}A_\alpha\left(x,\tilde{u}\right)D^\alpha u=f\left(x,\tilde{u}\right)$$

אבל אנו רוצים לכתוב מערכת ב $\tilde{u}$, כלומר להפטר מ $D^\alpha u$. עבור $|\alpha|<m$ אזי הוא ב $\tilde{u}$. מה עם $|\alpha|=m$? נרשום:

$$\tilde{u}=\left(u_1,\ldots,u_N\right)$$

כאשר u_N הוא זה שבו: $u_N=D_{x_n}^{m-1}$, כלומר ה β שלו היא: $\beta=(0,\ldots,0,m-1)$. אנו יודעים כי:

$$D_{x_n}^m u_N=b_N\left(x,\tilde{u}\right)$$

בגלל האי קרקטריסטיקות. נקח $j<N$. מה ניתן לכתוב על $D_{x_n}u_j$? $u_j=D^\beta u$ כאשר $\beta_\ell>0$ כאשר $1\leq\ell\leq n-1$. אז מה ניתן להגיד על $D_{x_n}u_j$?

$$D_{x_n}u_j=D_{x_\ell}u_k$$

או איזשהו u_m. כאשר: $u_k=D^{\overline{\beta}}u$ כאשר $\overline{\beta}=\beta-\left(0,\ldots,\overbrace{1}^{\ell},\ldots,0\right)+(0,\ldots,0,1)$. תנאי קושי ל u_j יודעים.

קיבלנו מערכת:

$$\begin{cases}D_{x_n}u_N=b_N\left(x,\tilde{u}\right)\\D_{x_n}u_j=D_{x_\ell}u_k\end{cases}$$

את המערכת הזו ניתן לרשום בצורה:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_n}=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{N}a_{jk}^i\left(z\right)\frac{\partial u_k}{\partial x_i}+b_j\left(z\right)$$

כאשר $z=\left(x_1,\ldots,x_{n-1},u_1,\ldots,u_N\right)$ ו: $\left\{a_{jk}^i\left(z\right)\right\}$ מטריצות $N\times N$.

למה x_n לא נכלל? כי נהפוך את x_n לנעלם r ע"י משוואה נוספת שתהיה $D_{x_n}r\equiv 1$ ו: $r\mid_{x_n=0}=0$.

אם נתייחס לכל L הרכיבים של ה $u_1,\ldots,u_N$ נוכל לשנות סימון כך ש: $\left(u_1,\ldots,u_N\right)$ סקלרים. המקדמים $a_{jk}^i\left(z\right)$ו $b_j\left(z\right)$ אנליטים ב z בסביבת $z=0\in\mathbb{R}^{n-1+N}$. עלינו לחפש פתרון אנליטי $\left\{u_j\left(x\right)\right\}_{1\leq j\leq N}$ למערכת זו בסביבת $x=0\in\mathbb{R}^n$.

בהנחה שקיים פתרון כזה:

צעד א': מתקיים:

$$D_{x_n}D^\alpha u_j\left(0\right)=P_\alpha\left(D_z^\beta a_{jk}^i\left(0\right),D_z^\gamma b_j\left(0\right),D^\delta u_k\left(0\right)\right)$$

כאשר P_α פולינום פעל מקדמים אי־שליליים, $|\beta|,|\gamma|\leq|\alpha|$ ו: $|\delta|\leq|\alpha|+1$ ו: $\delta_n\leq\alpha_n$.

דוגמה 8.1.3 :

$$\alpha = (0, \ldots, 0, 1) \Rightarrow D^\alpha = D_{x_n}$$

במקרה זה קיבלנו $|\alpha| = 1$ ו: $|\delta| = 2$.

טענה 8.1.4

ניתן כך לחשב את כל הנגזרות $D_{x_n} D^\alpha u_j(0)$ לכל פולטיאינדקס α.

הוכחה: באינדוקציה על α_n. אם $\alpha_n = 0$ אזי ידועות כל הנגזרות: $D^\alpha D_{x_n} u_j$ על $x_n = 0$.
אם $\alpha_n = 1$ וכל $\alpha_\ell = 0$ כאשר $\ell \leq n-1$ אז:

$$D_{x_n} D_{x_n} u_j(0) = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{N} D_{x_n} a^i_{jk}(x_1, \ldots, x_{n-1}, u_1(x), \ldots, u_n(x)) \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{N} a^i_{jk}(0) \cdot D_{x_n} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}(0) + D_{x_n} b_j(\ldots)(0)$$

$D_{x_n} b_j(\ldots)$ ידוע מכיוון שהוא תלוי ב $\frac{\partial}{\partial x_n} u_\ell$. גם: $D_{x_n} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}(0)$ ידוע, מכיוון ש: $D_{x_n} \frac{\partial u_k}{\partial x_i}(0) = \frac{\partial}{\partial x_i} D_{x_n} u_k(0)$ וזוהי נגזרת x_i של $D_{x_n} u_k$ הידוע על $x_n = 0$. ולבסוף גם: $a^i_{jk}(x_1, \ldots, x_{n-1}, u_1(x), \ldots, u_n(x)) \cdot \frac{\partial u_k}{\partial x_i}$ ידוע ($\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \left(\frac{\partial a_{jk}}{\partial z_{\ell+n-1}} \frac{\partial u_\ell}{\partial x_n} \right)$).

כעת אנו יודעים עד $\alpha_n \leq q$ וכעת נבחן את $\alpha_n = q$ ונקבל $\alpha_n = q+1$ מהאגף השמאלי של: $D_{x_n} D^\alpha u_j(0)$. ■

צעד ב': נניח כי מסתכלים במערכת:

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_n} = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=1}^{N} A^i_{jk}(z) \frac{\partial U_k}{\partial x_i} + B_j(z)$$

19/12/2012 כאשר: $z = (x_1, \ldots, x_{n-1}, U_1, \ldots, U_n)$ כאשר $a^i_{jk} \ll A^i_{jk}$ (ב$z = 0$) ו: $b_j \ll (B_j)$.

✎ **דוגמה 8.1.5 :** נתבונן רגע בדוגמה כדי לחזור לעצמינו. נניח $L=2$, $n=3$ ו $m=2$ אזי:

$$D_{x_3}^2\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}=A_{(2,0,0)}D_{x_1,x_1}^2\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}+A_{(0,1,1)}D_{x_2,x_3}^2\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}+f\left(x,u_1,u_2,D_{x_1}u_1,D_{x_2}u_1,D_{x_3}u_1,\ldots\right)$$

(כמובן שיכולים להיות עוד נגזרות כאן, אבל זה מספיק לבינתיים).
נבחין כי האיבר הראשון, הוא:

$$\begin{pmatrix}A_{(2,0,0)}^{1,1}\left(\ldots\right) & A_{(2,0,0)}^{1,2}\left(\ldots\right)\\ \ldots & \ldots\end{pmatrix}$$

אנו רוצים לכתוב אותו כאוסף של סקלארים. כלומר:

$$D_{x_3}\underbrace{\left(D_{x_3}u_1\right)}_{\text{נעלם}}=D_{x_3}^2u_1=A_{(2,0,0)}^{1,1}\left(x,\ldots\right)D_{x_1,x_1}^2u_1+A_{(2,0,0)}^{1,2}\left(\ldots\right)D_{x_1x_1}^2u_2+\ldots$$
$$A_{(2,0,0)}^{1,1}\left(x,\ldots\right)D_{x_1}\left(D_{x_1}u_1\right)+\ldots\ldots+D_{x_1}\left(D_{x_1}u_2\right)$$

ה $\left(D_{x_1}u_i\right)$ נהפכלים לנעלמים.
כעת, האיבר השני מימין בשורה העליונה (כלומר u_1־ים)

$$D_{x_3}^2u_1=A_{(0,1,1)}^{1,1}\left(x,\ldots\right)D_{x_2}\left(D_{x_3}u_1\right)+A_{(0,1,1)}^{1,2}\left(x,\ldots\right)D_{x_2}\left(D_{x_3}u_2\right)$$

הערה 8.1.6 זו לא באמת משוואה נפרדת, זה צריך להיות באותה משוואה. יש כאן בלאגן.

ולכן אנו מקבלים כי:

$$D_{x_3}\left(\text{נעלם}\right)=\sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{2}\ldots D_{x_i}\left(\text{נעלם}\right)$$

כעת נזכר כי הגענו לביטוי:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_n}=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{N}a_{jk}^i\left(z\right)\frac{\partial u_k}{\partial x_i}+b_j\left(z\right)$$

כאשר $z=\left(x_1,\ldots,x_{n-1},u_1,\ldots,u_N\right)$, כל הנעלמים שכוללים את כל רכיבי ה $D^\beta u$ כאשר $|\beta|\leq m-1$.
אם קיים פתרון אנליטי בסביבת $z=0$ אזי:

$$D_{x_n}D^\alpha u_j\left(0\right)=P_\alpha\left(\left[D_z^\beta a_{jk}^i\right]\left(0\right),\left[D^\gamma b_j\right]\left(0\right),\left[D^\delta u_k\right]\left(0\right)\right)$$

עם כל התנאים על γ,δ,β שציינו. לכן, באופן סוקסיבי, ניתן לחשב את כ נגזרות $\left(D^\alpha u_j\right)\left(0\right)$.
כמו כן, אמרנו כי אם $a_{jk}^i\ll A_{jk}^i$ (נשלט ב $z=0$ ו: $x_n=0$) לכל $1\leq j\leq N$ וגם: $b_j\ll B_j$.
ואם יש פתרון ל:

$$\frac{\partial}{\partial x_n}U_j=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{N}A_{jk}^i\left(z\right)\frac{\partial}{\partial x_i}U_k\left(x\right)+B_j\left(z\right)$$

ותנאי התחלה $U_j\left|_\Gamma=0\right.$ בסביבה של $z=0$ אזי קיים פתרון אנליטי ל:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_n}=\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{N}a_{jk}^i\left(z\right)\frac{\partial u_k}{\partial x_i}+b_j\left(z\right)$$

הפתרון הזה הוא יחיד בסביבה בגלל למת ההמשכה שהרי כל נגזרותיו נקבעות ב0.
מכיוון ש $a_{jk}^{i}\left(\ldots\right),b_{j}$ אנליטיות ב $z=0$ אזי הן באיזשהו $C_{M,r}\left(0\right)$. כלומר, כולן נשלטות ע"י $\frac{Mr}{r-(x_1+\ldots+x_{n-1}+u_1+\ldots+u_N)}\equiv\varphi_{M,r}\left(z\right)$.
ניקח את כל ה A_{jk}^{i},B_{j} בתור φ.

$$\frac{\partial}{\partial x_n}U_j\left(x\right)=\frac{Mr}{r-\left(x_1+\ldots+x_{n-1}+U_1+\ldots+U_N\right)}\left(1+\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{N}\frac{\partial}{\partial x_i}U_k\right)$$

25/12/2012 וזה עבור $1\leq j\leq N$.
כאשר:

$$U_j\left(x_1,\ldots,x_{n-1},0\right)\equiv 0$$

ננסה פתרון אנליטי מהצורה:

$$U_j\left(x\right)\equiv V\left(X,Y\right)$$

כך ש:

$$\forall j\ X=x_1+\ldots+x_{n-1}\ Y=x_n$$

נקבל כי:

$$\frac{\partial}{\partial Y}V\left(X,Y\right)=\frac{Mr}{r-X-NV}\left(1+N\left(n-1\right)\frac{\partial V}{\partial X}\right)$$

כאשר:

$$V\left(X,0\right)\equiv 0$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}X\left(t,s\right) &= -\frac{MrN\left(n-1\right)}{r-X\left(t,s\right)-NV\left(t,s\right)}\\ \frac{\partial}{\partial t}Y\left(t,s\right) &= 1\\ \frac{\partial}{\partial t}V\left(t,s\right) &= \frac{Mr}{r-X\left(t,s\right)-NV\left(t,s\right)}\end{aligned}$$

כמו כן:

$$\begin{aligned}X\left(0,s\right) &= s\\ Y\left(0,s\right) &= 0\\ V\left(0,s\right) &= 0\end{aligned}$$

בעזרת החלפת משתנה $\left(t,s\right)\to\left(X,Y\right)$ נקבל: $V\left(t,s\right)\to V\left(X,Y\right)$

הערה 8.1.7

$$\underbrace{a}_{\frac{\partial x}{\partial t}} u_x + bu_y = c$$

נקבל:

$$V(X,Y) = \frac{1}{Nn}\left(r - X - \sqrt{(r-X)^2 - 2nNMrY}\right)$$

אנליטית בסביבת $X = Y = 0$. ■

תוספת למשפט: סיימנו להוכיח כי אם Γ לא קרקטריסטי ב $x = 0 \in \Gamma$ (ביחס לנתוני Cauchy) אז קיים פתרון אנליטי יחיד בסביבת $x = 0$. יהי עכשיו $K \Subset \Gamma$ מקטע של Γ כך שלכל נקודה $y \in K \subseteq \Gamma$ קיימת סביבה (פיסת משטח) Γ_y שאינה קרקטריסטית.
בקיצור, סביבה של K בΓ שאינה קרקטריסטית. אזי לכל נקודה $y \in K$ קיימת סביבה $\Sigma_y \in \mathbb{R}^n$ שבה קיים פתרון יחיד (זה המשפט שהוכחנו).
מספר סופי של סביבות כאלה: $\Sigma_{y_1}, \ldots, \Sigma_{y_L}$ מכסות את K והפתרון בקבוצת החפיפה $\Sigma_{y_i} \cap \Sigma_{y_j}$ חייבים להתלכד (בגלל היחידות הפתרון האנליטי). לכן הפתרון המבוקש הוא פשוט איחוד הפתרונות בכל Σ_{y_i}.

חלק IV

משוואת Laplace ו: Poisson ב$\mathbb{R}^n$

פרק 9

משוואת Laplace

9.1 פונקציות הרמוניות

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום (פתוח קשיר)

הגדרה 9.1.1 פתרון קלאסי (כלומר: $C^2(\Omega)$) של $\Delta u = 0$ ייקרא פונקציה הרמונית.

הגדרה 9.1.2 אם $u \in C^2(\Omega)$ ו: $\Delta u \geq 0$ נאמר כי u סבהרמונית.
אם $u \in C^2(\Omega)$ ו $\Delta u \leq 0$ נאצר כח תן סופרהרמונית.

9.1.1 ובחזרה לממוצעים...

תהי u פונקציה הרמונית ותהי $M_u(x,r)$.

תזכורת 9.1.3 נקח פונקציה $h \in C^2(\Omega)$, ואז הגדרנו:

$$M_n(x,r) := \frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|=1} h(x+r\xi)\,\mathrm{d}S_\xi$$

(הממוצע על ספירה ברדיוס r). הכוונה ש $\overline{B(x,r)} \subseteq \Omega$.

$$\frac{\partial}{\partial r}M_h(x,r) = \frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|=1}\nabla_x h(x+r\xi)\cdot\xi\mathrm{d}S_\xi = \frac{1}{\omega_n r}\int_{|\xi|=1}\underbrace{\nabla_\xi h(x+r\xi)\,\xi}_{\substack{\frac{\partial}{\partial\nu}h(x+r\xi)\\ \text{על השפה } |\xi|=1}}\mathrm{d}S_\xi$$

וכעת ממשפט גאוס:

$$= \frac{1}{\omega_n r}\int_{|\xi|\leq 1}\Delta_\xi(x+r\xi)\,\mathrm{d}\xi = \frac{r^2}{\omega_n r}\int_{|\xi|\leq 1}\Delta_x(x+r\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

כלומר, מהצבת משתנה $y = r\xi + x$ נקבל:

$$\frac{\partial}{\partial r}M_h(x,r) = \frac{r}{\omega_n}r^{-n}\Delta_x\int_{|y-x|\leq r}h(y)\,\mathrm{d}y = \frac{r^{1-n}}{\omega_n}\Delta_x\int_0^r\int_{|y-x|=\rho}h(y)\,\mathrm{d}S_\rho\mathrm{d}\rho =$$

$$r^{1-n}\Delta_x\int_0^r\left(\rho^{n-1}\frac{1}{\omega_n\rho^{n-1}}\int_{|y-x|=\rho}h(y)\,\mathrm{d}S_\rho\right)\mathrm{d}\rho =$$

$$r^{1-n}\Delta_x\left(\int_0^r\rho^{n-1}M_n(x,\rho)\,\mathrm{d}\rho\right)$$

נכפיל את שני האגפים ב r^{n-1} ונקבל:

$$r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}M_h\left(x,r\right)=\Delta_x\left(\int\limits_0^r\rho^{n-1}M_h\left(x,\rho\right)\mathrm{d}\rho\right)$$

נגזור שוב לפי r ונקבל:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}M_h\left(x,r\right)\right)=\Delta_x\left(r^{n-1}M_h\left(x,r\right)\right)=r^{n-1}\left(\Delta_xM_h\left(x,r\right)\right)$$

כעת, אם $h\equiv u$ פונקציה הרמונית אזי:

$$\Delta_xM_u\left(x,r\right)=\frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|=1}\cancelto{0}{\Delta_xu\left(x+r\xi\right)}\mathrm{d}\xi=0$$

מכיוון ש u הרמונית. ולכן, אם $u\in C^2\left(\Omega\right)$ הרמונית ב Ω אזי:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}M_u\left(x,r\right)\right)\equiv0$$

במילים אחרות:

$$r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}M_u\left(x,r\right)\equiv\beta\left(x\right)$$

(עבור $r>0$). עם זאת, נזכר כי במקרה הכללי: $M_h\left(x,0\right)=h\left(x\right)$. ו:

$$\frac{\partial}{\partial r}M_h\left(x,r\right)\mid_{r=0}=\frac{1}{\omega_n}\int_{|\xi|=1}\nabla_xh\left(x+r\xi\right)\xi\mathrm{d}S_\xi\underset{r\to0}{\longrightarrow}0$$

מכיוון ש $\left|\nabla_xh\left(x+r\xi\right)-\nabla_xh\left(x\right)\right|\underset{r\to0}{\longrightarrow}0$.
ולכן, במקרה שלנו, כאשר $r\to0$ נקבל כי:

$$r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}M_u\left(x,r\right)\to0$$

אבל $\beta\left(x\right)$ לא תלויה בr. לכן נקבל כי $\beta\left(x\right)\equiv0$. ולכן:

$$\frac{\partial}{\partial r}M_u\left(x,r\right)\equiv0$$

מסקנה 9.1.4

אם $u\in C^2\left(\Omega\right)$ הרמונית בΩ אזי לכל $x\in\Omega$ נקבל כי:

$$M_u\left(x,r\right)\equiv\gamma\left(x\right)$$

לכל $r>0$. אבל, $M_u\left(x,r\right)\underset{r\to0}{\longrightarrow}u\left(x\right)$. ולכן:

משפט 9.1.5

אם $u\in C^2\left(\Omega\right)$ הרמונית בΩ, אזי בכל נקודה היא שווה למצוע שלה על ספירה כלשהי המרוכזת בx.

המשפט ההפוך הינו:

משפט 9.1.6

נניח כי $u \in C^2(\Omega)$ מקיימת את תוכנת הממוצע: $u = M_u(x,r)$ (לכל $x \in \Omega$ ולכל $r \geq 0$) אזי u הרמונית.

הוכחה: לפי:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}M_h(x,r)\right) = \Delta_x\left(r^{n-1}M_h(x,r)\right)$$

ומכך ש $M_u(x,r) = u(x)$ לכל $r > 0$ נקבל כי:

$$\forall r > 0 \quad 0 \equiv \Delta_x\left(r^{n-1}u(x)\right) \Rightarrow \Delta_x u(x) \equiv 0$$

■

9.2 משפט הערך הממוצע (חלק 2)

אנו יודעים כי:

$$u(x) = \underbrace{\frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}}\int_{|y-x|=\rho} u(y)\,\mathrm{d}S_y}_{M_u(x,\rho)}$$

נכפיל ב ρ^{n-1} ונבצע אינטגרציה על $[0,r]$ לפי ρ:

$$\int_0^r \rho^{n-1}u(x)\,\mathrm{d}\rho = \frac{1}{\omega_n}\int_0^r\left(\int_{|y-x|=\rho} u(y)\,\mathrm{d}S_\rho\right)\mathrm{d}\rho = \frac{1}{\omega_n}\int_{|y-x|\leq r} u(y)\,\mathrm{d}y$$

כלומר:

$$u(x)\frac{r^n}{n} = \frac{1}{\omega_n}\int_{|y-x|\leq r} u(y)\,\mathrm{d}y$$

כלומר:

$$u(x) = \frac{1}{\underbrace{\frac{\omega_n}{n}r^n}_{\text{נפח הכדור ברדיוס } r}}\int_{|y-x|\leq r} u(y)\,\mathrm{d}y$$

כלומר קיבלנו את:

משפט 9.2.1 משפט הערך הממוצע (גרסה 2)

אם $u \in C^2(\Omega)$ הרמונית בΩ אזי $u(x)$ = הממוצע של u על כל כדור $\overline{B(x,r)} \subseteq \Omega$

אנחנו קיבלנו את הגרסה השניה (ממוצע על כדורים) מתוך הראשונה (ממוצע על ספירות).

שאלה: אם u מקיימת תכונת הממוצע על כדורים, האם אפשר להוכיח כי היא מקיימת את תכונת הממוצע על ספירה?

9.3 משפט המקסימום החזק

משפט 9.3.1 משפט המקסימום החזק

תהי $u(x) \in C^2(\Omega)$ הרמונית בΩ. ותהי $x_0 \in \Omega$ כך ש:

$$u(x_0) = \max_{x\in\Omega}\{u(x)\}$$

אזי $u \equiv \text{const}$ ב Ω.

הוכחה: (להוכחה אלטרנטיבית, וחזקה יותר עבור סאב־הרמוניות, אפשר להסתכל בסיכומים של ספקטרלית ב2.4).
אם u מקיימת את תכונת הממוצע וערכה ב $\leq y$ ערכה בכל $z \in B(y,\rho)$ עבור $\rho > 0$ מסויים, אזי $u \equiv u(y)$ ב $B(y,\rho)$.

לכן, הקבוצה: $\left\{y \mid \ u(y) = \max_{x\in\Omega} u(x)\right\}$ היא פתוחה, ואינה ריקה כי לפי הנחה x_0 שייכת אליה.

מצד שני, ברור כי היא סגורה (יחסית) בΩ. בגלל רציפות. (הקבוצה $\{u \equiv k\}$ סגורה לכל u רציפה). כיוון ש Ω תחום קשיר, הקבוצה היא כל Ω. ■

מסקנה 9.3.2 משפט המינימום החזק

אם $u \in C^2(\Omega)$ הרמונית ו: $u(x_0) = \min\{u(x) \mid \ x \in \Omega\}$ ו $x_0 \in \Omega$ אזי $u = \text{const}$ ב Ω.

הוכחה: נסתכל על $-u$. ואז מעקרון המקסימום החזק סיימנו. ■

01/01/2013

נבחין כי פתרון של משוואת לפלס, כלומר:

$$\Delta u = 0$$

הוא למעשה סוג מסויים של פתרונות של משוואת הגלים:

$$u_{tt} - c^2\Delta u = 0$$

כאשר למעשה:

$$u(x,t) = u(x)$$

זה פתרון שנקרא Steady state, פתרון של גל עומד.
או התכנסות של פתרון שהוא מתייצב.

משפט 9.3.3 עקרון המקסימום\מינימום החלש

נניח כי Ω תחום חסום ותהי $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ אזי: $\max_{x\in\overline{\Omega}} u = \max_{x\in\partial\Omega} u$ וגם:

$$\min_{x\in\overline{\Omega}} u = \min_{x\in\partial\Omega} u$$

במילים אחרות, u אינה עולה ב $\overline{\Omega}$ ואינה יורדת ב $\overline{\Omega}$ מעל או מתחת לערכה המקסימלי (או המינימלי) על השפה $\partial\Omega$.

הוכחה: נניח $u(x_0) > \max_{x\in\partial\Omega} u(x)$. אזי קיים $\overline{x} \in \Omega$ כך ש:

$$u(\overline{x}) = \max_{x\in\overline{\Omega}} u(x)$$

(בגלל קיום x_0 ברור כי: $\overline{x} \notin \partial\Omega$).
ואז, העקרון החזק אומרי כי: $u(x) \equiv u(\overline{x})$ וזאת סתירה כי גם: $u|_{\partial\Omega} \equiv u(\overline{x})$ (רציפות).
לכן, אין $x_0 \in \Omega$ כך ש: $u(x_0) > \max_{\partial\Omega} u(x)$ ■

הערה 9.3.4 יתר על כן, אם קיים: $u(x_0) = \max_{x\in\partial\Omega} u(x)$ ו: $x_0 \in \Omega$ אז:

$$u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u(x)$$

אז, העיקרון החזק יגיד כי: $u(x) \equiv u(x_0)$.

נניח כי Ω חסום ו$\partial\Omega$ חלקה. האם בהינתן $\varphi \in C(\partial\Omega)$ קיימת $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ הרמונית כך ש: $u|_{\partial\Omega} = \varphi$.

יחידות: אם קיימת u כזאת אזי היא יחידה, שהרי אחרת גם: $v(x)$ כזאת אזי: $u - v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ הרמונית ב Ω ו: $u - v|_{\partial\Omega} \equiv 0$.
אבל אז, מעקרון המקסימום\מינימום החלש נקבל כי: $u - v \equiv 0$.

שאלה? האם קיום $u(x)$ כזאת לא נובע כבר ממשפט Cauchy-Kovalewski?

תשובה: ראשית, על $\partial\Omega$ להיות אנליטית. כלומר: $x_n = \psi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ (בסביבה קטנה של $y \in \partial\Omega$) כאשר ψ אנליטית.
שנית, ברור שמקדמי המשוואה: $\Delta u = 0$ הם אנליטיים.
כמו כן, נדרש כי $\varphi|_{\partial\Omega} = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}, \psi(x_1, \ldots, x_{n-1}))$ תהיה אנליטית.
ולבסוף, צריך שמהקטע (סביב $y \in \partial\Omega$ יהיה לא־קרקטריסטי. כלומר:

$$x_n - \psi(x_1, \ldots, x_{n-1}) = 0$$

נזכר כי הדרישה לקרקטריסטיות תהא:

$$\det\left(\sum_{|\alpha|=m} A_\alpha(x)(D\varphi)^\alpha\right) = 0$$

במקרה שלנו:

$$\Delta = \partial_{x_1x_1} + \ldots + \partial_{x_nx_n}$$

כלומר, כדי שהמשטח לא יהיה קרקטריסטי נדרוש:

$$\sum_{i=1}^{n-1} (-\partial x_i\psi)^2 + 1 \neq 0$$

כלומר, אין בכלל משטחים קרקטריסטיים במקרה של משוואת לפלס.
לכן, ניתן לעשות זאת מכיוון שלכל סביבה של השפה נקבל פתרון, וכך נמשיך.

פרק 10

בעיית דיריכלה (Dirichlet)

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום חסום, קשיר, $\partial\Omega$ חלקה.

10.1 נוסחאת Green

משפט 10.1.1 נוסחאת Green

תהיינה:

$$u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1\left(\overline{\Omega}\right)$$

כלומר, הנגזרות $Du, Dv \in C^1(\Omega)$ ניתנות להמשכה רציפה ל $\overline{\Omega}$.
אזי:

$$\int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial \nu} - u\frac{\partial v}{\partial \nu}\mathrm{d}S$$

כאשר $\frac{\partial}{\partial \nu}$ הנגזרת הנורמלית בכיוון החיצוני.

הוכחה:

$$v\Delta u = \underbrace{\nabla(v\nabla u)}_{\substack{= \nabla v\nabla u + v\Delta u \\ \text{מלייבניץ}}} - \nabla v \cdot \nabla u$$

לכן:

$$\int_\Omega v\Delta u = \int_\Omega \nabla(v\nabla u) - \int_\Omega \nabla v\nabla u$$

ובחילופי תפקידים:

$$\int_\Omega u\nabla v = \int_\Omega (\nabla(u\nabla v)) - \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla u$$

ובחיסור המשוואות (ושימוש במשפט הדיברגנץ\גאוס) נקבל:

$$\int_\Omega v\Delta u - u\nabla v = \int_{\partial\Omega} v\underbrace{\nabla u \cdot \vec{\nu}}_{\frac{\partial u}{\partial \nu}}\mathrm{d}S - \int_{\partial\Omega} u\nabla v \cdot \vec{\nu}\mathrm{d}S$$

■

10.2 הגדרת הפתרון היסודי ב $\mathbb{R}^n$

בהינתן $x, y \in \mathbb{R}^n$ נגדיר:

$$\Gamma(x-y) = \begin{cases} \frac{1}{(2-n)\omega_n} |x-y|^{2-n} & n > 2 \\ \frac{1}{2\pi} \log|x-y| & n = 2 \end{cases}$$

$\omega_n = \left|S^{n-1}\right|$. אנו קוראים ל Γ הפתרון היסודי של Δ.

$$\Delta_x \Gamma(x-t) = \delta_y$$

10.2.1 נגזרות x של $\Gamma(x-y)$

$$D_i \Gamma(x-y) = \frac{1}{\omega_n}(x_i - y_i)|x-y|^{-n}, \ x \neq y, \ i = 1, \ldots, n$$

עבור: $n \geq 2$. מכיוון ש:

$$D_i = \frac{\partial r}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial}{\partial r}$$

כאשר $r = |x-y|$. ולכן:

$$\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i - y_i}{|x-y|}$$

כעת, הנגזרת השני:

$$D_{i,j}\Gamma(x-y) = \frac{1}{\omega_n}\left\{|x-y|^2 \delta_{ij} - n(x_i - y_i)(x_j - y_j)\right\}|x-y|^{-n-2}$$

מדוע? נניח כי $i \neq j$:

$$D_{i,j}\Gamma(x-y) = \frac{1}{\omega_n}(x_i - y_i)(-n)|x-y|^{-1-n} \cdot (x_j - y_j)|x-y|^{-1}$$

וזה בדיוק מה שכתבנו להעיל.

תרגיל: לבדוק במקרה של $i = j$.

עבור $x \neq y$:

$$\Delta_x \Gamma(x-y) = \frac{1}{\omega_n} n|x-y|^{-n} - \frac{n}{\omega_n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2|x-y|^{-n-2} = 0$$

עבור $x \neq y$ מכייון שהסכום:

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2 = |x-y|^2$$

נבחין כי:

$$|D_{i,j}\Gamma(x-y)| \leq C|x-y|^{-n}$$

עבור איזשהו קבוע C . כלומר, זה לא אינטגרבילי ליד y אבל:

$$|D_i\Gamma(x-y)| \leq C|x-y|^{1-n}$$

כן אינטגרבילי ליד y.

$$|\Gamma| \leq C|x-y|^{2-n}$$

נקח כדור קטן: $B_\rho(y) \subseteq \Omega$ כדור ברדיוס $\rho > 0$ וממורכז ב y.
נקח: $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ ונפעיל את נוסחאת גרין על $\Omega \backslash B_\rho(y)$ (כפונקציות של x):

$$\int_{\Omega\backslash B_\rho(y)} \left(\Gamma\Delta u - \cancelto{0}{u\Delta_x\Gamma}\right) = \int_{\partial\Omega} \Gamma\frac{\partial u}{\partial\nu_x} - u\frac{\partial\Gamma(x-y)}{\partial\nu_x} + \int_{\partial B_\rho(y)} \Gamma\frac{\partial u}{\partial\nu_x} - u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu_x}$$

נרצה לקחת $\rho \to 0$.
נבחין כי המידה של השפה של $B_\rho(y)$ מתהנגת כמו ρ^{n-1}, מכיוון ש:

$$|\partial B_\rho(y)| = \omega_n\rho^{n-1}$$

ולפי הערכות על Γ:

$$\left|\int_{\partial B_\rho(y)} \Gamma\frac{\partial u}{\partial\nu_x}\mathrm{d}S\right| \leq C\rho^{n-1}\rho^{2-n} \underset{\rho\to 0}{\longrightarrow} 0$$

כאשר C תלוי ב u (כלומר: $\max\left|\frac{\partial u}{\partial\nu_x}\right|$ שהוא סופי, $u \in C^2$).
ולכן:

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{\Omega\backslash B_\rho(y)} \Gamma\Delta u = \int_{\partial\Omega}\left(\Gamma\frac{u}{\partial\nu_x} - u\frac{\partial\Gamma(x-y)}{\partial\nu_x}\right)\mathrm{d}S_x - \lim_{\rho\to 0}\int_{\partial B_\rho(y)} u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu_x}\mathrm{d}S_y$$

נחשב את:

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{\partial B_\rho(y)} u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu_x}\mathrm{d}S_y$$

נשים לב כי:

$$\frac{\partial}{\partial\nu_x}\Gamma(x-y) = -\frac{\partial}{\partial r}\Gamma(x-y) = -\frac{1}{\omega_n}|x-y|^{1-n}$$

(הנורמל החיצוני הפונה לכיוון y).
מצד שני:

$$u|_{\partial B_\rho(y)} \to u(y)$$

במידה שווה על הספירה. אזי:

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{\partial B_\rho(y)} u\frac{\partial\Gamma}{\partial\nu_x}\mathrm{d}S_y = u(y)\cdot\int_{\partial B_\rho(y)} -\frac{1}{\omega_n}|x-y|^{1-n}\mathrm{d}S_x = u(y)\left(-\frac{1}{\omega_n}\right)\omega_n\rho^{n-1}\rho^{1-n} = -u(y)$$

לסיכום:

$$\int_\Omega \Gamma(x-y)\Delta u(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega}\left(\Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial\nu_x} - u\frac{\partial\Gamma(x-y)}{\partial\nu_x}\right)\mathrm{d}S_x + u(y)$$

ולכן:

$$\boxed{u(y) = \int_\Omega \Gamma(x-y)\Delta u(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega}\left(\Gamma(x-y)\frac{\partial u}{\partial\nu_x} - u\frac{\partial\Gamma(x-y)}{\partial\nu_x}\right)\mathrm{d}S_x}$$

וזוהי נוסחת ההצגה הבסיסית של תורת הפוטנציאל.

מסקנה 10.2.1

תהי $u \in C_0^2(\Omega)$, כלומר $u \in C^2(\Omega)$ ובעלת תומך קומפקטי ב Ω (במילים אחרות $u \equiv 0$ בסביבה של $\partial\Omega$).
אינטגרל השפה = 0 (כי $u|_{\partial\Omega}, \nabla u|_{\partial\Omega} = 0$) ואז:

$$u(y) = \int_\Omega \Gamma(x-y)\,\Delta u(x)\,\mathrm{d}x$$

ואם היינו פיסיקאים, היינו מעבירים את הלאפלאסיאן שמאלה, והיינו מקבלים בדיוק את הקטע ש$\Delta\Gamma(x-y)$ היא בעצם הדלתא של דיראק.

02/01/2013

הערה 10.2.2 בקשר לבחנים. למה הפתרון של משוואה הגלים יחיד?
נתבונן במקרה:

$$u_{yy} - c^2\Delta u = 0$$

כאשר:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= 0 \\ u_t(x,0) &= x_3 \end{aligned}$$

נבחין כי הפתרון הוא:

$$u(x,t) = tx_3$$

יחידות הפתרון, נובעת מכך שפתרון חזק ראינו שיש לכל היותר אחד, ופתרון קלאסי הוא בהכרח חזק.
כמו כן, בהוכחה של קירכהוף, אמרנו שאם יש פתרון קלאסי הוא ניתן ע"י קירכהוף.

ועכשיו בחזרה לבעיית דיריכלה...
נזכור כי אמרנו כי אם: $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ כאשר $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ חסום ו $\partial\Omega$ חלקה. אזי:

$$u(y) = \int_\Omega \Gamma(x-y)\,\Delta u(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega}\left(u(x)\frac{\partial}{\partial\nu_x}\Gamma(x-y) - \Gamma(x-y)\frac{\partial}{\partial\nu_x}u(x)\right)\mathrm{d}S_x$$

מסקנה 10.2.3

אם $u \in C^2(\Omega)$ הרמונית, אזי u אנליטית (למעשה, אין צורך בחסימות Ω או בהנחה על $\partial\Omega$).

הוכחה: תהי $x_0 \in \Omega$ וכדור $B_{2R}(x_0) \subseteq \Omega$ וגם הסגור שלו בΩ. נפעיל את ההצגה על $B_{2R}(x_0)$. אז:

$$u(y) = \int_{\partial B_{2R}(x_0)}\left(u(x)\frac{\partial\Gamma(x-y)}{\partial\nu_x} - \Gamma(x-y)\frac{\partial u(x)}{\partial\nu_x}\right)\mathrm{d}S_x$$

עבור $y \in B_R(x_0)$, $|y-x| \geq R$ ל: $x \in \partial B_{2R}(x_0)$. אבל אז ברור כי האינטגרנד הוא פונקציה אנליטית ב: $y \in B_R(x_0)$ הנמצאת ב $C_{M,r}(x)$ עבור $x \in \partial B_{2R}(x_0)$ כאשר $M, r > 0$ לא תלויים ב x. ■

10.3 פונקציית גרין

נחזור לדון ב Ω חסום ו $\partial\Omega$ חלקה.
תהי $h \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ פונקציה הרמונית כלשהי. נכתוב עבורה את נוסחת ההצגה:

$$h(y) = \int_{\partial\Omega}\left(h(x)\frac{\partial}{\partial\nu_x}\Gamma(x-y) - \Gamma(x-y)\frac{\partial h(x)}{\partial\nu_x}\right)\mathrm{d}S_x$$

הערה 10.3.1 האיבר הראשון נעלם מכיוון ש h הרמונית!

אנו כרגע לא נתעסק איתה...
נכתוב גם את נוסחאת Green עבור h ו: $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ כללית.

$$\int_{\partial\Omega} \left(u(x) \frac{\partial h}{\partial \nu_x} - h(x) \frac{\partial u}{\partial \nu_x} \right) = \int_{\Omega} \left(\cancelto{0}{u\Delta h} - h\Delta u \right) \mathrm{d}x = -\int_{\Omega} h\Delta u \mathrm{d}x$$

הערה 10.3.2 שוב, $\Delta h = 0$ מכיוון ש h הרמונית...

נכתוב זאת כך:

$$0 = \int_{\Omega} h\Delta u \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \left(u(x) \frac{\partial h}{\partial \nu_x} - h(x) \frac{\partial u}{\partial \nu_x} \right) \mathrm{d}S_x$$

נתבונן בנוסחאת ההצגה של u:

$$u(y) = \int_{\Omega} \Gamma(x-y) \Delta u(x) \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \left(u(x) \frac{\partial}{\partial \nu_x} \Gamma(x-y) - \Gamma(x-y) \frac{\partial}{\partial \nu_x} u(x) \right) \mathrm{d}S_x$$

ונחבר את שתי המשוואות יחד. נקבל:

$$u(y) = \int_{\Omega} \Delta u(x) [h(x) + \Gamma(x-y)] \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} \left(u(x) \frac{\partial}{\partial \nu_x} [h(x) + \Gamma(x-y)] - \frac{\partial u}{\partial \nu_x} [h(x) + \Gamma(x-y)] \right)$$

נבחין כי הסוגר המרובע בכל מקום, היא תמיד אותה פונקצייה!
הנוסחא הנ"ל נכונה לכל פונקציה הרמונית $h \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$.
כעת, לכל y נקח $h_y(x)$ כזאת כך ש $h_y(x) = -\Gamma(x-y)$ לכל $x \in \partial\Omega$. אזי, הפונקציה:

$$G(x,y) = h_y(x) + \Gamma(x-y)$$

מקיימת את התכונות הבאות:

1. היא הרמונית ב: $x \in \Omega \setminus \{y\}$.
2. $G(x,y) \equiv 0$ עבור $x \in \partial\Omega$ ו: $y \in \Omega$.

הגדרה 10.3.3 פונקציה $G(x,y)$ המקיימת את התכונות הנ"ל נקראת פונקצייה Green של Ω. והיא מוגדרת על $(x,y) \in \overline{\Omega} \times \Omega$.

מסקנה 10.3.4

אם $G(x,y)$ פונקציית Green של Ω אזי לכל $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ מתקיים:

$$u(y) = \int_{\Omega} G(x,y) \Delta u(x) \mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} u(x) \frac{\partial}{\partial \nu_x} G(x,y) \mathrm{d}S_x$$

הגדרה 10.3.5 הפונקציה $K(x,y) = \frac{\partial}{\partial \nu_x} G(x,y)$ עבור $x \in \partial\Omega$ ו: $y \in \Omega$ נקראת גרעין Poisson של Ω.
(הגרעין מוגדר על $(x,y) \in \partial\Omega \times \Omega$).

10.3.0.1 שאלה?

08/01/2013 אם $\Omega = B_R(x_0)$ האם ניתן למצוא את $G(x,y)$?

טענה 10.3.6

אם קיים גרעין Poisson אזי:

$$\int_{\partial\Omega} K(x,y)\,\mathrm{d}S_x = 1$$

לכל $y \in \Omega$.

הוכחה: נקח $u(x) \equiv 1$. נקבל:

$$1 = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial}{\partial \nu_x} G(x,y)\,\mathrm{d}S_x = \int_{\partial\Omega} K(x,y)\,\mathrm{d}S_x$$

כנדרש. ■

10.3.1 פונקציית Green וגרעין Poisson לכדור $B_R(0)$

נחזור לשאלה בנוגע לפונקציית Green וגרעין Poisson לכדור $B_R(0)$.

טענה 10.3.7

פונקציית Green של $B_R(0)$ נתונה ע"י:

$$G(x,y) = \begin{cases} \Gamma(x-y) - \Gamma\left(\frac{|y|}{R}(x-\overline{y})\right) & y \neq 0 \\ \Gamma(x) - \Gamma(R) & y = 0 \end{cases} \tag{10.3.1}$$

כאשר:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{\omega_n(2-n)}|x|^{2-n}$$

עבור $n \geq 3$ (פתקיים: $\Gamma(x) = \Gamma(|x|)$). ונסמן: $\Gamma(R) = \Gamma(\xi)$ כאשר $|\xi| = R$.
וכמו כן: $\overline{y}$ היא נקודת השיקוף של y ביחס ל $B_R(0)$, כלומר: $|\overline{y}| \cdot |y| = R^2$ ו: $0, y, \overline{y}$ הן קו־לינאריות (יושבות על ישר אחד).

הוכחה: אנו יודעים כי: $\Gamma(x-z)$ הרמונית ב: $\mathbb{R}^n \setminus \{z\}$. בפרט, עבור $z = \overline{y} \notin B_R(0)$ (אם $y \in B_R(0)$). נקבל כי $\Gamma(x-\overline{y})$ הרמונית ב$B_R(0)$.

ולכן, גם: $\Gamma\left(\frac{|y|}{R}(x-\overline{y})\right)$ הרמונית ב $B_R(0)$ (מכיוון שאם $h(x)$ הרמונית גם $h(\gamma(x-a))$ הרמונית).

לכן, נשאר להראות כי הפונקציה ההרמונית: $h_y(x) = -\Gamma\left(\frac{|y|}{R}(x-\overline{y})\right)$ מקיימת את תנאי ההגדרה. כלומר, נשאר להוכיח כי $G(x,y) = 0$ לכל $x \in \partial B_R(0)$.
במילים אחרות, עבור $|x| = R$ צריך להוכיח כי

$$\Gamma(x-y) = \Gamma\left(\frac{|y|}{R}(x-\overline{y})\right)$$

כאשר $0 \neq |y| < R$.

הערה 10.3.8 במקרה $y = 0$ הנ"ל טריוויואלי.

צריך להראות כי:

$$|x-y|^{2-n} = \left(\frac{|y|}{R}|x-\overline{y}|\right)^{2-n}$$

משיקולים גיאומטרים (דמיון משולשים וכו' כאשר מסתכלים על $y, x, \overline{y}$ בתור קודקודים, לעשות את זה כתרגיל). נקבל כי:

$$\forall x \in \partial B_R(0) \quad |x - \overline{y}| = \frac{R}{|y|}|x - y|$$

נסתכל במישור המרוכב, ואז $y = w$ ואז $\overline{y} = \frac{R^2}{\overline{w}}$ (כאשר $\overline{w}$ הוא צמוד מרוכב) ו $x = Re^{i\theta}$. ואז:

$$\frac{\left|Re^{i\theta} - w\right|}{\left|Re^{i\theta} - \overline{w}\right|} = \frac{|\overline{w}|\left|Re^{i\theta} - w\right|}{\left|\overline{w}Re^{i\theta} - R^2\right|} = \frac{|\overline{w}|\left|Re^{i\theta} - w\right|}{\left|R\cancel{e^{i\theta}}\right|\left|\overline{w} - Re^{-i\theta}\right|} = \frac{|w|}{R} = \frac{|y|}{R}$$

ולכן:

$$|x - y|^{2-n} = \left(\frac{|y|}{R}|x - \overline{y}|\right)^{2-n}$$

ובכך, הוכחה הטענה. ■

10.3.1.1 גרעין Poisson של $B_R(0)$

הצעד הבא הוא לחשב את גרעין Poisson ל $B_R(0)$.

$$K(x, y) = \frac{\partial}{\partial \nu_x} G(x, y)$$

כאשר $x \in \partial B_R(0)$.

$$D_i \Gamma(x) = \frac{1}{\omega_n}|x|^{1-n}\frac{x_i}{R}$$

כאשר $|x| = R$.

$$\frac{\partial}{\partial \nu_x}\Gamma(x - y) = \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{R}\frac{1}{\omega_n}|x - y|^{1-n}\frac{x_i - y_i}{|x - y|}$$

כעת:

$$\frac{\partial}{\partial \nu_x}\Gamma\left(\frac{|y|}{R}(x - \overline{y})\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{R}\partial_{x_i}\Gamma\left(\frac{|y|}{R}(x - \overline{y})\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{R}\frac{|y|}{R}(D_i\Gamma)\left(\frac{|y|}{R}(x - \overline{y})\right)^{1-n}\frac{\cancel{\frac{|y|}{R}}(x_i - \overline{y_i})}{\cancel{\frac{|y|}{R}}|x - \overline{y}|} =$$
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{R}\frac{1}{\omega_n}\left(\frac{|y|}{R}\right)^{2-n}|x - \overline{y}|^{-n}(x_i - \overline{y_i})$$

אנו בעצם עושים הכללה של פרק $8.1 - 8.2$. תרגילים שיש לעשות $4, 5$.

ולכן, עבור $B_R(0)$ נקבל כי:

$$K(x, y) = \frac{\partial}{\partial \nu_x}\Gamma(x - y) - \frac{\partial}{\partial \nu_x}\Gamma\left(\frac{|y|}{R}(x - \overline{y})\right) = \frac{1}{\omega_n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{R}\left[|x - y|^{-n}(x_i - y_i) - \left(\frac{|y|}{R}\right)^{2-n}|x - \overline{y}|^{-n}(x_i - \overline{y_i})\right]$$

כעת נזכר כי: $|x-y|^{-n}=\left(\frac{|y|}{R}|x-\overline{y}|\right)^{-n}=\left(\frac{|y|}{R}\right)^{-n}|x-\overline{y}|^{-n}$ ולכן:

$$=\frac{1}{\omega_n}\cdot|x-y|^{-n}\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{R}\left[(x_i-y_i)-\left(\frac{|y|}{R}\right)^2(x_i-\overline{y}_i)\right]=\frac{|x-y|^{-n}}{\omega_n}\sum_{i=1}^{n}\left[x_i^2-\cancel{x_iy_i}-\frac{|y|^2}{R^2}x_i^2+\cancel{\frac{|y|^2}{R^2}x_i\cdot\frac{R^2}{|y|^2}y_i}\right]=$$
$$\frac{|x-y|^{-n}}{\omega_n}\sum_{i=1}^{n}\left[x_i^2-\frac{|y|^2}{R^2}x_i^2\right]=\frac{|x-y|^{-n}}{\omega_n}\left[R^2-\frac{|y|^2}{\cancel{R^2}}\cancel{R^2}\right]=\frac{|x-y|^{-n}}{\omega_n}\left[R^2-|y|^2\right]$$

כאשר אנו משתשים בכך ש $|\overline{y}|=\frac{R^2}{|y|^2}$ ולכן: $\overline{y_i}=\frac{R^2}{|y|^2}y_i$

כלומר, לסיכום:

$$K(x,y)=\frac{|x-y|^{-n}}{\omega_n}\cdot\frac{R^2-|y|^2}{R}$$

עבור $|x|=R$ ו: $|y|<R$.

בפרט, $K(x,y)>0$. כזכור, הראינו את הטענה:

$$\int_{\partial\Omega}K(x,y)\,\mathrm{d}S_x=1$$

בז'רגון, $K(x,y)$ נקרא גרעין סומאביליות חיובי (בx לכל $y\in B_R(0)$).

אם $u\in C^2(B_R(0))\cap C^1\left(\overline{B_R(0)}\right)$ הרמונית אזי:

$$u(y)=\int_{\partial B_R(0)}u(x)K(x,y)\,\mathrm{d}S_x=\int_{\partial B_R(0)}u(x)\cdot\frac{R^2-|y|^2}{R\omega_n}|x-y|^{-n}\,\mathrm{d}S_x$$

הערה 10.3.9 הנוסחה הזאת נכונה ל $n\geq 2$.

טענה 10.3.10

נחזור ל $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ חסום כללי. אם קיים גרעין *Poisson* של Ω, $K(x,y)$. אזי לכל $x\in\partial\Omega$ מתקיים: $K(x,y)$ הרמונית ב $y\in\Omega$.

הוכחה: (בהמשך נוכיח הוכחה כללית. כרגע נראה עבור הכדור $B_R(0)$).

במקרה של $\Omega=B_R(0)$ נרי:

$$K(x,y)=\frac{\partial}{\partial\nu_x}\Gamma(x-y)-\frac{\partial}{\partial\nu_x}\Gamma\left(\frac{|y|}{R}(x-\overline{y})\right)$$

נבחין כי עבור המקרה הראשון אין לנו בעיה, הרי יש סימטריה בין x ל y. לכן אם היא הרמונית ב x קל וחומר שהיא הרמונית ב y.

וגם הגורם השני הרמוני, לא הראנו את זה, זה בחישוב ישיר וזה תרגיל מסובך שמתניה לא רוצה לעשות, אנו נראה בהמשך את המקרה הכללי ולכן זה מיותר. ■

אבל נבחין כעת כי אם $u(x)$ מספיק יפה על השפה, אנו יכולים להכניס את הגזירה לתוך האינטגרל, ולכן מהטענה הנ"ל אנו נקבל כי u הרמונית לפי y מכיוון ש K הרמונית לפי y.

10.3.2 הסימטריה של פונקציית Green

יהי $\Omega\subseteq\mathbb{R}^n$ תחום חסום חלק שעבורו קיימת פונקציית Green, $G(x,y)$. $x\in\Omega,\ y\in\Omega$.

טענה 10.3.11

אם $x,y\in\Omega$ אזי: $G(x,y)=G(y,x)$.

נשים לב, $G(x,y)$ לא מוגדרת עבור $x=y$.

הוכחה: תהיינה $y \neq z \in \Omega$ וניקח כדורים קטנים $B_\rho(y), B_\rho(z)$. נסתכל על הפונקציית $G(x,y)$ ו $G(x,z)$ שהן הרמוניות ב $x \in \Omega \setminus \{B_\rho(y) \cup B_\rho(z)\}$ לכן, מנוסחת גרין:

$$\int_\Omega (u\Delta v - v\Delta u) = \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial u}{\partial \nu}$$

כלומר:

$$0 = \int_{\partial(\Omega\setminus\{B_\rho(y)\cup B_\rho(z)\})} \left[G(x,z)\frac{\partial}{\partial \nu_x}G(x,y) - G(x,y)\frac{\partial}{\partial \nu_x}G(x,z)\right] \mathrm{d}S_x$$

על השפה החיצונית $\partial\Omega$, האינטגרנד מתאפס (כי פונקציית גרין מתאפסת על השפה). לכן, נשאר לחשב את האינטגרל רק על השפה של איחוד הכדורים:

$$0 = \int_{\partial(B_\rho(y)\cup B_\rho(z))} \left[G(x,z)\frac{\partial}{\partial \nu_x}G(x,y) - G(x,y)\frac{\partial}{\partial \nu_x}G(x,z)\right] \mathrm{d}S_x$$

בכדור $B_\rho(y)$ הפונקציות $G(x,z)$ ו: $\frac{\partial}{\partial \nu_x}G(x,z)$ רציפות (וחלקות) ב x ואילו:

$$|G(x,y)| \leq C|x-y|^{2-n}$$

(עבור $\rho > 0$ קטן). לכן כאשר $\rho \to 0$:

$$\int_{\partial B_\rho(y)} G(x,y)\frac{\partial}{\partial \nu_x}G(x,z)\,\mathrm{d}S_x \underset{\rho\to 0}{\longrightarrow} 0$$

כי: $|\partial B_\rho(y)| \propto \rho^{n-1}$. כלומר:

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{\partial B_\rho(y)} G(x,z)\frac{\partial}{\partial \nu_x}G(x,y)\,\mathrm{d}S_x = \lim_{\rho\to 0}\int_{\partial B_\rho(z)} G(x,y)\frac{\partial}{\partial \nu_x}G(x,z)\,\mathrm{d}S_x$$

09/01/2013

כעתת נחשב את:

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{\partial B_\rho(y)} G(x,z)\frac{\partial}{\partial \nu_x}G(x,y)\,\mathrm{d}S_x$$

קיים:

$$\frac{\partial}{\partial \nu_x}G(x,y) = -\frac{\partial}{\partial r}\left[\Gamma(x-y) + h_y(x)\right]$$

כאשר r הוא קואורדינטת המרחק מהמרכז y (והגזירה כפונקציה של x)

$$= -\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{(2-n)\omega_n}r^{2-n} + h_y(x)\right] = -\frac{r^{1-n}}{\omega_n} - \frac{\partial}{\partial r}h_y(x)$$

ולכן:

$$\int_{\partial B_\rho(y)} G(x,z)\frac{\partial}{\partial \nu_x}G(x,y)\,\mathrm{d}S_x = \int_{\partial B_\rho(y)} G(x,z)\left[-\frac{r^{1-n}}{\omega_n} - \frac{\partial}{\partial r}h_y(x)\right]\mathrm{d}S_x =$$

$$\int_{S^{n-1}} G(x,z)\left[-\frac{\rho^{1-n}}{\omega_n} - \frac{\partial}{\partial r}h_y(x)\right]\omega_n\rho^{n-1}\mathrm{d}\theta =$$

$$-\int_{S^{n-1}} G(x,z)\left[1 + \frac{\partial}{\partial r}h_y(x)\,\omega_n\rho^{n-1}\right]\mathrm{d}\theta$$

הערה 10.3.12 $x = y + \rho\theta$

אבל נבחין כי $\frac{\partial}{\partial r}h_y(x)$ רציפה וחסומה ב $B_\rho(y)$. אבל מכיוון שהיא מוכפלת בρ וגם $G(x,y)$ רציפה וחסומה בכדור, אז בהשאפת ρ לאפס נקבל:

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{\partial B_\rho(y)} G(x,z)\frac{\partial}{\partial \nu_x}G(x,y)\,\mathrm{d}S_x = -\lim_{\rho\to 0}\int_{S^{n-1}} G(x,z)\left[1+\frac{\partial}{\partial r}h_y(x)\,\omega_n\rho^{n-1}\right]\mathrm{d}\theta = -\int_{S^{n-1}} G(x,z)\,\mathrm{d}\theta = \omega_n G(y,z)$$

אבל נזכור כי גם ראינו כי:

$$\int_{\partial B_\rho(y)} G(x,y)\frac{\partial}{\partial \nu_x}G(x,z)\,\mathrm{d}S_x \underset{\rho\to 0}{\longrightarrow} 0$$

מכיוון ש $\frac{\partial}{\partial \nu_x}G(x,z)$ פונקציה רציפה וגם כי:

$$|G(x,y)| < C\rho^{2-n}$$

מכיוון ש $|h_y(x)| \le C$ חסומה. אבל $\mathrm{d}S_x = \omega_n\rho^{n-1}\mathrm{d}\theta$ ואז אנחנו נקבלים שנשאר רק ρ, וזה כמובן שואף לאפס. באופן דומה, אנו נקבל ש:

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{\partial B_\rho(z)} G(x,y)\frac{\partial}{\partial \nu_x}G(x,z)\,\mathrm{d}S_x = \omega_n G(z,y)$$

ומהשיוויון בינהם נקבל:

$$G(z,y) = G(y,z)$$

כנדרש. ■

מסקנה 10.3.13

$G(x,y)$ לכל $x \in \Omega$ הרמונית ב y ב $\Omega\setminus\{x\}$.

הוכחה: הרי, $G(x,y) = G(y,x)$ והרי הלאפלאסיאן לפי המשתנה הראשון שווה לאפס, ולכן במקרה הזה:

$$\Delta_y G(y,x) = 0$$

■

טענה 10.3.14

$K(x,y) = \frac{\partial}{\partial \nu_x}G(x,y)$ הרמונית ב y עבור $x \in \partial\Omega$ ול $y \in \Omega$.

הוכחה: נקח x_0 נקודה על השפה. מכיוון ש$\partial\Omega$ חלקה, הרי בסביבת x ניתן למצוא קואורדינטות $\theta \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\beta \in \mathbb{R}$ (β זה הקו הניצב לשפה, וθ מתאר נקודה על השפה). כך ש:

$$\frac{\partial}{\partial \nu_x}\varphi(x) = \frac{\partial}{\partial \beta}\varphi(\beta,\theta)$$

(x בסביבת x_0).

בפרט:

$$K(x,y) = \frac{\partial}{\partial \beta}G((\beta,\theta),y)\,|_{\beta=0}$$

($\beta = 0$ נותנת נקודה על $\partial\Omega$). לכן, כעת:

$$\Delta_y K(x,y) = \Delta_y\left[\frac{\partial}{\partial \beta}G((\beta,\theta),y)\,|_{\beta=0}\right] = \frac{\partial}{\partial \beta}\Delta_y\left(G(\beta,\theta),y\right)|_{\beta=0} = \frac{\partial}{\partial \beta}0 = 0$$

■

10.3.3 סיכום:

עבור הכדור $B_R(0)$ מתקבל:

$$K(x,y) = \frac{R^2 - |y|^2}{\omega_n R} |x-y|^{-n}$$

$|y| < R$ ו $|x| = R$.
אזי, אם u הרמונית ב Ω תחום כך ש: $\overline{B_R(0)} \subseteq \Omega$ מתקבל:

$$u(y) = \int_{|x|=R} \frac{R^2 - |y|^2}{\omega_n R} |x-y|^{-n} u(x) \, \mathrm{d}S_x$$

אם לא הרמונית, יתווסף אינטגרל:

$$\int_{B_R(0)} G(x,y) \Delta u(x) \, \mathrm{d}x$$

15/01/2013

10.4 עובדות לגבי גרעין Poisson

1. $\Delta_y K(x,y) = 0$ לכל $|x| = R$.
2. אם $u \in C^2(B_R(0)) \cap C^1\left(\overline{B_R(0)}\right)$ אז:

$$u(y) = \int_{\partial B_R(0)} K(x,y) u(x) \, \mathrm{d}S_x$$

10.5 תכונות גרעין Poisson

1. $K(x,y) > 0$ לכל $|x| = R$, $|y| < R$.
2. $\int_{\partial B_R(0)} K(x,y) \, \mathrm{d}S_x = 1$ לכל $|y| < R$.
3. הגבול:

$$\lim_{y \to x_0 \in \partial B_R(0)} \int_{\partial B_R(0) \cap \{|x-x_0| > \delta\}} K(x,y) \, \mathrm{d}S_x = 0$$

הגדרה 10.5.1 גרעין $K(x,y)$ המקיים את התכונות הנ"ל נקרא גרעין סומבילית חיובי.

הערה 10.5.2 גרעין סומבילית חיובי הוא בקירוב הדלתא של דיראק.

משפט 10.5.3

תהי $\varphi(x) \in C^0(\partial B_R(0))$ (רציפה על השפה). אזי הפונקציה:

$$u_\varphi(y) := \int_{\partial B_R(0)} K(x,y) \varphi(x) \, \mathrm{d}S_x$$

היא הרמונית בתוך $B_R(0)$ ומתכנסת ל $\varphi(x_0)$ כאשר $y \to x_0 \in \partial B_R(0)$.

במילים אחרות:

$$\tilde{u}_\varphi(y) = \begin{cases} u_\varphi(y) & |y| < R \\ \varphi(y) & |y| = R \end{cases} \in C^0\left(\overline{B_R}(0)\right)$$

הוכחה: העובדה ש $u_\varphi(y)$ הרמונית ב $B_R(0)$ נובע מההרמוניות של $K(x,y)$ לפי y. (וגזירה בתוך האינטגרל).
עכשיו, נקח $y \to x_0 \in \partial B_R(0)$ ונכתוב:

$$u_\varphi(y) - \varphi(x_0) = \int_{\partial B_R(0)} K(x,y)\left(\varphi(x) - \varphi(x_0)\right) \mathrm{d}S_x =$$
$$\underbrace{\int_{\partial B_R(0)\cap\{|x-x_0|>\delta\}} K(x,y)\left(\varphi(x) - \varphi(x_0)\right) \mathrm{d}S_x}_{I_1} + \underbrace{\int_{\partial B_R(0)\cap\{|x-x_0|\le\delta\}} K(x,y)\left(\varphi(x) - \varphi(x_0)\right) \mathrm{d}S_x}_{I_2}$$

נבחין כי:

$$|I_1| \le 2\max_{\partial B_R(0)} |\varphi(x)| \int_{\partial B_R(0)\cap|x-x_0|>\delta} K(x,y)\,\mathrm{d}S_x \underset{y\to x_0}{\longrightarrow} 0$$

כאשר המעבר האחרון הוא מהתכונה השלישית של הגרעין.
וכמו כן:

$$|I_2| \le \max_{|x-x_0|\le\delta} |\varphi(x) - \varphi(x_0)| \cancelto{1}{\int_{\partial B_R(0)} K(x,y)\,\mathrm{d}S_x}$$

יהי $\varepsilon > 0$, בגלל הרציפות של φ קיים $\delta > 0$ כך שאם: $|x - x_0| < \delta$ אז $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$.
נקח δ כנ"ל ואז נקבל כי:

$$\begin{aligned} \lim_{y\to x_0} |I_1| &= 0 \\ \lim_{y\to x_0} |I_2| &\le \varepsilon \end{aligned}$$

ולכן, מכך נובע כי:

$$\limsup_{y\to x_0} |u_\varphi(y) - \varphi(x_0)| \le \varepsilon$$

אבל זה לכל ε. ולכן סיימנו. כי זה אומר ש $u_\varphi(y) \to \varphi(x_0)$ כאשר $y \to x_0$. ■

10.5.1 מסקנות

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום קשיר.

משפט 10.5.4

תהי $u \in C^0(\Omega)$ בעלת תכונת הממוצע. כלומר: לכל $x \in \Omega$ מתקיים: $u(x) = M_u(x,\rho)$ לכל $\rho > 0$ מספיק קטן (תלוי ב x). אזי u הרמונית ב Ω.

הוכחה: נקבע $x \in \Omega$ ותהי $v_\rho(y)$ פהפונקציה ההרמונית ב $B_\delta(y)$ כך ש $v_\rho(y) = u(y)$ כאשר $|y - x| = \rho$.
$u(y), v_\rho(y)$ בעלות תכונת הממוצע בכדור. נתבונן ב:

$$w = u(y) - v_\rho(y)$$

היא בעלת תכונת הממוצע ומתאפסת על השפה. ולכן היא שווה לאפס.
כלומר: $u(y) \equiv v_\rho(y)$ בכדור $B_\rho(x)$. ■

משפט 10.5.5

תהי $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ סדרה של פונקציות הרמוניות בΩ כך ש: $u_k(x) \to u(x)$ במ"ש על כל קומפקט $\Lambda \Subset \Omega$ (כלומר $\overline{\Lambda} \subseteq \Omega$ קומפקטי).
אזי u הרמונית בΩ.

הוכחה: נקח $\overline{B_\rho(a)} \subseteq \Omega$ ואז נתבונן ב:

$$u_k(y) = \int_{\partial B_\rho(a)} K(x,y)\, u_k(x)\, \mathrm{d}S_x$$

עבור: $|x-a| = \rho$ מכיוון ש: $u_k(x) \to u(x)$ במ"ש. עבור $|y-a| < \frac{\rho}{2}$ כאשר $k \to \infty$ אנו נקבל כי זה שואף ל:

$$u(y) = \int_{B_\rho(a)} K(x,y)\, u(x)\, \mathrm{d}S_x$$

אבל היא הרמונית בy. ■

10.6 בעיית דיריכלה בתחום כללי

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ תחום קשיר חסום.

תזכורת 10.6.1 אם $h \in C^0(\Omega)$ אזי:

$$M_h(x,\rho) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} h(x+\rho\xi)\, \mathrm{d}S_\xi$$

הגדרה 10.6.2 תהי $u \in C^0(\Omega)$ נאמר כי u היא סאבהרמונית בΩ אם לכל $x \in \Omega$ קיים $\rho_x \geq 0$ כך ש: $u_x(x) \leq M_u(x,\rho)$ לכל $\rho < \rho_x$.

טענה 10.6.3

אם $u \in C^2(\Omega)$ ו $\Delta u \geq 0$ אזי u סאבהרמונית ב Ω.

הוכחה: עבור $h \in C^2(\Omega)$ כללית או יכולים לכתוב כי:

$$\frac{\partial}{\partial\rho} M_h(x,\rho) = \frac{1}{\omega_n} \int_{|\xi|=1} \nabla_x h(x+\rho\xi)\cdot\xi \mathrm{d}S_\xi = \frac{1}{\omega_n \rho} \int_{|\xi|=1} \nabla_\xi h(x+\rho\xi)\cdot\xi \mathrm{d}S_\xi \underbrace{=}_{\text{משפט גאוס}}$$
$$\frac{1}{\omega_n \rho} \int_{|\xi|\leq 1} \Delta_\xi h(x+\rho\xi)\, \mathrm{d}\xi = \frac{1}{\omega_n \cancel{\rho}} \cdot \rho^{\cancel{2}} \int_{|\xi|\leq 1} \Delta_x h(x+\rho\xi)\, \mathrm{d}\xi$$

בפרט, במקרה של $h = u$ עבור $\Delta u \geq 0$ מתקבל:

$$\frac{\partial}{\partial\rho} M_u(x,\rho) \geq 0$$

כלומר, הפונקציה $M_u(x,\rho)$ עולה בρ. ובפרט:

$$u(x) = M_u(x,0) \leq M_u(x,\rho)$$

עבור $\rho > 0$. ולכן u סאבהרמונית לפי הגדרה. ■

הגדרה 10.6.4 נסמן ב $\sigma(\Omega)$ את משפחת הפונקציות הסאבהרמוניות ב Ω.

טענה 10.6.5

אם $u \in \sigma(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ אזי:

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} u(x) = \max_{x\in\partial\Omega} u(x)$$

הערה 10.6.6 זהו עקרון המקסימום החלש לפונקציות סאבהרמוניות.

הוכחה: בשלילה, קיים $x_0 \in \Omega$ כך ש:

$$\max_{\Omega} u(x) = u(x_0) > \max_{\partial\Omega} u(x)$$

אבל נזכור, כי $u(x_0)$ קטנה מהממוצע של ספירות סביבה. בגלל הסאבהרמוניות: $u(x_0) \equiv u(x)$ בסביבה מלאה של x_0 לכן

$$\left\{x \in \Omega,\ u(x) = \max_{\overline{\Omega}} u\right\}$$

פתוחה וסגורה. ולכן: $u(x) \equiv \text{const}$. ■

הגדרה 10.6.7 תהי $u \in C^0(\Omega)$ ו $\overline{B_\rho}(y) \subseteq \Omega$. אזי נגדיר:

$$u_{y,\rho}(x) = \begin{cases} u(x) & x \in \Omega\backslash B_\rho(y) \\ u(x) \text{ שערכי השפה שלה הם } B_\rho(y) & \text{הפונקציה ההרמונית בכדור} \end{cases}$$

טענה 10.6.8

אם $u \in \sigma(\Omega)$ ו $\overline{B_\rho}(y) \subseteq \Omega$ אזי:

1. $u(x) \le u_{y,\rho}(x)$ לכל $x \in \Omega$
2. $u_{y,\rho} \in \sigma(\Omega)$

הוכחה:

1. אם $x \in \Omega\backslash B_\rho(y)$ אזי $u(x) = u_{y,\rho}(x)$ לפי הגדרה. לעומת זאת, בתוך הכדור, $B_\rho(y)$ הפונקציה $u(x) - u_{y,\rho}(x)$ היא בעלת תכונת הממוצע כי $u_{y,\rho}$ הרמונית. ושווה זהותית ל 0 על השפה לפי הבנייה. ולכן, מעקרון המקסימום החלש, המקסימום החלש יגיד כי: $u(x) - u_{y,\rho} \le 0$ לכל $x \in B_\rho(y)$. כנדרש.
2. ברור כי $u_{y,\rho}(z) \le M_{u_{y,\rho}}(z,\theta)$ ל $\theta > 0$ מספיק קטן. אם $z \in \Omega\backslash\overline{B_\rho}(y)$ שהרי שם: $u_{y,\rho}(z) = u(z) \in \sigma(\Omega)$. כמו כן , אם $z \in B_\rho(y)$ אזי $u_{y,\rho}$ הרמונית שם ולכן בוודאי סאבהרמונית. נשאר לבדוק מה קורה על השפה של הכדור. במקרה של $|z-y| = \rho$ (כלומר $z \in \partial B_\rho(y)$) אזי:

$$u_{y,\rho}(z) \underbrace{=}_{\text{הגדרה}} u(z) \underbrace{\le}_{u\in\sigma(\Omega)} M_u(z,\theta) \le M_{u_{y,\rho}}(z,\theta)$$

כאשר המעבר הראשון הוא מ1.

■

טענה 10.6.9

אם $u \in \sigma(\Omega)$ ו $\overline{B_\rho}(y) \subseteq \Omega$ אזי $u(y) \le M_u(y,\rho)$.

הערה 10.6.10 לפי ההגדרה הטענה נכונה עבור $\rho > 0$ מספיק קטן (בלבד). אנו רוצים להוכיח לכל ρ.

הוכחה: אנו יודעים שבתנאים הנ"ל:

$$u(y) \leq u_{y,\rho}(y) = M_{u_{y,\rho}}(y,\rho) = M_u(y,\rho)$$

מכיוון שהן מתלכדות על שפה של הכדור. ■

טענה 10.6.11

$u \in C^0(\Omega)$ היא הרמונית אס"ס $u, -u \in \sigma\Omega$.

הוכחה: אם הרמונית, אזי $u, -u \in \sigma(\Omega)$ באופן טריוויאלי.
להפך, ל u ול$-u$ תכונת ה$\geq$ מהממוצע. ולכן ל u תכונת הממוצע (העברת אגפים וזה...). ולכן הן הרמוניות. ■

תהי $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$ נגדיר משפחה:

$$\sigma_\varphi\left(\overline{\Omega}\right) = \sigma(\Omega) \cap \left\{u \in C^0\left(\overline{\Omega}\right) \mid u(x) \leq \varphi(x) \;\; x \in \partial\Omega\right\}$$

הערה 10.6.12 $\sigma_\varphi(\Omega) \neq \varnothing$. כי אם נקח $u \equiv \text{const} < \min\limits_{\partial\Omega} \varphi$.

טענה 10.6.13

תהיינה $u_1, \ldots, u_k \in \sigma_\varphi\left(\overline{\Omega}\right)$. אזי:

$$v := \max\{u_1, \ldots, u_k\} \in \sigma_\varphi\left(\overline{\Omega}\right)$$

הוכחה: ראשית, כל האיברים ב $\sigma_\varphi\left(\overline{\Omega}\right)$ חסומים ע"י: $\max\limits_{\partial\Omega} \varphi$ (מתכונת המקסימום החלש של פונקציות סאבהרמוניות).
לכן, $v \in C^0\left(\overline{\Omega}\right)$ (רציפות וחסומות). וכמובן: $v|_{\partial\Omega} \leq \varphi$.
אם $y \in \Omega$ אזי:

$$v(y) = \max\{u_i(y)\} \leq \max\{M_{u_1}(y,\rho), \ldots, M_{u_k}(y,\rho)\}$$

עבור $\rho > 0$ מספיק קטן (כי u_i סאבהרמוניות).

$$\leq M_v(y,\rho)$$

ולכן לפי הגדרה $v \in \sigma(\Omega)$.
ולכן היא מקיימת את כל התכונות, ולכן $v \in \sigma_\varphi\left(\overline{\Omega}\right)$. ■

16/01/2013

$$u \in \sigma_\varphi\left(\overline{\Omega}\right) \leq \max_{\partial\Omega} \varphi$$

הקבוצה לא ריקה מכיוון ש:

$$v(x) \equiv c, \;\; v \in \sigma_\varphi(\Omega), \;\; c \leq \min \varphi$$

נסמן:

$$w_\varphi := \sup\left\{u \in \sigma_\varphi\left(\overline{\Omega}\right)\right\}$$

נבחין כי:

$$\min_{\partial\Omega}\varphi \leq w_{\varphi}\left(x\right) \leq \max_{\partial\Omega}\varphi$$

התוכנית שלנו:

1. להראות ש $w_{\varphi}\left(x\right)$ הרמונית ב Ω.
2. לבדוק באיזו מידה $w_{\varphi}\left|_{\partial\Omega}=\varphi\right.$.

ראשית נבחין בעוד תכונות של פונקציות הרמוניות:

$$K\left(x,y\right)=\ldots\frac{1}{R}\cdot\frac{R^{2}-\left|y^{2}\right|}{\left|x-y\right|^{n}}$$

אם u הרמונית ב $B_{R}\left(0\right)$:

$$u\left(y\right)=\int_{B_{R}(0)}K\left(x,y\right)u\left(x\right)\mathrm{d}S_{x}$$

$$\partial_{y_{j}}u\left(y\right)\left|_{y=0}\right.=\int_{\partial B_{R}(0)}\partial_{y_{j}}K\left(x,y\right)\left|_{y=0}\right.u\left(x\right)\mathrm{d}S_{x}=\ldots\frac{1}{R}\cdot\int_{B_{R}(0)}R^{2}\partial_{y_{j}}\frac{1}{\left|x-y\right|^{n}}\left|_{y=0}\right.u\left(x\right)\mathrm{d}S_{x}=$$
$$\ldots\int_{\partial B_{R}(0)}R\frac{1}{\left|x-y\right|^{n+1}}\cdot\frac{x_{j}-y_{j}}{\left|x-y\right|}\left|_{y=0}\right.u\left(x\right)\mathrm{d}S_{x}=\ldots\int\frac{1}{R^{n}}\cdot\frac{x_{j}}{R}u\left(x\right)\mathrm{d}S_{x}$$

לכן:

$$\left|\partial_{y_{j}}u\left(y\right)\left|_{y=0}\right.\right|\leq{}^{C}/_{R}\cdot\max_{\partial B_{R}(0)}\left|u\left(x\right)\right|$$

כאשר C קבוע.

מסקנה 10.6.14

אם u הרמונית בכדור $\overline{B_{R}}\left(0\right)$ אזי במרכז הכדור מתקיים:

$$\left|\nabla u\left(y\right)\left|_{y=0}\right.\right|\leq\frac{C}{R}\cdot\max_{\partial B_{R}(0)}\left|u\left(x\right)\right|$$

משפט 10.6.15

תהי u הרמונית בΩ. ותהי $\xi\in\Omega$ כך ש $\mathrm{d}\left(\xi\right)=\mathrm{dist}\left(\xi,\partial\Omega\right)$

אזי:

$$\left|\nabla u\left(\xi\right)\right|\leq\frac{C}{\mathrm{d}\left(\xi\right)-\delta}\cdot\max_{x\in\partial B_{\mathrm{d}\xi-\delta}(\xi)}\left|u\left(x\right)\right|$$

מסקנה 10.6.16

יהי $\Omega'\Subset\Omega$ תחום פוכל קומפקטית בΩ.
תהיינה $\left\{u_{k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ סדרה של פונקציות הרמוניות החסומות במידה שווה על כל תחום המוכל קומפקטית בΩ.
אזי קיימת תת סדרה $\left\{u_{k_{j}}\right\}_{j=1}^{\infty}$ המתכנסת במידה שווה לפונקציה $u\left(x\right)$ על Ω'. בהכרח $u\left(x\right)$ הרמונית ב Ω'.

במילים אחרות: סידרה חסומה של פונקציות הרמוניות ⇐ תת סדרה מתכנסת במ"ש.

הוכחה: אם:

$$\operatorname{dist}\left(\overline{\Omega'},\partial\Omega\right)=d>0$$

אזי:

$$\Omega''=\left\{x\mid\ \operatorname{dist}\left(x,\Omega'\right)<\frac{d}{2}\right\}$$

הוא תחום פתוח. $\overline{\Omega''}\Subset\Omega$ ו $\overline{\Omega'}\Subset\Omega$.
אזי, לפי ההנחה:

$$\sup_{k,\ x\in\overline{\Omega''}}\left|u_k\left(x\right)\right|<\infty$$

לפי המשפט:

$$\sup_{x\in\overline{\Omega'},k}\left|\nabla u_k\left(x\right)\right|<\infty$$

מכיוון ש $x\in\Omega'$ גורר כי: $\overline{B_{\frac{d}{4}}\left(x\right)}\subseteq\Omega''$.
לכן, לפי משפט Arzela-Ascoli קיימת תת סדרה $\left\{u_{k_j}\right\}_{j=1}^{\infty}$ המתכנסת במידה שווה בΩ'.
ואנו יודעים כי אם יש כזו, אז היא מתכנסת לפונקציה הרמונית. ולכן סיימנו. ■

נחזור שוב ל:

$$w_\varphi\left(x\right)=\sup_{u\in\sigma_\varphi\left(\overline{\Omega}\right)}\left\{u\left(x\right)\right\}$$

כאשר $x\in\overline{\Omega}$. אנו רוצים להוכיח ראשית כי w_φ הרמונית. יהי $\overline{B_\rho}\left(\xi\right)\subseteq\Omega$. תהי $\left\{x_k\right\}\subseteq B_\rho\left(\xi\right)$ סדרת נקודות.

$$w_\varphi\left(x_k\right)=\lim_{j\to\infty}\uparrow u_j^k\left(x_k\right)$$

(גבול עולה) כאשר $u_j^k\in\sigma_\varphi\left(\overline{\Omega}\right)$.
לכל j טבעי נקח:

$$v_j\left(x\right)=\max\left\{u_j^1\left(x\right),u_j^2\left(x\right),\ldots,u_j^j\left(x\right)\right\}$$

אזי $v_j\in\sigma_\varphi\left(\overline{\Omega}\right)$ (לפי הטענה שאומרת שהמקסימום נמצא שם). ולכל k נקבל כי יהיה מודבר בסדרה עולה:

$$\lim_{j\to\infty}\uparrow v_j\left(x_k\right)=w_\varphi\left(x_k\right)$$

כעת, כל v_j היא סאבהרמונית.
נחליף כל $v_j\left(x\right)$ ב: $v_{j,\xi,\rho}\left(x\right)=\lambda_j\left(x\right)$ (הפונקציה שהיא הרמונית ב $B_\rho\left(\xi\right)$ ושווה ל v_j מחוצה לו, ξ,ρ קבועים).
נזכר כי:

$$\sigma_\varphi\left(\overline{\Omega}\right)\ni\lambda_j\left(x\right)\geq v_j\left(x\right)$$

וברור כי:

$$\lim_{j\to\infty}\uparrow\lambda_j\left(x_k\right)=w_\varphi\left(x_k\right)$$

אבל $\{\lambda_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות הרמוניות חסומות במ"ש (ע"י $\min,\max\varphi$ על השפה).

ולכן, קיימת תת סדרה מתכנסת במש ב $B_\rho(\xi)$ לפונקציה הרמונית $W(x)$. נשים לב כי $W(x)$ וודאי תלויה בבחירה הנקודות x_k ובתת־סידרה.

נוסף, לכך $W(x_k)=W_\varphi(X_k)$ לכל k. תהי $\eta\in B_\rho(\xi)$ ונבחר ראשית סדרה $x_k\to\eta$ נניח גם כי $x_1=\eta$. נקבל $W(x)$ מתאים. אזי: $W(x_k)=w_\varphi(x_k)$. אבל $W(x_1)=W(x_k)\to W(\eta)$ וגם $w_\varphi(x_k)\to w_\varphi(\eta)$. כלומר, $w_\varphi(x)$ פונקצי רציפה בכדור $B_\rho(\xi)$.

כלומר, $w_\varphi(x)\in C^0(\Omega)$ מכיוון שזה נכון לכל כדור. עכשיו, נוכיח כי w_φ הרמונית.

ניקח $\{x_k\}$ סידרה צפופה בכדור $B_\rho(\xi)$. נקבל $\tilde{W}(x)$ הרמונית מתאימה. כאשר:

$$w_\varphi(x_k)=\tilde{W}(x_k)\quad\forall k$$

אבל w_φ רציפה בכדור ב $\tilde{W}$ רציפה. מכיוון ש x_k צפופה אנו מקבלים כי בכדור:

$$w_\varphi(x)\equiv\tilde{W}(x)$$

הרמונית ב $x\in B_\rho(\xi)$. אבל זה היה כדור כלשהו. ולכן סיימנו.

נשאר לברר את היחס של $w_\varphi(x)$ ל $\varphi(x)$ בשביל $x\in\partial\Omega$.

הגדרה 10.6.17 תהי $\eta\in\partial\Omega$ ותהי $Q_\eta(x)\in C^0\left(\overline{\Omega}\right)\cap\sigma(\Omega)$. נאמר כי $Q_\eta(x)$ היא פונקציית מחסום (Barrier function) בנקודה η אם:

$$Q_\eta(\eta)=0,\ Q_\eta(x)<0,\ x\in\partial\Omega\backslash\{\eta\}$$

נתונה הפונקציה: $\varphi(x)\in C^0(\partial\Omega)$. עבור $\varepsilon>0$, נגדיר:

$$u(x)=\varphi(\eta)-\varepsilon+KQ_\eta(x)$$

כאשר $K\gg1$ ייבחר בהמשך. ברור כי $u\in\sigma(\Omega)$ (כי $KQ_\eta\in\sigma(\Omega)$).

$$u(\eta)=\varphi(\eta)-\varepsilon+KQ_\eta(\eta)=\varphi(\eta)-\varepsilon$$

קיימת סביבה U של η ב $\partial\Omega$ כך ש $x\in U$ אז: היות ו: $u(x)\le\varphi(\eta)-\varepsilon$. אזי גם: $u(x)\le\varphi(x)$. על הקבוצה הקומפקטית $\partial\Omega\backslash U$, $Q_\eta(x)<0$ ולכן $Q_\eta(x)<-\beta<0$.

ע"י בחירת $K\gg1$ מספיק גדול נוכל לקבל:

$$u(x)\le\varphi(x)\,,\ x\in\partial\Omega\backslash U$$

ולסיכום:

$$x\in\partial\Omega,\ u(x)\le\varphi(x)$$

$u\in\sigma_\varphi\left(\overline{\Omega}\right)$ לכן: $w_\varphi(x)\ge u(x)$ לכל $x\in\overline{\Omega}$. נסתכל עכשיו על הגבול של $w_\varphi(x)$ כאשר $x\in\Omega$ מתקרבת ל η.

$$\liminf_{x\to\eta}w_\varphi(x)\ge\lim_{x\to y}u(x)=\varphi(\eta)-\varepsilon$$

לכל $\varepsilon>0$. ולכן:

$$\liminf_{x\to\eta}w_\varphi(x)=\varphi(\eta)$$

נשאר להראות כי:

$$\limsup_{x\to\eta} w_\varphi(x) \le \varphi(\eta)$$

נסתכל ב $w_{-\varphi}$. נבחין כי:

$$-w_{-\varphi} = -\sup_{u\in\sigma_{-\varphi}(\overline{\Omega})} u = \inf_{-v\in\sigma_{-\varphi}(\overline{\Omega})} v$$

אם $-v\in\sigma_{-\varphi}(\overline{\Omega})$ אזי ראשית זה אומר כי $-v\in\sigma(\Omega)$ וגם: $-v|_{\partial\Omega}\le -\varphi$.
$u\in\sigma(\Omega)$ ו: $u|_{\partial\Omega}\le\varphi$ (כאשר $u\in\sigma_\varphi(\overline{\Omega})$). היות וסכום שני סאבהרמוניות הוא סאבהרמוני, נקבל כי:

$$u-v\in\sigma(\Omega)$$

ולכן:

$$u-v|_{\partial\Omega}\le\varphi+(-\varphi)=0$$

במילים אחרות, $u(x)\le v(x)$ לכל $x\in\overline{\Omega}$ (עקרון המקסימום החלש לפונקציות סאבהרמוניות). כלומר כל v אשר מקיימת $-v\in\sigma_{-\varphi}(\overline{\Omega})$ היא גדולה מכל $u\in\sigma_\varphi(\overline{\Omega})$.
לכן $-w_{-\varphi}(x)$ שהיא inf על v כנ"ל היא גדולה או שווה מ $\sup_{u\in\sigma_\varphi(\overline{\Omega})}$. כלומר:

$$-w_{-\varphi}(x)\ge w_\varphi(x)$$

לכן:

$$\limsup_{x\to\eta} w_\varphi(x)\le\limsup_{x\to\eta}(-w_{-\varphi}(x))=-\liminf_{x\to\eta} w_{-\varphi}(x)\le\varphi(\eta)$$

ולסיכום, אם ב$\eta\in\partial\Omega$ יש פונקציית מחסום. אזי $w_\varphi(x)$ רציפה כאשר $x\to\eta$ (מתוך Ω) והגבול = $\varphi(\eta)$.
אם, לכן, פונקציית מחסום קיימת בכל נקודת שפה של Ω, אזי $w_\varphi(x)\in C^0(\overline{\Omega})$ ו:

$$w_\varphi(x)=\varphi(x),\ x\in\partial\Omega$$

ובכך, נפתרה בבעיי Dirichlet לΩ.
נשאר להראות את הקיום של פונקציית מחסום ב $\eta\in\partial\Omega$.
הקיום, תלוי בגיאומטריה של $\partial\Omega$ בסביבת η.

✎ **דוגמה 10.6.18 :** נניח שניתן למצוא כדור $B_r(y)$ כך ש $\overline{B_r}(y)\cap\overline{\Omega}=\{\eta\}$.
נזכר כי: $\Gamma(x-y)<0$. נגדיר: $Q_\eta(x)=-\Gamma(x-y)+\Gamma(r)$ (פונקציה כדורית).

$$\Gamma(r)=\frac{1}{\omega_n(2-n)}r^{2-n}<0$$

נבחין כי עבור: $|x-y|>r$ מתקיים:

$$|\Gamma(x-y)|<|\Gamma(r)|\Rightarrow\Gamma(r)-\Gamma(x-y)<0$$

אבל $Q_h(x)$ הרמונית ולכן היא בוודאי $\in\sigma(\Omega)$ וגם היא ב $C^0(\overline{\Omega})$ (מכיוון שהבעיה היחידה שלה היא ב y אשר נמצא בחוץ).
לכן $Q_\eta(x)$ פונצקיית מחסום ב η.

הגדרה 10.6.19 נאמר כי ל Ω תכונת הכדור (החיצוני) אם בכל נקודה $\eta \in \partial\Omega$ ניתן לבנות כדור $B_{r_\eta}(y_\eta)$ כך ש $\overline{B_{r_\eta}}(y_\eta) \cap \overline{\Omega} = \{\eta\}$ (אז יש לנו פונקציית מחסום).

מסקנה 10.6.20

אם ל Ω תכונת הכדור החיצוני, אזי בעיית $Dirichlet$ נפתרת באופן יחיד.

הערה 10.6.21 לΩ תכונת הכדור החיצוני אם בכל נקודה $\eta \in \partial\Omega$ קיים על־מישור תומך, כלומר על מישור P כך ש: Ω נמצא מצד אחד של P.

23/01/2013

חלק V

משוואת החום

פרק 11

משוואת החום על רגל אחת

11.1 מה היה עד כה?

דיברנו על משוואת הגלים:

$$u_{tt} - c^2 \Delta u = 0$$

על משוואת לפלאס:

$$\Delta u = 0$$

ונרצה גם לדבר קצת על משוואת החום:

$$u_t = \Delta u$$

נבחין כי במשוואת החום, הזמן כן חשוב, אנחנו לא יכולים להחזיר את הזמן אחורה. כאן $t \geq 0$.
נתון $u_0(x) = u(x,0)$ כאשר $x \in \mathbb{R}^n$ ו $u_0(x)$ אנליטי. האם המשטח $x = 0$ הוא קרקטריסטי?

$$x_{n+1} = \varphi(x_1, \ldots, x_{n+1}) \equiv 0$$

תנאי הקרקטריסטי:

$$\left(\sum_{\alpha} \nabla_{x_1,\ldots,x_{n+1}} \psi \right)^{\alpha} = 0$$

כאשר במקרה של המשוואה שלנו $|\alpha| = 2$. ומתקיים:

$$\alpha = (\ldots 0\ 2\ 0 \ldots)$$

נבדוק:

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)^2 \stackrel{?}{=} 0$$

אבל זה שווה ל x_{n+1}, ולכן, המשטח $t = 0$ הוא קרקטריסטי.
הסיבה שזה שונה מהלפלאסיאן, זה שחסרה לנו נגזרת אחת.
אבל, למרות שהמשטח קרקטריסטי ומשפט קושי־קובלבסקי לא נותן לנו כמעט וכלום, יש לנו פתרון עבור $t \geq 0$.

11.2 ממשוואת החום על תחום חסום

אנו נשארים פה עם ההגדרה של $u_0(x)$ לצורך ההמשך.

סימון: נסמן: $Q_T = \Omega \times (0,T]$ (צילינדר החום).

הגדרה 11.2.1 נאמר כי $u(x,t)$ הוא פתרון קלאסי ב Q_T אם:

1. הנגזרות: $u_t, u_{x_i x_i} \in C(Q_T)$ ומתקיימת המשוואה.
2. $u \in C(\overline{Q}_T)$, ו $u(x,0) = u_0(x)$ כאשר $x \in \Omega$.
3. $u(x,t) = b(x,t)$ עבור $x \in \partial\Omega$ ו $T \geq t \geq 0$. $b(x,t)$ פונקציה רציפה.

ואנו לוקחים במקרה הזה $T < \infty$. אפשר לדבר לכל זמן, אבל אז אנו פשוט מדברים על איחודים של T־ים עולים.

הערה 11.2.2 $u_t(x,t)$ ניתנת להמשכה רציפה עד $t = T$.

11.3 משפט המקסימום מינימום למשוואת החום

משפט 11.3.1 משפט המקסימום\מינימום למשוואת החום

יהי $u(x,t)$ פתרון קלאסי של משוואת החום. אזי:

$$\begin{matrix}\max \\ \min\end{matrix} \left\{u(x,t), (x,t) \in \overline{Q}_T\right\} = \begin{matrix}\max \\ \min\end{matrix} \left\{\begin{matrix} \max\limits_{x\in\overline{\Omega}}(u_0(x)), \max\limits_{(x,t)\in\partial Q_T} b(x,t) \\ \min\limits_{x\in\overline{\Omega}}(u_0(x)), \min\limits_{(x,t)\in\partial Q_T} b(x,t)\end{matrix}\right\}$$

המשוואה שלנו כאמור היא:

$$u_t - \Delta u = 0$$

הוכחה: נניח ראשית, כי $v(x,t)$ היא פונקציה כך ש $v_t, v_{x_i x_i}$ רציפות ב Q_T ו $v \in C(\overline{Q}_T)$. ומתקיים ב Q_T ש:

$$v_t - \Delta v < 0$$

אזי, אם קיימת $(x_0,t_0) \in \Omega \times (0,T]$ כך ש: $v(x_0,t_0) = \max\limits_{(x,t)\in\overline{Q}_T} v(x,t)$.
מתקיים שבנקודה זו:

$$v_t(x_0,t_0) \geq 0$$

(אחרת הגענו מנקודה חמה יותר). וגם מתקיים:

$$\Delta v(x_0,t_0) \leq 0$$

ולכן:

$$v_t - \Delta v(x_0,t_0) \geq 0$$

וזו סתירה, כי $v_t - \Delta v < 0$.

המסקנה היא, ש $\max\limits_{(x,t)\in\overline{Q}_T} v(x,t)$ שווה ל: $\max\left(\max\limits_{\partial\Omega\times[0,T]} v(x,t), \max\limits_{x\in\overline{\Omega}} v(x,0)\right)$.

כעת, תהי $u(x,t)$ פתרון קלאסי של משוואת החום ונסתכל ב $v(x,t) = u(x,t) + \varepsilon |x|^2$ כאשר $\varepsilon > 0$. אזי $v_t = u(t)$. אבל $\Delta v = \Delta u + \varepsilon 2n$.
ולכן:

$$v_t - \Delta v = u_t - \Delta u - 2n\varepsilon = -2n\varepsilon < 0$$

כלומר:

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q_T}} u(x,t) \leq \max_{(x,t)\in\overline{Q}_T} v(x,t) = \max\left\{\max_{x\in\overline{\Omega}}\left(u_0(x) + \varepsilon|x|^2\right), \max_{(x,t)\in\partial\Omega\times[0,T]}\left(b(x,t) + \varepsilon|x|^2\right)\right\}$$

אבל $|x|^2$ חסום על $\overline{\Omega}$ (ההנחה היא ש Ω תחום חסום). אבל האי שיוויון הנ"ל נכון לכל ε לכן נקבל כי:

$$\max_{(x,t)\in\overline{Q_T}} u(x,t) = \max\left\{\max_{x\in\overline{\Omega}}(u_0(x)), \max_{(x,t)\in\partial\Omega\times[0,T]}(b(x,t))\right\}$$

כנדרש. ■

מסקנה 11.3.2 משפט היחידות למשוואת החום

יש לכל היותר פתרון קלאסי אחד למשוואה ב $\overline{Q}_T$.

הוכחה: נניח ש u_1, u_2 שני פתרונות, אזי גם $u_1 - u_2$ פתרון לבעיית החום. אבל כעת, עם תנאי התחלה ושפה ששווים זהותית לאפס.
ממשפט המקסימום (והמינימום, שוב מכניסים שם מינוס כדי לקבל מינימום...) נקבל כי:

$$u_1 - u_2 \equiv 0$$

קיום u + גבול $t \to \infty$ יגרור $\Delta u = 0$. ■

נראה כעת הוכחה אלטנרנטיבית ליחידות הפתרון: **הוכחה:** נניח $u = u_1 - u_2$ הפרש פתרונות. יש לנו:

$$u_t - \Delta u = 0$$

נכפול את המשוואה ב $u(x,t)$ וניקח את האינטגרל על Q_T. נקבל:

$$\int_0^T\int_\Omega u(x,t)\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_0^T\int_\Omega \Delta u(x,t)\,u(x,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0$$

נבחין כי:

$$\int_0^T\int_\Omega u(x,t)\frac{\partial}{\partial t}u(x,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^T\int_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}u^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^T \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_\Omega u(x,t)^2\,\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{2}\int_\Omega u(x,T)^2\,\mathrm{d}x - \cancel{\frac{1}{2}\int_\Omega (x,0)^2\,\mathrm{d}x}^{\,0} = \frac{1}{2}\int_\Omega u(x,T)^2\,\mathrm{d}x$$

נטפל באינטגרל השני:

$$\int_0^T\int_\Omega \Delta u(x,t)\,u(x,t)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^T\int_\Omega \nabla(u\nabla u) - |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

כאשר אנו משתמשים בזהות:

$$u\Delta u = \nabla\left(u\nabla u\right) - \left|\nabla u\right|^2$$

ולכן:

$$= \int_0^T -\int_\Omega \left|\nabla_x u\left(x,t\right)\right|^2 \mathrm{d}x + \cancelto{0}{\int_{\partial\Omega} u \underbrace{\nabla u \cdot \nu}_{\frac{\partial u}{\partial x}} \mathrm{d}S_x \mathrm{d}t}$$

אנו מניחים במעבר הזה כי $\nabla u \in C\left(\overline{Q}_T\right)$. אבל זה מתאפס גם כי $u = 0$ על השפה (הרי חיסור פתרונות).
ולכן קיבלנו סה"כ כי:

$$\frac{1}{2}\int_\Omega u\left(x,T\right)^2 \mathrm{d}x + \int_0^T \int_\Omega \left|\nabla u\left(x,t\right)\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t = 0 \Rightarrow \nabla u\left(x,t\right) \equiv 0$$

ב Q_T. וגם השני חייב להתאפס, מכיוון שמדובר באינטגרלים של דברים חיוביים. ■

11.4 פתרון משוואת החום ב $t \geq 0$ ו $x \in \mathbb{R}$

כלומר, אנו מחפשים פתרון ל $u_t = u_{xx}$ כאשר $u\left(x,0\right) = u_0\left(x\right)$. אנו מניחים לפחות ש $u_0\left(x\right)$ רציפה וחסומה על $\mathbb{R}$.
וכאמור, מתקיים:

$$u_t - u_{xx} = 0$$

הגדרה 11.4.1 גרעין החום $G\left(x,t\right)$ הוא הפונקציה:

$$G\left(x,t\right) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

כאשר $t > 0$.

משפט 11.4.2

בתנאים האלה, הפונקציה:

$$u\left(x,t\right) = \int_R G\left(x-y,t\right) u_0\left(y\right) \mathrm{d}y$$

היא פתרון קלאסי של המשוואה ב $\left(x,t\right) \in \mathbb{R} \times \left(0,\infty\right)$ ומקיימת:

$$\lim_{t\to 0^+} u\left(\xi,t\right) = u_0\left(\xi\right)$$

לכל $\xi \in \mathbb{R}$.

הוכחה:

$$\begin{aligned} G_x\left(x,t\right) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\left(-\frac{x}{2t}\right) e^{-\frac{x^2}{4t}} \\ G_{xx}\left(x,t\right) &= \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\left(-\frac{1}{2t} + \frac{x^2}{4t^2}\right) \end{aligned}$$

כמו כן:

$$G_t(x,t) = \left(-\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \cdot \frac{1}{2t} + \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \frac{x^2}{4t^2}\right) e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

כלומר:

$$G_t(x,t) = G_{xx}(x,t)$$

כלומר, היא מקיימת את משוואת החוסץ כעת:

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} G(x-y,t)\, u_0(y)\, \mathrm{d}y$$

נקבל כי:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta_x u = \int_{\mathbb{R}} \cancelto{0}{(\partial_t - \Delta_x) G(x-y,t)} u_0(y)\, \mathrm{d}y = 0$$

נשאר לכן להוכיח כי:

$$\forall \xi \in \mathbb{R},\ \lim_{t \to 0^+} u(\xi,t) = u_0(\xi)$$

לשם כך, נתבונן בתכונות $G(x,t)$.

1. $G(x,t) > 0$ לכל $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$.
2. $\int_{\mathbb{R}} G(x,t)\, \mathrm{d}x = 1$ לכל $t > 0$.
3. לכל $\delta > 0$ מתקיים:

$$\int_{|x|>\delta} G(x,t)\, \mathrm{d}x \underset{t \to 0^+}{\longrightarrow} 0$$

$$\int_{|x|>\delta} G(x,t)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{|x|<\delta} e^{-\frac{x^2}{4t}} \mathrm{d}x \underbrace{=}_{\substack{x = y\sqrt{t} \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}y\sqrt{t}}} \frac{1}{\sqrt{4\pi \cancel{t}}} \int_{|y|>\delta/\sqrt{t}} e^{-y^2} \cancel{\sqrt{t}} \mathrm{d}y =$$

$$\frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{|y|>\frac{\delta}{\sqrt{t}}} e^{-y^2} \mathrm{d}t \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$$

הערה 11.4.3 זו פונקציה בונה לדלתא של דיראק...

כלומר, G הוא גרעין סומאביליות חיובי, וזה סוף ההוכחה.
נזכיר זאת.

$$u(\xi,t) = \int G(\xi-y,t)\,(u_0(y) - u_0(\xi))\, \mathrm{d}y =$$

$$\underbrace{\int_{|\xi-y|<\delta} G(\xi-y,t)\,(u_0(y) - u_0(\xi))\, \mathrm{d}y}_{I_1} + \underbrace{\int_{|\xi-y|\geq\delta} G(\xi-y,t)\,(u_0(y) - u_0(\xi))\, \mathrm{d}y}_{I_2}$$

כעת נבחין כי $I_2 \underset{t \to 0}{\longrightarrow} 0$. ואילו נבחין כי עבור I_1, יהי $\varepsilon > 0$ נתון, ניקח $\delta > 0$ כך ש $|u(y) - u(\xi)| < \varepsilon$ לכל $|y - \xi| < \delta$. ולכן, נקבל כי: $|I_1| < \varepsilon$ כנדרש.
לסיכום, קיבלנו פתרון קלאסי המתכנס ל $u_0(\xi)$ כאשר $t \to 0^+$ לכל $\xi \in \mathbb{R}$, בהנחת רציפות וחסימות u_0. ■

הערה 11.4.4 בלי תנאים נוספים, פתרון זה אינו יחיד.

11.5 עקרון Duhamel

משפט 11.5.1 עקרון Duhamel

נסתכל במשוואת החום הלא הומוגנית:

$$u_t - \Delta u = f(x,t)$$

אזי, בתנאים מתאימים על $f(x,t)$, הפונקציה:

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}} G(x-y, t-s) f(y,s) \, \mathrm{d}y \mathrm{d}s$$

הוא פתרון קלאסי של המשוואה ומקיימת $u(x,t) \to 0$ כאשר $t \to 0$ לכל x.

הערה 11.5.2 להשוות למשוואת הגלים הלא הומוגנית.