מבוא לטופולוגיה 80516

אור דגמי, or@digmi.org

13 ביולי 2012

אתר אינטרנט: http://digmi.org
סיכום הרצאות של פרופ' רון ליבנה בשנת לימודים 2012
הספר שילווה את הקורס הוא הספר Munkres - Topology a First Course
התרגילים יהיו כ10% מציון הקורס והבחינה כ90%. ציון תרגילים יהיה 70% אחוז מהתרגילים הטובים ביותר אבל הגשת כל התרגילים היא חובה.

תוכן עניינים

1 מרחבים מטריים 4

1.1 מבוא למרחבים מטריים 4

1.2 מטריקות שקולות 5

1.3 מטריקות על מרחבי מכפלה 6

2 מרחב טופולוגי 8

2.1 הגדרת המרחב הטופולוגי וטופולוגיה 8

2.2 מרחבים טופולוגיים הנוצרים ממטריקה 8

2.3 טופולוגיה מצומצמת לתת מרחב 10

2.4 בסיס של טופולוגיה 10

2.5 טופולוגיית הסדר 11

2.6 קבוצות סגורות 12

3 העתקות בין מרחבים טופולוגים 15

3.1 רציפות ורציפות נקודתית 15

3.1.1 רציפות ורציפות נקודתית במרחבים מטריים 16

3.2 הומיאומורפיזם 18

4 מכפלה של מרחב טופולוגי 20

4.1 מכפלה של יותר משני מרחבים 21

4.2 מכפלה אינסופית של מרחבים 22

5 הפרדה 25

5.1 ניסוחים שקולים לתכונת ההפרדה 26

5.2 דוגמאות למרחבים נורמליים 28

6 קשירות 35

6.1 תכונות בסיסיות של קשירות 36

6.2 קומפקטיות 40

7 הכללה של מושגים מאינפי 44

7.1 רציפות במידה שווה 44

7.2 משפטי ויירשטראס 44

7.2.1 קומפקטיות מקומית 46

7.3 מרחבי מנה 47

7.4 קבוצת קנטור 49

7.5 העקום של פיאנו 50

8 החבורה היסודית 51
8.1 מבוא 51
8.2 הכנות לקראת בניית π_1 52

פרק 1

מרחבים מטריים

1.1 מבוא למרחבים מטריים

אוסף הדוגמאות החשוב ביותר בקורס זה הוא "מרחבים מטריים".

הגדרה 1.1.1 מרחב מטרי: קבוצה (X,d) כאשר X קבוצה ו־ $\mathrm{d}: X\times X\to\mathbb{R}$ פונקציה "מטריקה" המקיימת את התכונות:

1. $\mathrm{d}(x,y)\geq 0$ ומתקיים $x=y \iff \mathrm{d}(x,y)=0$
2. $\mathrm{d}(x,y)=\mathrm{d}(y,x)$
3. $\mathrm{d}(x,y)+\mathrm{d}(y,z)\geq \mathrm{d}(x,z)$ ("אי שיוויון המשולש")

הערה 1.1.2 אינטואיציה לאי שיוויון המשולש. תארו לעצמכם משולש עם קודקודים x,y,z אזי המרחק בין x לz קטן או שווה למרחק בין x לy + המרחק בין y ל z.

דוגמה 1.1.3 $X=\mathbb{R}^n$ ו:

$$\begin{cases}\vec{x}=(x_1,\ldots,x_n)\\ \vec{y}=(y_1,\ldots,y_n)\end{cases}$$

נגדיר על X שלוש מטריקות.

$$\begin{aligned}\mathrm{d}_{L_1}(x,y) &= |y_1-x_1|+|y_2-x_2|+\ldots+|y_n-x_n|\\ \mathrm{d}_{L_2}(x,y) &= \left((y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\ldots+(y_n-x_n)^2\right)^{1/2}\\ \mathrm{d}_{L_\infty}(x,y) &= \max_{1\leq i\leq n}|y_i-x_i|\end{aligned}$$

מטריקת L_1, המטריקה האוקלידית (L_2, מטריקת מכפלה פנימית) ומטריקת L_∞.

תרגיל: להראות כי אלה אכן מטריקות. החלק היחידי שאינו טריוויאלי הוא אי שיוויון המשולש ל d_{L_2}.
כלומר להראות כי אם גם $\vec{z}=(z_1,\ldots,z_n)$ אז:

$$\sqrt{\sum_i (z_i-x_i)^2}\leq\sqrt{\sum_i (z_i-y_i)^2}+\sqrt{\sum_i (y_i-x_i)^2}$$

ומוכיחים ע"י אי שיוויון קושי שוורץ.

המטריקות האלה כולן באות מנורמות על המרחב הויקטורי $\mathbb{R}^n$. אנו יודעים כי $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$, $\|x\|\geq 0$ ושיוויון $x=0 \iff$.
וגם: $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$ $\alpha\in\mathbb{R}$. מטריקת L_2 באה ממכפלה פנימית.

הערה 1.1.4 הוכחה של מטריקת d_{L_2} בעזרת קושי שוורץ.
נחזור להתבונן במקרה של $\mathbb{R}^n$ לנוחות נסמן $\begin{cases} y_i - x_i = a_i \\ z_i - y_i \qquad\quad = b_i \end{cases}$ ואז $z_i - x_i = a_i + b_i$ ועלינו להראות:

$$\mathrm{d}_{L_2}\left((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)\right) + \mathrm{d}\left((y_1,\dots,y_n),(z_1,\dots,z_n)\right) \geq \mathrm{d}\left((x_1,\dots,x_n),(z_1,\dots,z_n)\right)$$

כלומר אנו רוצים להראות כי:

$$\sqrt{\sum_i a_i^2} + \sqrt{\sum_i b_i^2} \geq \sqrt{\sum_i (a_i+b_i)^2}$$

יספיק לבדוק אחרי העלאה בריבוע:

$$\cancel{\sum_i a_i^2} + \cancel{\sum_i b_i^2} + 2\sqrt{\sum_i a_i^2}\sqrt{\sum_i b_i^2} \geq \sum (a_i+b_i)^2 = \cancel{\sum_i a_i^2} + \cancel{\sum_i b_i^2} + 2\sum_i a_i b_i$$

כלומר נשאר להראות

$$\sqrt{\sum_i a_i^2}\sqrt{\sum_i b_i^2} \geq \sum_i a_i b_i \Rightarrow \sum_i a_i^2 \sum_i b_i^2 \geq \left(\sum a_i b_i\right)^2$$

אי שיוויון קושי שוורץ מאלגברה לינארית. ולכן סיימנו.

תזכורת 1.1.5 תזכורת להוכחה:

$$0 \leq \sum_i (a_i - \lambda b_i)^2 = \lambda^2 \sum b_i^2 - 2\lambda \sum a_i b_i + \sum a_i^2 = \lambda^2 A + \lambda B + C$$

כאשר $A = \sum b_i^2$, $B = -2\sum a_i b_i$ ו $C = \sum a_i$.
ומכיוון ש $0 \leq A\lambda^2 + B\lambda + C$. הדיסקרימיננטה שלו ≥ 0 (אחרת יש שני שורשים ולן תקום בו שלילי). נקבל $B^2 - 4AC \leq 0$.
$B^2 \leq 4AC$

$$4\left(\sum a_i b_i\right)^2 \leq 4\left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right)$$

דוגמה 1.1.6 תהי X קבוצה כלשהי, המטריקה הדיסקרטית על X היא:

$$\mathrm{d}_{\mathrm{dis}}(x,y) = \begin{cases} 1 & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$$

הוכחה טריוויאלית.

1.2 מטריקות שקולות

הגדרה 1.2.1 מטריקות שקולות: שתי מטריקות d, d' על אותה קבוצה X, נקראות שקולות אם קיימים קבועים $A, B > 0$ כך שלכל $x, y \in X$, $\mathrm{d}(x,y) \leq A\mathrm{d}'(x,y)$ וגם: $\mathrm{d}'(x,y) \leq B\mathrm{d}(x,y)$.

הערה 1.2.2 (שלי)
זה כמובן שקול ל:

$$\tilde{B}\mathrm{d}'(x,y) \leq \mathrm{d}(x,y) \leq A\mathrm{d}'(x,y)$$

עבור $\tilde{B} = \frac{1}{B}$

על $\mathbb{R}^n$ המטריקות $\mathrm{d}_{L_1}, \mathrm{d}_{L_2}, \mathrm{d}_{L_\infty}$שקולות.

$$\mathrm{d}_{L_\infty}(x,y) \underbrace{\leq}_{\text{הקבוע הוא 1}} \mathrm{d}_{L_2}(x,y) \underbrace{\leq}_{\text{הקבוע הוא 1}} \mathrm{d}_{L_1}(x,y) \underbrace{\leq}_{\text{הקבוע הוא } n} n\mathrm{d}_{L_\infty}(x,y)$$

אבל אינן שקולות ל $\mathrm{d}_{\mathrm{dis}}$ על $\mathbb{R}^n$ (כאשר כמובן $n \geq 1$)

הערה 1.2.3 חסר כאן את d_{L_2} שוב, אבל בתכלס שקילות מטריקות זה יחס שקילות אז זה לא באמת קריטי. כי זה כן מראה ששניהן שקולות ל d_{L_∞}.

תרגיל: לא מיידי אבל מומלץ:
כל המטריקה על $\mathbb{R}^n$ המתקבלת מנורמות, שקולות. (נניח ל d_{L_∞})

טענה 1.2.4

יהי (X,d) מרחב מטרי $Y \subset X$ תת קבוצה אזי ניתן למצם את d למטריקה d_Y על Y. $\mathrm{d}_Y(y_1,y_2) = \mathrm{d}(y_1,y_2)$ לכל $y_1,y_2 \in Y$.

הוכחה: מיידי שזו מטריקה. ■

נאמר כי (Y,d_Y) הוא תת מרחב מטרי של (X,d).

1.3 מטריקות על מרחבי מכפלה

יהיו (X,d_X) ו (Y,d_Y) מרחבים מטריים. נגדיר על קבוצת המכפלה $X \times Y$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_1((x,y),(x',y')) &= \mathrm{d}_X(x,x') + \mathrm{d}_Y(y,y') \\
\mathrm{d}_2((x,y),(x',y')) &= \sqrt{(\mathrm{d}_X(x,x'))^2 + (\mathrm{d}_Y(y,y'))^2} \\
\mathrm{d}_\infty((x,y),(x',y')) &= \max(\mathrm{d}_X(x,x'), \mathrm{d}_Y(y,y'))
\end{aligned}$$

אלה אכן מטריקות. אי־שוויון המשולש ל d_2 נובע מקושי שוורץ. מאוד דומה למקרה של מטריקה אוקלידית.
אפשר כמובן להכפיל כל מספר סופי של גרומים ואף ניתן להכפיל מספר בן מנייה של מרחבים מטריים $\{(X_i,\mathrm{d}_i)\}_{i=1}^\infty$ על קבוצת המכפלה:

$$\prod_{i=1}^\infty X_i = \{(x_i)_{i=1}^\infty \mid \ x \in X_i\}$$

ניתן להגדיר מטריקה ע"י:

$$\rho_i(x_i,y_i) = \frac{\mathrm{d}_i(x_i,y_i)}{1+\mathrm{d}_i(x_i+y_i)}$$

ואז:

$$\mathrm{d}((x_i)_{i=1}^\infty,(y_i)_{i=1}^\infty) = \sum_{i=1}^\infty 2^{-i}\rho_i(x_i,y_i)$$

טור של מספרים $0 \leq$, $2^{-i} \leq$המחובר ה$i \leq 0$ ולכן הטור מתכנס.
סימטריה מיידית. $0 \geq$ מיידי, $0 =$ אמ"מ $x_i = y_i$ לכל i מיידי.
את אי שיוויון המשולש נוכיח בשני שלבים:
שלב א':

למה 1.3.1

יהי (X,d) מרחב מטרי ונגדיר $\rho : X \times X \to \mathbb{R}$ ע"י $\rho(x,y) = \frac{\mathrm{d}(x,y)}{1+\mathrm{d}(x,y)}$ אזי ρ מטריקה.

הוכחה: רק אי שוויון המשולש אינו מיידי.
יהיו $x, y, z \in X$, נסמן:

$$\begin{aligned} a &= \mathrm{d}(x,y) \\ b &= \mathrm{d}(y,z) \\ c &= \mathrm{d}(x,z) \end{aligned}$$

צריך להוכיח כי:

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} \geq \frac{c}{1+c}$$

הפונקציה $t \mapsto \frac{t}{1+t}$ היא מונוטונית כי:

$$\frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$$

וברור כי זה מונוטוני עולה, ומאי שיוויון המשולש עבור המטריקה d אנו יודעים כי $a+b \geq c$ ולכן יספיק להראות:

$$\frac{a}{1+a} + \frac{b}{1+b} \geq \frac{a+b}{1+a+b}$$

נכפיל במכנה המשותף ונקבל:

$$a(1+b)(1+a+b) + b(1+a)(1+a+b) \overset{?}{\geq} (a+b)(1+a)(1+b)$$

נבחין כי האגף השמאלי הוא:

$$(a+b) + (a+b)^2 + 2ab(1+a+b)$$

ואילו הימני:

$$(a+b) + (a+b)^2 + ab(a+b)$$

כלומר קיבלנו כי האי שיוויון נכון אם:

$$2(1+a+b) \geq a+b$$

וזה בבירור נכון. ■

השלב השני: כעת מיידי ש $\sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}\rho(x_i, y_i)$ אכן מגדיר מטריקה על $\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ כנדרש.

הערה 1.3.2 מכיוון שהמטריקה ρ חסומה (ע"י 1) היא לא שקולה למטריקה המקורית d למשל עובר $(\mathbb{R}, L)$

פרק 2

מרחב טופולוגי

2.1 הגדרת המרחב הטופולוגי וטופולוגיה

ההגדרות המרכזיות של הקורס:

הגדרה 2.1.1 טופולוגיה $\mathcal{U}$ על קבוצה X היא אוסף $\mathcal{U}=\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ של תתי קבוצות U_α של X (I קבוצת אינקס). הקבוצות U_α נקראות הקבוצות הפתוחות של הטופולוגיה $\mathcal{U}$ (או של המרחב הטופולוגי) והן נדרשות לקיים את התכונות הבאות:

1. X ו$\varnothing$ שייכות ל$\mathcal{U}$ (כלומר נחשבות לפתוחות)
2. איחוד $\bigcup\limits_{\beta\in J} U_\beta$ של פתוחות הוא פתוח (אם כל $U_\beta \in \mathcal{U}$ אזי גם $\bigcup U_\beta \in \mathcal{U}$)
3. חיתוך של שתי פתוחות גם הוא פתוח (ולכן באינדוקציה חיתוך סופי של פתוחות של פתוח).

הגדרה 2.1.2 מרחב טופולוגי הוא זוג $(X,\mathcal{U})$ כאשר X קבוצה ו $\mathcal{U}$ טופולוגי על X

דוגמה 2.1.3 כל הקבוצות X יש שתי טופולוגיות שבאות בחינם:

1. הטופולוגיה הטריוויאלית $\mathcal{U}_{\text{triv}}=\{\varnothing,X\}$
2. הטופולוגיה הדיסקרטית: $\mathcal{U}_{\text{dis}}=P(X)$ (כל תתי הקבוצות של X, קבוצת החזקה של X)

כל טופולוגיה חייבת להיות בניהן.

הגדרה 2.1.4 יהיו $\mathcal{U}_1,\mathcal{U}_2$ שתי טופווגיות על קבוצה X אם $\mathcal{U}_1\subset\mathcal{U}_2$ נאמר ש $\mathcal{U}_1$ חלשה יותר מ $\mathcal{U}_2$ (טריוויאלית הכי חלשה) $\mathcal{U}_2$ חזקה יותר מ $\mathcal{U}_1$ (דיסקרטית הכי חזקה)

2.2 מרחבים טופולוגיים הנוצרים ממטריקה

מקרה חשוב מאוד של מרחבים טופולוגיים: מרחב הנוצר ממטריקה

הגדרה 2.2.1 כדור פתוח: הכדור הפתוח ברידוס r (הגדול מאפס) סביב $x\in X$ (X מטרי, d המטריקה) הוא:

$$B_r(x)=\{y\in X \mid \mathrm{d}(y,x)<r\}$$

הגדרה 2.2.2 יהי (X,d) מרחב מטרי, תת קבוצה $U\subset X$ תקרא פתוחה אם היא איחוד כלשהו של כדורים פתוחים

דוגמה 2.2.3

1. $\varnothing$ האיחוד על קבוצת האינקדסים ריקה של כדורים = פתוחה.

2. X :

$$\bigcup_{x\in X} B_1(x) = \bigcup_{0<r.x\in X} B_r(x)$$

פתוח.

ברור כי איחוד של פתוחות הוא פתוח.

למה 2.2.4

קבוצה U במרחב מטרי X היא פתוחה $\iff$ לכל $x \in U$ קיים $r > 0$ כך ש $B_r(x) \subset U$

הוכחה: $\Rightarrow$ מאוד פשוט. לכל $x \in U$ נבחר $0 < r$ כך ש $U \supset B_{r_x}(x)$ אזי:

$$U = \bigcup_{x\in U} \{x\} \subseteq \bigcup_{x\in U} B_{r_x}(x) \subseteq U$$

ולכן U היא איחוד של כדורים: $U = \bigcup_{x\in U} B_{r_x}(x)$.

$\Leftarrow$: תהי $U = \bigcup_{\alpha\in I} B_{r_\alpha}(u_\alpha)$ איחוד של כדורים פתוחים. ותהי $u \in U$ אזי קיים α כך ש $u \in B_{r_\alpha}(u_\alpha)$ אם"ם $\delta = \mathrm{d}(u, u_\alpha) < r_\alpha$ אזי נסמן $\varepsilon = r_\alpha - \delta$ חיובי ממש. ונטען:

$$B_\varepsilon(u) \subset B_{r_\alpha}(u_\alpha)$$

אם נוכיח זאת סיימנו כי אז בוודאי $B_\varepsilon(u) \subset U$. תהי $y \in B_\varepsilon(u)$ אזי: $d(y, u) < \varepsilon$ ולכן:

$$\mathrm{d}(y, u_\alpha) \le \mathrm{d}(y, u) + \mathrm{d}(u, u_\alpha) < \varepsilon + \delta = r_\alpha$$

ולכן $y \in B_{r_\alpha}(u_\alpha)$ כנדרש. ■

מסקנה 2.2.5

חיתוך של סופי של פתוחות $U_1 \cap \ldots \cap U_n$ הוא פתוח.

הוכחה: אם $y \in U_1 \cap \ldots \cap U_n$ קיימים כדורים $B_{r_i}(y) \subset U_i$ לכל i ואז אם $r = \min_{1\le i\le n}(r_i)$ בוודאי $B_r(y) \subset \bigcap_{i=1}^{n} U_i$ כנדרש ■

קיבלנו על כל מרחב מטרי טופולוגיה הנקראת הטופולוגיה המטרית.

הגדרה 2.2.6 הטופולוגיה המטרית על המרחב: בהינתן מרחב מטרי (X, d), הטופולוגיה המטרית על המרחב היא $\{U_i\}$ כאשר $U_0 = \bigcup_{\beta\in J} B_{r_\beta}(x_\beta)$ כאשר $r_\beta > 0$, $x_\beta \in X$.
זאת אומרת, U_0 הוא איחוד של כדורים פתוחים אם"ם לכל $x \in U_0$ קיים כדור פתוח $B_r(x)$ כך ש $B_r(x) \subset U_0$

הערה 2.2.7 כדור פתוח הוא תמיד קבוצה פתוחה

הגדרה 2.2.8 מרחב טופולוגי: קבוצה X עם טופולוגיה $\mathcal{U}$ עליה $(X, \mathcal{U})$ נקרת מרחב טופולוגי.

מוטיב מרכזי בקורס נתבונן בתכונות של מרחבים מטריים מוכרים מהמקרה של $\mathbb{R}^n$ וננסה להעביר אותן למרחבים טופולוגיים.

למה 2.2.9

אם d_1 ו: d_2 מטריקות שקולות על X אזי הן מגדירות את אותה טופולוגיה

הוכחה: אם $\mathrm{d}_2 \le C\mathrm{d}_1$ אז לכל x, y מתקיים: $\mathrm{d}_2(x, y) \le C\mathrm{d}_1(x, y)$. הכדור $B_{Cr}^{(\mathrm{d}_2)}(U) \supset B_r^{(\mathrm{d}_1)}(U)$ וכמו כן, בכיוון השני.
בפרט הטופולוגיה ב $\mathbb{R}^n$ שבאה מנורמה כלשהיא (נורמה על מרחב וקטורי) אינה תלויה בנורמה (ז"א, לכל נורמה יש את אותה הטופולוגיה). ■

תרגיל: ראינו כי $\rho = \frac{\mathrm{d}}{1+\mathrm{d}}$ גם מטריקה על X למרות שלא שקולה לה. אבל היא בכל זאת מגדירה את אותה טופולוגיה כי הפונקציה $t \mapsto \frac{t}{1+t}$ רציפה עם הפוך רציף.

הערה 2.2.10 המטריקה הדיסקרטית על קבוצה X מגדירה את הטופולוגיה הדיסקרטית: כל תת קבוצה היא פתוחה $B_{\frac{1}{2}}(x)=\{x\}$. בטופולוגיה הרגילה על $\mathbb{R}^n$ הקבוצה $\{x\}$ אינה פתוחה.

אם ב X יש לפחות שתי נקודות אזי הטופולוגיה הטריוויאלית $\{\varnothing, X\}$ אינה באה משום מטריקה כי $x\neq y$ נסמן ב $r=\mathrm{d}(x,y)$. אזי הכדור $x\in B_{r/2}(x)\not\ni y$ אינו שייך לטופולוגיה.

דוגמה 2.2.11 בטופולוגיה הרגילה על $\mathbb{R}$ הקטע $[0,1]$ אינו פתוח כי אין שום קטע פתוח $(-\varepsilon,\varepsilon)$ סביב 0 המוכל בו.

2.3 טופולוגיה מצומצמת לתת מרחב

הגדרה 2.3.1 יהי $(X,\mathcal{U})$ מרחב טופולוגי, תהי $Y\subset X$ תת קבוצה. נגדיר על Y את הצמצום של $\mathcal{U}$: $\mathcal{U}\mid_Y=\{U\cap Y\}_{U\in\mathcal{U}}$.

טענה 2.3.2

זו טופולוגיה

הוכחה:

1. $\varnothing\cap Y=\varnothing$, $X\cap Y=Y$
2. $\bigcup_{\beta\in J}(U_\beta\cap Y)=\left(\bigcup_{\beta\in J}U_\beta\right)\cap Y$
3. $(U_1\cap Y)\cap(U_2\cap Y)\cap\ldots\cap(U_n\cap Y)=\left(\bigcap_{i=1}^{n}U_i\right)\cap Y$

■

מההגדרה ברור כי הטופולוגיה מ $\mathrm{d}\mid_Y$ = צמצום הטופולוגיה על Y (X,d) מרחב מטרי $Y\subset X$.

$$\begin{array}{ccccc} & (X,\mathrm{d}) & \longrightarrow & (X,\mathcal{U}) & \\ \text{צמצום ל־}Y & \downarrow & & \downarrow & \text{צמצום ל־}Y \\ & (Y,\mathrm{d}|_Y) & \leftrightarrows & (x,\mathcal{U}\mid_U) & \end{array}$$

נקבל את אותה התוצאה אם הטופולוגיה מתקבלת ממטריקה ואז מצמצמים או אם מצמצמים את המטריקה ואז לוקחים את הטופולוגיה.

אם Y קבוצה פתוחה ב $(X,\mathcal{U})$ אזי הקבוצות הפתוחות ב Y בטופולוגיה המושרית ($U\cap Y$ גאשר Y פתוחה ב X) הן בדיוק הקבוצות הפתוחות של X שהן מוכלות ב Y.

הערה 2.3.3 אם Y אינה פתוחה זה לא נכון.

דוגמה 2.3.4 לטופולוגיה לא מטרית: מרחב ה־2 : $X=\{x,y\}$ שתי נקודות שונות. $\mathcal{U}=\{\varnothing,X,\{x\}\}$

2.4 בסיס של טופולוגיה

הגדרה 2.4.1 בסיס של טופולוגיה: תהי X קבוצה, בסיס על X הוא אוסף $\mathcal{B}$ של תתי קבוצות המקיים:

1. לכל $x\in X$ אז קיים $B\in\mathcal{B}$ כך ש: $x\in B$. (שקול ל: $X=\bigcup_{j\in J}B_j$)
2. $A,B\in\mathcal{B}$ $x\in A\cap B$ אז קיים C כך ש: $x\in C\subset(A\cap B)$.

משפט 2.4.2

1. הכדורים הפתוחים במרחב המטרי מהווים בסיס.
2. תהי X קבוצה עם בסיס $\mathcal{B}$ ונגדיר: $\mathcal{U}=\left\{U\in\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha\mid B_\alpha\in\mathcal{B}\right\}$
אזי $\mathcal{U}$ טופולוגיה ו $B\in\mathcal{B}$ פתוחה בה.

טענה 2.4.3

האוסף $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}$ של קבוצות של איחודים $U_\alpha = \bigcup_{j \in J_\alpha} B_j$ מקיים את הטופולוגיה.

הוכחה: $\varnothing \in \mathcal{U}$ (לוקחים את האיחוד הריק $J_\alpha = \varnothing$)

$X \in \mathcal{U}$ $J_\alpha = J$.

איחודים של אברי $\mathcal{U}$ הם ב $\mathcal{U}$ (ברור)

חיתוך של שני איברים ב$\mathcal{U}$ (ולכן חיתוכים סופיים, באינדוקציה) הם ב $\mathcal{U}$.

מתכונת הבסיס 2 נקבל $U_1 = \bigcup_{j \in J_1} B_j$, $U_2 = \bigcup_{j \in J_2} B_j$ אז:

$$\bigcup_{\{\exists i \in J_1 \ \exists j \in J_2 |\ B_k \subset B_i \cap B_j\}} B_k = \bigcup_{\substack{i \in J_1 \\ j \in J_2}} (B_i \cap B_j) = U_1 \cap U_2$$

כנדרש. ■

למרחבים מטריי הכדורים הפתוחים מקיימים את התחכונות של בסיס (הטופולוגיה שהם מגדירים (הפתוחות הן בדיוק האיחודים של כדורים פתוחים) היא הטופולוגיה המטרית.

2.5 טופולוגיית הסדר

הגדרה 2.5.1 תהי X קבוצה סדורה בסדר מלא $(X, >)$

1. לכל $X \ni x, y$ מתקיימת בדיוק אחת האפשרויות: $x < y$ או $y < x$ או $x = y$.
2. אם $x > y$ וגם $y > z$ אז $x > z$

סימונים סטנדרטיים: $x > y \iff y < x$, $x \geq y \iff x = y$ או $x > y$.

דוגמה 2.5.2

1. $\mathbb{R}$
2. קבוצה חלקית לקבוצה בסדר מלא כמו $\mathbb{Z}, \mathbb{N}, \mathbb{Q}$

הגדרה 2.5.3 אינטרבל: תהי X סדורה בסדר מלא. אינטרבל ב X היא קבוצה מהצורה $(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$ או: $(a, \infty) \{x \mid a < x\}$ או: $(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$ או X כולה.

טענה 2.5.4

תהי $(X, >)$ קבוצה סדורה בסדר מלא אזי האינטרבלים מקיימים את תכונות הבסיס

הוכחה: X בעצמה אינטרבל, לכן התכונה הראשונה היא טריוויאלית.

התכונה השניה: נבחין כי אם $x \in (a, b) \cap (c, d)$ אזי: $\max(a, c) < x < \min(b, d)$.

באופן דומה לכל האפשרי האפשרויות האחרות: $\max(a, -\infty) = a$, $\min(a, \infty) = a$, $X = (-\infty, \infty)$. ■

הטופולוגיה המתקבלת נקראת "טופולוגיית הסדר".

על $(\mathbb{R}, >)$ היט הטופולוגיה המטרית כי זה אותו בסיס.

יש כאן הרבה למות טריוויאליות שלא נוכיח כגון:

למה 2.5.5

שתי טופולוגיות $\mathcal{U}$ ו $\mathcal{V}$ על אותו מרחב X אזי $\mathcal{B}$ בסיס ל$\mathcal{U}$ אם כל $B \in \mathcal{B}$ פתוחה ב $\mathcal{V}$ אזי $\mathcal{V} \supset \mathcal{U}$ כלומר $\mathcal{U}$ חלשה יותר.

2.6 קבוצות סגורות

הגדרה 2.6.1 קבוצה סגורה: יהי $(X,\mathcal{U})$ מרחב טופולוגי. תת קבוצה A של X תקרא סגורה אם המשלים שלה $X\backslash A$ פתוחה (כלומר ב$\mathcal{U}$)

נבחין כי כל הדברים שעבדו על קבוצות פתוחות ניתן כעת להפעיל על קבוצות סגורות בעזרת דה־מורגן.

עקרון כללי כל תכונה טופולוגית אפשר לנסח בשימוש בקבוצות סגורות.

למשל:

1. $X,\varnothing$ פתוחות $\iff$ $X,\varnothing$ סגורות.
2. $\bigcup\limits_{\alpha\in I} U_\alpha$ פתוח כאשר U_α פתוחות $\iff$ $\bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha$ של סגורות סגור.

   הוכחה: $X\backslash \bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha = \bigcap\limits_{\alpha\in I} (X\backslash A_\alpha)$ ■
3. $U_1\cap U_2$ חיתוך שתי קבוצות פתוחות פתוח $\iff$ איחוד $A_1\cup A_2$ שתי סגורות סגור (מספר סופי באינדוקציה)

טענה 2.6.2

במרחב מטרי (X,d) תת קבוצה $A\subset X$ סגורה $\iff$ לכל סדרה $\{a_n\}\subset A$ כך ש $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ ($x\in X$) מתקיים בהכרח $x\in A$.
("קבוצה היא סגורה אם"ם היא מכילה את נקודות הגבול שלה")

הוכחה: תהי A סגורה, $a_n\in A$, $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ צ"ל כי $x\in A$.

נניח בשלילה $x\notin A$ אזי $x\in A\backslash X$ שהיא פתוחה. ולכן יש $r>0$ כך ש $X\backslash A\supset B_r(x)$. ולכן אם $a\in A$ אזי: $\mathrm{d}(a,x)\geq r$ כיוון שאם הוא קטן, a יושב בכדור ברדיוס r ואז הוא בהכרח במשלים! לכן סתירה כיוון שלא ייתכן ש $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ מכיוון שעבור $\varepsilon=r$ לא קיים n_0 כך שלכל $n>n_0$ $\mathrm{d}(a_n,x)<\varepsilon=r$.

<u>כיוון שני:</u>

נניח ש A מכילה את כל נקודות הגבול שלה נרצה להראות כי היא סגורה.

על מנת לעשות זאת נוכיח שהמשלים שלה פתוחה. נניח בשלילה כי $X\backslash A$ אינה פתוחה, לכן קיימת $X\in X\backslash A$ כך ששום כדור $B_r(x)$ אינו מוכל ב $X\backslash A$ אזי לכל $n\in\mathbb{N}$ הכדור $B_{1/n}(x)\cap A\neq\varnothing$. נבחר $a_n\in B_{1/n}(x)\cap A$ ונקבל סדרה a_n כך ש $\mathrm{d}(a_n,x)<\frac{1}{n}$ אז $A\ni a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x\notin A$. וזו סתירה לנתון. ■

הערה 2.6.3 יש ספרים שבהם זה מנוסח כך שבמרחב מטרי סגירות של תת קבוצה היא שקולה לסגירות סדרתית.

הגדרה 2.6.4 כדור סגור: (X,d) מרחב מטרי, כדור סגור יסומן $\overline{B_r}(x)=\{y\in X \mid \mathrm{d}(x,y)\leq r\}$ כאשר $x\in X$ ו $r>0$.

טענה 2.6.5

כדור סוגר הוא קבוצה סגורה.

הוכחה: אפשר להוכיח את הטענה ב2 דרכים שונות

הוכחה א נראה כי המשלים פתוח.

תרגיל: השלמה כתרגיל. ניסיתי לגרום לרון לעשות את זה, אך הוא סרב.

הוכחה ב' מראים סגירות סדרתית.

נניח כי $a_n\in\overline{B_r}(x)$ אז $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} y\in X$ אזי $\mathrm{d}(y,x)\leq \mathrm{d}(y,a_n)+\mathrm{d}(a_n,x)$. יהי $\varepsilon>0$ אם n מספיק גדול אז $\mathrm{d}(y,a_n)<\varepsilon$ ואז:

$$\mathrm{d}(y,x)\leq \mathrm{d}(y,a_n)+\mathrm{d}(a_n,x)\leq \varepsilon+r$$

ולכן $\mathrm{d}(y,x)\leq r$ כי זה נכון לכל $0<\varepsilon$ כלשהו. ■

הערה 2.6.6 ב$\mathbb{R}$ $\bigcup_{n=2}^{\infty}\left[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}\right]=(0,1)$ אינה קבוצה סגורה. כיוון שהסדרה $0\notin(0,1)$ $\frac{1}{n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\in(0,1)$.
באותו אופן חיתוך אינסופי של פתוחות לא חייב להיות פתוח (עוברים למשלימים).

הערה 2.6.7 $A\subset X$ כאשר X מרחב טופולוגי, אז הטופולוגיה המושרית (מX על A) הסגורות הן חיותכים $A\cap Y$. Y סגורה ב X אם A סגורה בX הן סגורום גם ב X. אחרת A סגורה ב A אך לא בX.

הגדרה 2.6.8 סגור: יהי X מרחב טופולוגי, $A\subset X$. הסגור של A בX תהיה הקבוצה הסגורה המינימלית ב X המכילה את A והיא תסומן ב $\overline{A}$.

$$\overline{A}=\bigcap_{\substack{C\text{ סגורה ב }X\\ C\text{ מכילה את }A}}C$$

הגדרה 2.6.9 פנים: הפנים של קבוצה $A\subset X$ היא הקבוצה הפתוחה הגדולה ביותר המוכלת ב A.

$$\operatorname{int}(A)=A^{\circ}=\bigcup_{\substack{U\text{ פתוחה ב }\mathrm{X}\\ A\text{ מכילה את }U}}U$$

מיידי מההגדרה:

$$\begin{array}{rcl}\overline{X-A} & = & X-A^{\circ}\\ (X-A)^{\circ} & = & X-\overline{A}\\ \| & & \|\\ \bigcup(X-C) & = & X-\bigcap C\end{array}$$

הגדרה 2.6.10 קבוצה צפופה: X מרחב טופולוגי, $A\subset X$ תת קבוצה. נאמר כי A צפופה בX אם $\overline{A}=X$.

הגדרה 2.6.11 סביבה: יהי X מרחב טופולוגי $x\in X$, U תת קבוצה כלשהי ב X היא סביבה של x אם קיימת קבוצה פתוחה V כך ש $x\in V\subset U$ (אם"ם $x\in U^{\circ}$).

טענה 2.6.12

במרחב טופולוגי $\overline{A}\cup\overline{B}=\overline{A\cup B}$ לכל A,B תתי קבוצות של X.

הוכחה: $\subseteq$ מיידי. $\overline{A}\subseteq\overline{A\cup B}$ וגם $\overline{B}\subseteq\overline{A\cup B}$.
נראה $\supseteq$. $\overline{A}\cup\overline{B}$ היא סגורה כאיחוד 2 סגורות המכילה את $A\cup B$ ולכן היא מכילה את הסגור. כלומר $\overline{A}\cup\overline{B}\supseteq\overline{A\cup B}$. ■

הערה 2.6.13 $\overline{A}\cap\overline{B}\supset\overline{A\cap B}$ אבל $\overline{\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$ אבל גם $\overline{\mathbb{R}-\mathbb{Q}}=\mathbb{R}$. לכן $\mathbb{Q}\cap(\mathbb{R}-\mathbb{Q})=\varnothing$ אבל: $\mathbb{R}=\overline{\mathbb{Q}}\cap\overline{\mathbb{R}-\mathbb{Q}}\supsetneq\overline{\mathbb{Q}\cap(\mathbb{R}-\mathbb{Q})}=\varnothing$

הגדרה 2.6.14 שפה: X מרחב טופולוגי, $A\subset X$ תת קבוצה. השפה של A היא $\overline{A}-A^{\circ}$ ותסומן: ∂A.

תכונות:

1. $\partial(X-A)=\partial A$
2. $\partial A=\overline{A}\cap\overline{(X-A)}$

נבחין כי $1\Leftarrow 2$ משיקולי סימטריה.
נשאלת השאלה, האם $\overline{B_r(x)}=\overline{B_r(x)}$ האם $\overline{B_r}(x)^{\circ}=B_r(x)$ לכל מרחב מטרי X. $r>0$ ו $x\in X$.
התשובה היא לא. במטריקה הדיסקרטית, אם ניקח את הכדור הסגור ברדיוס 1 הוא כל המרחב, ואילו הכדור הפתוח הוא רק נקודה.

טענה 2.6.15

במרחב מטרי (X,d) הסגור של $A \subset X$ הוא אוסף נקודות הגבול של סדרות מתכנסות $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ כאשר $a_n \in A$ ו $x \in X$.

הוכחה: נוכיח כי $\overline{A}$ הוא אוסף נקודות הגבול הנ"ל ע"י הכלה בשני כיוונים.

נניח כי $a_n \in A$ וכי $a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x \in X$, צריך להראות כי $x \in \overline{A}$. תהי V סגורה המכילה את A. מסגירות סדרתית $x \in V$ ולכן $x \in \bigcap_{V \text{ סגורה המכילה את } x} V$.

אנו רוצים להראות כיוון שני, נתבונן באוסף נקודות הגבול, $Y = \left\{x \in X \mid \exists a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x\right\}$. נבחין כי $A \subset Y$ כי עבור כל $a \in A$ נקח את הסדרה הקבועה $a_n = a$ והיא כמובן מתכנסת לa.

בנוסף, אנו יכולים להגיד כי Y סגורה אם $y_n \in Y$ ו $y_n \to y \in X$ אז קיימת $a_n \in A$ כך ש $\frac{1}{n} > \mathrm{d}(a_n, y_n)$.

אזי:

$$\mathrm{d}(y, a_n) < \mathrm{d}(y, y_n) + \mathrm{d}(y_n, a_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 + 0 = 0$$

ולכן $y \in Y$ הראינו Y סגורה ו $A \subset Y$ לכן $\overline{A} \subseteq Y$ מש"ל. ■

פרק 3

העתקות בין מרחבים טופולוגים

3.1 רציפות ורציפות נקודתית

הגדרה 3.1.1 העתקה $f : X \to Y$ בין מרחבים טופולוגיים היא פונקציה מהקבוצה X לקבוצה Y.

הגדרה 3.1.2 העתקה פתוחה: נאמר שהעתקה f היא פתוחה, אם $f(U)$ פתוחה ב Y לכל U פתוחה בX

הגדרה 3.1.3 העתקה סגורה: נאמר שהעתקה f היא סגורה אם $f(V)$ סגורה ב Y לכל V סגורה בX.

הגדרה 3.1.4 העתקה רציפה: נאמר שהעתקה f היא רציפה אם $f^{-1}(W)$ פתוחה ב X לכל W פתוחה ב Y.

הערה 3.1.5 f רציפה אם"ם $f^{-1}(Z)$ סגורה ב X לכל Z סגורה בY כי:

$$X = \underbrace{f^{-1}(Z)}_{x} \underset{f(x)\notin Z}{\overset{=}{\iff}} \underbrace{f^{-1}(Y-Z)}_{x}$$

לעומת זאת f סגורה לא גורר כי f פתוחה ולהפך.
זו אחת הסיבות לכך שמושג הפונקציות הרציפות שימושי יותר ממושג הפונקציה הפתוחה\סגורה.

דוגמה 3.1.6 השיכון $(0,1) \to \mathbb{R}$ כאשר העתקה מעבירה כל נקודה לעצמה.
הפונקציה היא רציפה מפני ש: $U \subset \mathbb{R}$ פתוחה אזי: $U \cap (0,1)$ פתוחה ב$(0,1)$.
הפונקציה פתוחה מפני ש: אם $U \subset (0,1)$ פתוחה, אזי קיימת $B \subset \mathbb{R}$ כך ש $U = B \cap (0,1)$ ואז ב $\mathbb{R}$ נקבל כי U גם פתוחה (כי היא חיתוך סופי של פתוחות ו$(0,1)$ פתוח ב$\mathbb{R}$)

דוגמה 3.1.7 השיכון $[0,1) \to \mathbb{R}$.
הפונקציה רציפה מפני ש$U \subseteq \mathbb{R}$ פתוחה א $U \cap [0,1)$ פתוחה ב $(0,1]$ מהגדרת טופולוגיה מושרית.
הפונקציה לא פוחה או סגורה מפני ש $[0,1)$ פתוחה וסגורה ב $[0,1)$ אבל לא ב $\mathbb{R}$.

דוגמה 3.1.8 $[0,1] \to \mathbb{R}$
הפונקציה רציפה גם כן, כמו בדוגמאות הקודמות.
הפונקציה סגורה ולא פתוחה

הטיעונים שהשתמשנו בהם נכונים לכל העתקת תת מרחב למרחב עצמו כאשר התת קבוצה סגורה/פתוחה/לא וזה ולא זה.

הערה 3.1.9 על כל מרחב טופולוגיה העתקת הזהות ממנו לעצמו היא גם רציפה, סגורה, ופתוחה.

הגדרה 3.1.10 רציפה בנקודה: $f : X \to Y$ רציפה בנקודה $x \in X$ אם לכל סביבה V של $f(x)$ בY מתקיים ש $f^{-1}(V)$ סביבה של $x \in X$

טענה 3.1.11

התנאים הבאים שקולים לרציפות $f : X \to Y$

1. $f^{-1}(B)$ פתוחה לכל $B \in \mathcal{B}$, $\mathcal{B}$ בסיס לY.
2. f רציפה נקודתית בכל $x \in X$

הוכחה: 1 $\Leftarrow$ רציפות: נניח U פתוחה בY אזי $U = \bigcup_\alpha B_\alpha$ כאשר $B_\alpha \in \mathcal{B}$:

$$f^{-1}(U) = f^{-1}\left(\bigcup_\alpha B_\alpha\right) = \bigcup_\alpha f^{-1}(B_\alpha) \to \text{פתוחה כאיחוד פתוחות} \to \text{רציפה} f$$

רציפות$\Leftarrow$2: תהי V סביבה של $f(x)$ אזי: $f(x) \in U \subset V$ כאשר U פתוחה ב Y. $x \in f^{-1}(U) \subset f^{-1}(V)$. $f^{-1}(U)$ פתוחה ב $X \Leftarrow f^{-1}(V)$ סביבה של X.

2 $\Leftarrow$ רציפות: תהי V פתוחה ב Y צריך להוכיח כי $f^{-1}(V)$ פתוחה בX לכל $x \in f^{-1}(V)$ מתקיים כי V היא סביבה של $f(x)$ (פתוחה המכילה את $f(x)$. לכל $f^{-1}(V)$ היא סביבה של $X \Leftarrow U_x \subset f^{-1}(v)$ פתוחה ב X כאשר $x \in X$ וU_x תלויה ב x. אזי $\bigcup_{x \in f^{-1}(V)} U_x = f^{-1}(V)$ ולכן פתוחה כאיחוד פתוחות. ■

3.1.1 רציפות ורציפות נקודתית במרחבים מטריים

טענה 3.1.12

יהיו (X, d_X) ו: (Y, d_Y) מרחבים מטריים. $f : X \to Y$.

1. f רציפה נקודתית ב$x \in X$ אס"ס לכל $x_n \to x$ מתקיים $f(x_n) \to x$
2. f רציפה נקודתית ב $x \in X$ אס"ס לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש אם לכל $\mathrm{d}_X(x, x') < \delta$ אז $\mathrm{d}_Y(f(x), f(x')) < \varepsilon$

הוכחה: נוכיח את 2

רציפות נקודתית $\iff$ נקח כדור ברדיוס $\varepsilon >$ סביב $f(x)$ אזי קיים $\delta > 0$ כך ש $B_\delta^{(\mathrm{d}_X)}(x) \subset f^{-1}\left(B_\varepsilon^{(\mathrm{d}_Y)}(f(x))\right)$.

■

תרגיל: להשלים את הפרטים

הערה 3.1.13 אם $f^{-1}(V)$ פתוחה ב X לכל V בבסיס של הטופולוגיה של Y אזי f רציפה (וכמובן גם ההפך)

תרגיל: לנסח את הטענה המקבילה נקודתית.
לכל V בבסיס לY המכילה את $f(x)$, $f^{-1}(V)$ סביבה של x או מכילה קבוצה A ש$x \in A$ בבסיס של X.

למה 3.1.14

הרכבת פונקציות רציפות היא רציפה.

הוכחה: די ברור כי: $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ ל W פתוחה ב Z,

$$(gf)^{-1} W = \underbrace{f^{-1}\left(\underbrace{g^{-1}(W)}_{\text{פתוחה ב } Y \text{ מרציפות } g}\right)}_{\text{פתוחה ב } X \text{ מרציפות } f}$$

ולכן הנדרש. ■

טענה 3.1.15

תהי $f : X \to Y$ העתקה בין מרחבים טופולוגיים אזי התנאים הבאים שקולים:

1. f רציפה.
2. לכל כיסוי פתוח $\{U_\alpha\}_\alpha$ לX (כלומר U_α פתוחה, $\bigcup_\alpha U_\alpha = X$) כך ש $f|_{U_\alpha}$ רציפה.
3. לכל כיסוי סופי בסגורות $V_1,\dots,V_n$ ל X (כלומר V_i פתוחה ו: $\bigcup_{i=1}^n V_i X$) כך ש $f|_{V_1}$ רציפה לכל i.
4. $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$ לכל $A \subset X$.
ועוד הרבה תנאים שראינו.

הערה 3.1.16 קיים לX כיסוי בפתוחות $X = X$ פתוחה וזה גם כיסוי סגור סופי.

הוכחה: נראה $1 \Leftarrow 2$:
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \uparrow & \nearrow & \\ U_\alpha & & \end{array}$$
הרכבת f בשיכון רציפה. כלומר $f|_{U_\alpha}$ רציפה כנדרש כי ראינו ששיכון היא תמיד רציפה.
$2 \Leftarrow 1$: נסמן $f_\alpha = f|_{U_\alpha}$ ותהי V פתוחה ב Y. עלינו להראות כי $f^{-1}(V)$ פתוחה בX.
$$f^{-1}(V) = \bigcup_\alpha \left(f^{-1}(V) \cap U_\alpha\right) = \bigcup_\alpha f_\alpha^{-1}(V)$$
פתוחה כאיחוד פתוחות ב U_α ולכן גם בX כי U_α פתוחה בו.
$3 \Leftarrow 1$: אותה הוכחה כמו $2 \Leftarrow 1$.
$1 \Leftarrow 3$: לכל W סגורה בY נרצה להראות כי
$$f^{-1}(W) = \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(W) \cap V_i = \bigcup_{i=1}^n \underbrace{(f|_{V_i})^{-1}(W) =}_{\text{סגורה ב } V_i \text{ מרציפות } f|_{V_i} \text{ ולכן סגורה ב X כי } V_i \text{ סגורה ב} X} \bigcup_{i=1}^n X \text{ סגור ב X = סגורות ב}$$
$4 \Leftarrow 1$: תהי $A \subset X$. מספיק להראות כי $f\left(\overline{A}\right) \subset W$ לכל W סגורה בY המכילה את $f(A)$ מתקיים $f^{-1}(W) \supset \overline{A}$ לכל W סגורה בY המכילה את $f(A)$. בודאי שעבור W כזו $A \subset f^{-1}(W)$. אבל $f^{-1}(W)$ גם סגורה ולכן מכילה את $\overline{A}$ כנדרש.
$1 \Leftarrow 4$: אנו יודעים כי $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$
$4 \Leftarrow 1$: ? רון לא הצליח להחליט אם היא הטענה נכונה או לא. היא כן. יש אותה בסיכומים אחרים. יושלם כאן. אולי. ■

טענה 3.1.17

יהי X מרחב טופולוגי $f,g : X \to \mathbb{R}$ רציפות אזי $f+g$, $g \cdot g$ רציפות. אם $f(x) \neq 0$ אזי $\frac{1}{f}$ רציפה בx (וגם קיימת סביבה בX שf רציפה בה)

הוכחה: יספיק להראות רציפות נקודתית בכל נקודה. יהי $a \in X$. יהי $\varepsilon > 0$. ומרציפות f בa $f^{-1}\left(\underbrace{B_{\varepsilon/2}(f(a))}_{\text{קטע פתוח ב } \mathbb{R} \text{ באורך } \varepsilon}\right)$ סביבה פתוחה של a. ומסיבה דומה $g^{-1}\left(B_{\varepsilon/2}(g(a))\right)$ היא סביבה פתוחה של a.
אם x בחיתוך של הסביבות הנ"ל. אזי $|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$ וגם $|g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2}$ ולכן:
$$|(f+g)(x) - (f+g)(a)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

לגבי כפל:
שוב נראה רציפות נקודתית ב$a \in X$. יהי $\varepsilon > 0$. נסמן $M = \max(|f(a)|+1, |g(a)|+1)$ יהי $\delta = \frac{\varepsilon}{2M}$ אזי $U = f^{-1}(B_\delta(f(a))) \cap g^{-1}(B_\delta(g(a)))$ היא פתוחה בx המכילה את a. לכל $x \in U$:
$$|f(x) - f(a)| < \delta$$

ולכן:

$$\begin{aligned}|f(x)g(x)-f(a)g(a)| \le |f(x)||g(x)-g(a)|+|g(a)||f(x)-f(a)| \le \\ |f(x)|\delta+|g(a)|\delta \le |f(a)|\delta+|f(a)-f(x)|\delta+|g(a)|\delta \le \\ (M-1)\delta+\delta^2+(M-1)\delta=\delta(2M-2+\delta)<2M\delta<\varepsilon\end{aligned}$$

אם אנו דורשים גם $\delta \le 1$ (ולכן בהגדרה נדרוש גם זאת). ■

הערה 3.1.18 הוכחה נוספת לשני המקרים יחדיו:

למה 3.1.19

אם $f:X\to\mathbb{R}$ רציפה וגם $g:X\to\mathbb{R}$ רציפה אזי: $(f,g):X\to\mathbb{R}$, $(f,g)(x)=(f(x),g(x))$ רציפה.

$$(f,g)^{-1}(B_\varepsilon(a)\times B_\varepsilon(a))=f^{-1}(B_\varepsilon(a))\cap g^{-1}(B_\varepsilon(a))$$

פתוחה כחיתוך פתוחות ומכילה את a (כאשר $B_\varepsilon(a)\times B_\varepsilon(a)$ כדור פתוח בנורמת L_∞ שהיא נותנת את אותה טופולוגיה).

כעת נשתמש בהוכחה מאינפי כך ש $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ עם פעולת החיבור והכפל הן רציפות. וע"י הרכבה:

$$X \overset{(f,g)}{\to} \mathbb{R}\times\mathbb{R} \overset{\text{חיבור}}{\to} \mathbb{R}$$

שההרכבה רציפה אבל ההרכבה היא $f+g$.
ההוכחה לכפל אנלוגית.

$$f\neq 0 \text{ שבה } X \text{ב} a \text{ סביבה של } = U \overset{f}{\to} \mathbb{R}-\{0\} \underset{x\to 1/x}{\to} \mathbb{R}-\{0\}$$

מרציפות $\frac{1}{x}$ על $\mathbb{R}-\{0\}$ ההרכבה רציפה. לכן $f|_U$ רציפה נקודתית ב a ולכן f רציפה נקודתית ב a (U סביבה של a ניתן להניח שפתוחה)

3.2 הומיאומורפיזם

הגדרה 3.2.1 הומיאומורפיזם: הומיאומורפיזם בין מרחבים טופולוגיים היא העתקה $f:X\to Y$ כאשר X,Y הם מרחבים טופולוגיים שהיא חח"ע, על ורציפה עם הפוך רציף.

הערה 3.2.2 $f:X\to Y$ חח"ע, על ורציפה יכולה להיות עם הפוך שאינו רציף.
לדוגמה X עם שתי נקודות לפחות וטופולוגיה דיסקרטית. ואילו Y אותה קבוצה עם הטופולוגיה הטריוויאלית. ואז: $\mathrm{Id}:X\to Y$ היא רציפה אבל: $\mathrm{Id}:Y\to X$ (ההפוך של העתקה הקודמת) אינה רציפה כי לכל נקודה $x\in X$, $\mathrm{Id}^{-1}(\{x\})=\{x\}$ אינה פתוחה בטופולוגיה הטריוויאלית. בעוד $\{x\}$ פתוחה בטופולוגיה הדיסקרטית.

הגדרה 3.2.3 מרחבים הומיאומורפים: מרחבים טופולוגיים X וY יקראו הומיאומורפיים אם קיים הומיאומורפיזם $f:X\to Y$

הערה 3.2.4 היה צריך לאמר X הומיאומורפים לY ולהוכיח סימטריה אבל....

למה 3.2.5

הומיאומורפיזם הוא יחס שקילות (בפרט סימטרי)

הוכחה: $X\overset{\mathrm{Id}}{\to}X$ רפלקסיבי.

$X\overset{f}{\to}Y$, $Y\overset{f^{-1}}{\to}X$ - סימטריה.

$X\overset{f}{\to}Y\overset{g}{\to}Z$, אז $X\overset{g\circ f}{\to}Z$ טרנזטיביות. ■

הערה 3.2.6 מרחבים טופולוגיים הומיאומורפיים הם "אותו דבר" טופולוגית. פרט לשינוי שמות האיברים אין כלל הבדל).

תרגיל: תהיינה A, B פתוחות וקמורות ב $\mathbb{R}^n$ ($\neq \varnothing$)
(לכל $y, x \in A$ הקטע $\overline{xy}$ מוכל ב A וכן ב B = קימורות)
אזי B, A הומאומורפיזם בטופולוגיה המושרית (בפרט קוביה פתוחה וכדור פתוח הם "אותו הדבר" טופולוגית (הומאומורפיים).
מספיק להניח שדמויות ככב סביב $a_0 \in A$, $b_0 \in B$ (קטע $\overline{a_0 a}$ מוכל ב A לכל $a \in A$)

דוגמה 3.2.7 הקטע (a, b), (a, ∞), $\mathbb{R}$ כולם הומאומורפיזמים.

יש המון דוגמאות שראינו אלפי פעמים אז לא נחזרות עליהן. לעומת זאת, $[0, 1]$ אינה הומאומורפית ל $(0, 1)$ (למרות שיש בניהן העתקה חח"ע ועל כקבוצות). לכל העתקה רציפה ב $[0, 1]$ ל $\mathbb{R}$ התמונה חסומה ממשפט ויירשטראס (אפשר להשתמש בו כי ראינו שבמרחב מטרי ההגדרה שלנו לרציפות שקולה לרציפות רגילה) אבל ב$(0, 1)$ התמונה לא בהכרח חסומה.

פרק 4

מכפלה של מרחב טופולוגי

יהיו Y, X מרחבים טופולוגיים. נגדיר טופולוגיה על קבוצת המכפלה $X \times Y$ שתיקרא טופולוגיית המכפלה. היא תוגדר ע"י בסיס:

$$\mathcal{B} = \{U \times V \mid \ Y \text{ פתוחה ב } V, X \text{ פתוחה ב } U\}$$

$\mathcal{B}$ איננו סגור תחת איחודים בד"כ אך מקיים את תכונות הבסיס.

1. $X \times Y = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ כי היא נמצאת בבסיס.
2. לכל $U \times V$, $U' \times V'$ בסיסיות $(x, y) \subset (U \times V) \cap (U' \times V')$. נגדיר $U_i'' = U \cap U'$, $V'' = V \cap V'$. אזי U' ו V' פתוחות וגם:

$$(x, y) \in (U'', V'') \subset ((U \times V) \cap (U' \times V'))$$

התכונה הכי חשובה של טופולוגיית המכפלה היא:

משפט 4.0.8

יהיו X_1, X_2 וY מרחבים טופולוגיים אזי: $f : Y \to X_1 \times X_2$ רציפה אם"ס שתי ה"קואורדינטות" שלה רציפות. זאת אומרת:

$$\begin{aligned} f_1 : Y &\to X_1 \\ f_2 : Y &\to X_2 \end{aligned}$$

רציפות.

הוכחה: נסמן $f = (f_1, f_2)$. $f(y) = (f_1(y), f_2(y))$.
נניח f_1, f_2 רציפות. תהי $U_1 \times U_2$ פתוחה בבסיסים ב X_1, X_2. אזי:

$$f^{-1}(U_1 \times U_2) = \{y \in Y \mid \ (f_1(y), f_2(y)) \in U_1 \times U_2\} = f_1^{-1}(U_1) \cap f_2^{-1}(U_2) = \text{פתוחה}$$

על מנת להוכיח את הכיוון השני, נוכיח תחילה את הלמה הבאה:

למה 4.0.9

ההטלות $\pi_i : X_1 \times X_2 \to X_i$ כאשר $i \in \{1, 2\}$ רציפות.

הוכחה: בה"כ $U \in X$ מתקיים $\mathcal{B} \ni U \times X_2 = \pi_1^{-1}(U)$ ובפרט פתוחה. ■

הערה 4.0.10 הם הטלות פתוחות? סגורות?
תהי $\bigcup_\alpha (U_{1\alpha} \times U_{2\alpha})$ פתוחה כללית נבחין כי:

$$\pi_1\left(\bigcup_\alpha U_{1\alpha} \times U_{2\alpha}\right) = \bigcup_\alpha U_{1\alpha} = \text{פתוחה}$$

ולכן היא אכן פתוחה. האם סגורה? כתרגיל.

כעת, נניח כי f רציפה. מכאן $f_1 = f \circ \pi_1$, ולכן g_1 רציפה כהרכבת רציפות וכן f_2. ■

טענה 4.0.11

X, Y מרחבים טופולוגיים. $f : X \to Y$ רציפה אס"ס $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$ לכל $A \subset X$.

הוכחה: $\Leftarrow$ תהי $A \subset X$ כלשהי אזי $\overline{f(A)}$ סגורה ב Y. מרציפות f: $f^{-1}\left(\overline{f(A)}\right)$ סגורה ב X. בוודאי מכילה את A, לכן מכילה את $\overline{A}$ (קבוצה סגורה המכילה את A בהכרח מכילה את $\overline{A}$). וזה בדיוק אומר כי: $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$.
נראה את $\Rightarrow$:
נרצה להראות שf היא רציפה. תהי $B \subset Y$ סגורה, נרצה להראות כי $A = f^{-1}(B)$ סגורה ב X. כלומר $A = \overline{A}$, יספיק להראות $\overline{A} \subseteq A$ כיוון שהכלה בכיוון השני היא מהגדרת הסגור. מהנתון $f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)}$. אבל $f(A) \subseteq B$ וB סגורה, אזי גם $\overline{A} \subseteq f^{-1}(B) = A \Leftarrow f\left(\overline{A}\right) \subset \overline{f(A)} \subseteq B$ כנדרש. ■

נחזור לדון בהטלהת האם היא סגורה?
נכון השארנו זאת כתרגיל, אבל בואו נפתור אותו.
נתבונן במרחבים $X = Y = \mathbb{R}$ ולכן $X \times Y = \mathbb{R}^2$. הטופולוגיה המוכרת על $\mathbb{R}^2$ מזדהה עם טופולוגיית המכפלה.
הבסיס לטופלוגיית L_∞ על $\mathbb{R}^2$ היא המלבנים הפתוחים. הבסיס לטופולוגיית המכפלה מכיל אותם. מצד שני כל קבוצת בסיס בטופולוגיית המכפלה היא $U \times V$ כאשר U, V בפתוחות ב $\mathbb{R}$ $\iff$ איחוד קטעים פתוחים לכן הטופולוגיות מתלכדות.
נתבונן בהיפרבולה:

$$H = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ xy = 1\right\}$$

נחשוב על הקבוצה הזו ועל ההטלה שלה ל$\mathbb{R}$. הדוגמה הזו תראה כי הן אינן סגורות.

הערה 4.0.12 בכל מקרה, לפונקציה $f : X \to Y$ (גם רציפה) לא בהכרח מתקיים:

$$A \subset X \quad Y - f(A) \neq f(X - A)$$

4.1 מכפלה של יותר משני מרחבים

נתבונן בשלושה מרחבים X, Y, Z אנו יכולים לכפול באופן הבא: $(X \times Y) \times Z$ או: $X \times (Y \times Z)$.
הקבוצות הבסיסיות $U \times V \times W$. הבסיסים על $X \times Y \times Z$ שונים אבל מגדירים את אותה טופולוגיה. כלומר:

$$U \times \left(\bigcup_\beta (V_\beta \times W_\beta)\right), \quad \left(\bigcup_\alpha (U_\alpha \times V_\alpha)\right) \times W$$

הם לא אותם בסיסים. אבל כן מדובר באותה טופולוגיה.
באינדוקציה על $X_1 \times \ldots \times X_n$ מרחבים טופולוגיים. טופולוגיית המכפלה מוגדרת דרך בסיס $U_1 \times \ldots \times U_n$ כאשר U_i פתוחה בX_i.
$X = X_1 \times \ldots \times X_n$ מרחב. אם: $U_1 \times \ldots \times U_n$ ו־ $V_1 \times \ldots \times V_n$ בסיסיות ו $(x_1, \ldots, x_n)$ בחיתוך אזי:

$$(x_1, \ldots, x_n) \in (U_1 \cap V_1) \times \ldots \times (U_n \cap V_n)$$

פתוחה בסיסית המוכלת בחיתוך.

משפט 4.1.1

יהיו $Y, X_1, \ldots, X_n$ מרחבים מטריים אזי הפונקציה: $f : Y \to X_1 \times \ldots \times X_n$ רציפה אם"ם כל פונקציות הקואורדינטות שלה רציפות.

$$f_i = \pi_i \circ f : Y \to x_i$$

הערה 4.1.2 סימון: $f = (f_1, \ldots, f_n)$

הוכחה: π_i רציפה כי $\underbrace{\left(\prod_{j \neq i} X_j\right) \times U_i}_{\text{עם הסדר הנכון}} = \pi_i^{-1}(U_i)$ (כאשר U_i פתוחה) פתוחה בסיסית ולכן פתוחה.

לכן אם f רציפה בוודאי $f_i = \pi_i \circ f$ רציפה כהרכבת רציפות.

כיוון שני: אם כל f_i רציפה אזי לפתוחה בסיסית $U_1 \times \ldots \times U_n$ (U_i פתוחה ב X_i)

$$f^{-1}(U_1 \times \ldots \times U_n) = \{y \in Y \mid \quad f(y) \in U_1 \times \ldots \times U_n\} = \{y \in Y \mid \quad f_i(y) \in U_i\} = \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(U_i)$$

פתוחה כאיחוד של פתוחות $\Leftarrow$ f רציפה כנדרש. ■

תרגיל: יהיו $X_1, \ldots, X_n$ ו: $Y_1, \ldots, Y_n$ מרחבים טופולוגיים. $f_i : X_i \to Y_i$ פונקציות אזי:

$$f = f_i \times \ldots \times f_n : X_1 \times \ldots \times X_n \to Y_1 \times \ldots \times Y_n$$

רציפה $\iff$ כל f_i רציפה.

נרצה להתשמש במשפט שהראינו: $f : X \to Y_1 \times \ldots \times Y_n$ רציפה $\iff$ כל f_i רציפה.

האם מותר לנו? האם מותר להפריד משתנים?

נקח $X = X_1 \times \ldots \times X_n$

$$X \underset{\pi_i \circ f}{\longrightarrow} Y_i$$

אם אלה רציפות גם f רציפה.

הוכחה אלטרנטיבית, ישירות מהגדרת הטופולוגיה.

תהי $V_1 \times \ldots \times V_n$ פתוחה בסיסית ב $Y_1 \times \ldots \times Y_n$. V_i פתוחה ב Y_i המקור

$$f^{-1}(V_1 \times \ldots \times V_n) = f_1^{-1}(V_1) \times \ldots \times f_n^{-1}(V_n)$$

פתוח אם כל $f_i^{-1}(V_i)$ פתוח. וגם ההפך ברור.

כתרגיל לסיים בתי הדרכים.

4.2 מכפלה אינסופית של מרחבים

תהי I קבוצה X_α מרחב טופולוגי לכל $\alpha \in I$ נרצה להגדיר את המכפלה $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ (I תושמט מהסימון לעיתים קרובות)

כקבוצה זה ידוע: פונקציות $f : I \to \bigcup_\beta X_\beta$, $f(\alpha) \in X_\alpha$ לכל $\alpha \in I$.

על מרחב המכפלה נגדיר טופולוגיה (ע"י בסיס)

פתוחה בסיסית: $\prod_{\alpha \in I} U_\alpha$. כאשר U_α פתוחה ב X_α לכל $\alpha \in I$.

הטופולוגיה המתקבלת היא טופולוגיית המכפלה במקרה שI סופית. אבל במקרה הכללי טופולוגיה זו נקראת: טופולוגיית התיבות (כיוון שהבסיס הוא "תיבות").

למה לא טופולוגיית המכפלה?

בגלל התופעה הבאה:

דוגמה 4.2.1 $I=\mathbb{N}$ ו: $X_i=\mathbb{R}$ לכל $i\in\mathbb{N}$ אז המכפלה היא: $X=\prod_{i=1}^{\infty}\mathbb{R}$ סדרות כלשהן $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ של ממשיים. כלומר: $X=\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
העתקת האלכסון $\Delta:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ אשר מוגדרת באופן הבא: $\Delta(x)=(x,x,x,\dots)$. כלומר כל קואורדינטה היא פונקציית הזהות $f_i(x)=x$. $\mathbb{R}\xrightarrow{f_i}\mathbb{R}$ בוודאי רציפה אבל: $\Delta^{-1}\left(\prod_{i=1}^{\infty}U_i\right)$ כאשר $U_i=\left(\frac{-1}{i},\frac{1}{i}\right)$ קטע פתוח.
נבחין כי:

$$\Delta^{-1}\left(\prod_{i=1}^{\infty}U_i\right)=\left\{x\in\mathbb{R}\mid\ x\in\left(-\frac{1}{i},\frac{1}{i}\right)\right\}=\bigcap_{i=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{i},\frac{1}{i}\right)=\{0\}$$

אינה פתוחה! כלומר, העתקה זו איננה רציפה על אף שכל קואורדינטה שלה רציפה! המקור של פתוחה אינו פתוח.

כלומר המשפט מהמקרה הסופי האומר כי: $f:Y\to\prod_{\alpha}X_\alpha$ רציפה $\iff$ כל קואורדינטה היא רציפה אינו נכון (על פי רוב) למכפלות אינסופיות עם טופולוגיית התיבות.
אבל אנו כן רוצים שהתכונה הזו תתקיים, לכן אנחנו נשנה את הטופולוגיה כך שזה כן יתקיים. נבנה טופולוגיה אחרת על $\prod_{\alpha\in I}X_\alpha$ שעבורה יתקיים כי $f:Y\to\prod_{\alpha}X_\alpha$ רציפה אם"ם כל קואורדינטה רציפה.
לצורך כך נגדיר:

הגדרה 4.2.2 תיבה פתוחה גדולה: תיבה $\prod_{\alpha}U_\alpha$ תקרא פתוחה "גדולה" אם כל $U_\alpha=X_\alpha$ פרט למספר סופי של α.

טענה 4.2.3

לכל אוסף $\{X_\alpha\}_\alpha$ של מרחבים טופולוגיים, התיבות הפתוחות הגדולות מהוות בסיס.

הוכחה: $\prod_{\alpha}X_\alpha$ תיבה פתוחה גדולה ולכן בבסיס.
בנוסף לשתי תיבות פתוחות גדולות $\prod_{\alpha}U_\alpha$ ו: $\prod_{\alpha}V_\alpha$ אזי $\{X_\alpha\}_\alpha\in\prod_{\alpha}U_\alpha\cap\prod_{\alpha}V_\alpha$, $(X_\alpha)_\alpha\in\prod_{\alpha}(U_\alpha\cap V_\alpha)$.
והמכפלה: $\prod_{\alpha}(U_\alpha\cap V_\alpha)$ הוא תיבה פתוחה גדולה (פתוחה בסיסית בטופולוגיית התיבות, בנוסף גם גדולה).
כעת האפיון לרציפות (עם ההוכחה) מתקיים כמו במקרה הסופי. ■

הגדרה 4.2.4 טופולוגיית המכפלה על $\prod_{\alpha}X_\alpha$ (מכפלת מרחבים טופולוגים) היא הטופולוגייה הנוצרת על ידי הבסיס של התיבות הפתוחות הגדולות.

משפט 4.2.5

יהיו $(X_\alpha)_{\alpha\in I}$, Y מרחבים טופולוגיים אזי הפונקציה $f:Y\to\prod_{\alpha}X_\alpha$ רציפה (עבור טופולוגיית המכפלה על $\prod_{\alpha}X_\alpha$) $\iff$ כל קואורדינטה רציפה.

הוכחה: ראשית ההטלה: $p_\alpha:\prod_\beta X_\beta\to X_\alpha$ הן רציפות כי לU_α פתוחה בX_α:

$$p_\alpha^{-1}(U_\alpha)=\left(\prod_{\beta\neq\alpha}X_\beta\right)\times U_\alpha$$

וזו תיבה גדולה. לכן, אם f רציפה, אזי ההרכבה $p_\alpha f=f_\alpha$ שהיא הקואורדינטה הα היא רציפה.
כיוון שני: אם כל פונקציית קואורדינטות f_α רציפה, אזי לפתוחה בסיסית בטופולוגיית המכפלה: $U=\prod_{\alpha}U_\alpha$ כאשר התיבה גדולה נקבל

$$f^{-1}(U)=\{y\in Y\mid\ f(y)\in U\}=\{y\in Y\mid\ f_\alpha(y)\in U_\alpha\ \forall\alpha\}=\bigcap_{\alpha}f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$$

חיתוך סופי של פתוחות, כי אם $X_\alpha=U_\alpha$ אזי $U=f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ אפשר להשמיט את האינדקס הα בחיתוך. ■

לסיכום, טופולוגיית המכפלה נקראת כך כי היא מקיימת את משפט הרציפות הנבחנת בקואורדינטות. זה אינו נכון לטופולוגיית התיבות שהיא חזקה יותר (במקרה האינסופי, על פי רוב). למכפלות סופיות טופולוגיית התיבות מתלכדת עם טופולוגיית המכפלה.

משפט 4.2.6

כמרחב טופולוגי C (קבוצת קנטור) הומאומורפית לקבוצה $\prod_{i=1}^{\infty}\{01\}$ עם טופולוגיית המכפלה על $\{0,1\}$ היא הטופולוגיה הדיסקרטית.

על $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ הגדרנו 2 טופולוגיות:

1. טופולוגיית התיבות: בסיס של תיבות פתוחות $\prod_{\alpha\in I} U_\alpha$ כאשר U_α היא פתוחה ב X_α.
2. טופולוגיית המכפלה: והבסיס הוא התיבות הפתוחות הגדולות.

במקרה השני מתקיים : $f: Y \to \prod_\alpha X_\alpha$ רציפה $\iff$ לכל פונקציות הקואורדינטות $f_\alpha = \pi_0 \circ f$ רציפה לכל α.

הערה 4.2.7 אם I סופית שתי הטופולוגיות מתלכדות.

הערה 4.2.8 הקבוצה $\prod X_\alpha$ ריקה $\iff$ קיים α שעבורו X_α ריקה. ($\Rightarrow$ טריוויאלי. $\Leftarrow$ אקסיומת הבחירה).

פרק 5

הפרדה

יהי (X,d) מרחב מטרי אזי כל נקודה בה סגורה (קל להראות מהסדרות בקבוצה, הסדרה היחידה היא הקבועה והיא מתכנסת לנקודה שבקבוצה).

$\Leftarrow$ המשלים לכל נקודה פתוח.

יהיו Q,P נקודות שונות אז $0 \neq \mathrm{d}(Q,P)$ נבחר $r = \mathrm{d}(Q,P)$ אזי $\varnothing = B_r(Q) \cap B_r(P)$.

במרחב מטרי לכל Q,P שונים קיימת סביבות פתוחות שאינם נחתכות.

הגדרה 5.0.9 תהיינה B,A קבוצה קבוצות במרחב טופולוגי X שהן זרות. נאמר שניתן להפריד אותן זו מזו אם קיימות פתוחות זרות V,U, $A \subseteq U$ ו $B \subseteq V$.

טענה 5.0.10

במרחב מטרי ניתן להפריד כל קבוצה סגורה.

ההוכחה תינתן בהמשך.

הגדרה 5.0.11 יהי X מרחב טופולוגי

1. נאמר ש X מקיים את תכונת ההפרדה T_1. אם לכל $x \in X$, $\{x\}$ סגורה ב X (כל נקודה היא סגורה)
2. נאמר כי X מקיים תכונת ההפרדה T_2 ("X מרחב האוסדורף") אם לכל $x,y \in X$ שונים קיימות פתוחות זרות V,U כך ש: $x \in U$ ו $y \in V$.
3. X מקיים תכונת הפרדה T_3 אם X מקיים T_1 וגם כל נקודה x ניתנת להפרדה מכל קבוצה סגורה A שמקיימת $x \notin A$ (שם נוסף: X מרחב רגולרי)
4. X מקיימת תכונת הפרדה T_4 (שם אחר "X מרחב נורמלי:) אם X מקיים T_1 וכל שתי סגורות זרות ניתנות להפרדה.

טענה 5.0.12

T_4 גורר T_3 גודד T_2 גורר T_1.

הוכחה: $T_3 \Leftarrow T_4$: T_4 מקיים T_1. כל נקודה $\{x\}$ היא סגורה ולכן מההגדרה אם $x \notin A$ אזי $\{x\}$ ו A ניתנות להפרדה.

$T_2 \Leftarrow T_3$: יהיו x,y שונים אזי מזה ש T_3 הוא גם T_1 $\{x\}$ ו $\{y\}$ סגורות וגם $x \notin \{y\}$ ולכן הם ניתנון להפרדה.

$T_1 \Leftarrow T_2$: תהי $x \in X$ נראה ש $X \setminus \{x\}$ פתוחה. לכל $y \in X \setminus \{x\}$ קיימת פתוחה V_y כך ש $X \notin \{x\} \supset V_y \ni y$ ואז:

$$X \setminus \{x\} = \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} \{y\} \subset \bigcup_{y \in X \setminus \{x\}} V_u \subset \bigcup_{y} X \setminus \{x\} = X \setminus \{X\} = \bigcup_{y \neq x} V_y = X \setminus \{x\}$$

פתוחה. ולכן: $(X \setminus \{x\})^c = \{x\}$ סגורה. ■

5.1 ניסוחים שקולים לתכונת ההפרדה

משפט 5.1.1

1. X הוא T_1 אס"ס לכל $x \neq y$ קיימת פתוחה U כך ש $x \in U$ ו $y \notin U$.
2. X הוא T_2 אס"ס לכל $x \neq y$ ב X קיימת U פתוחה כך ש $x \in U$ ו: $y \notin \overline{U}$.
3. X הוא T_3 אס"ס X הוא T_1 וגם לכל $A \subseteq X$ סגורה $x \in A^C$ קיימת U פתוחה כך ש $x \notin \overline{U}$ ו: $A \subset U$.
4. X הוא T_4 אס"ס X הוא T_1 וגם לכל $A, B \subset X$ זרות קיימת פתוחה U כך ש $A \subset U$ ו: $\overline{U} \cap B = \varnothing$.

הוכחה:

1. $\Leftarrow$: ל $x \neq y$ נקיח $U = \{y\}^c$ פתוחה ו $x \in U$.
   $\Rightarrow$: לכל $x \in \{y\}^c$ קיימת פתוחה, $x \in U_x$ כך ש $U_x \subset \{y\}^c$ וכמו קודם: $\{y\}^c = \bigcup_{x \neq y} U_x$ פתוחה.
2. $\Leftarrow$: יהיו $x \neq y$ ב X ונפריד בפתוחות זרות V ו U כך ש $x \in V$ ו $y \in U$. V^c סגורה ומכילה את U ולכן את $\overline{U}$.
   $V = X \backslash V^c \Leftarrow V \subset X \backslash \overline{U}$. $y \in V \Rightarrow y \notin \overline{U}$.
   $\Rightarrow$: ניקח U כמו בתנאי $V = \overline{U}^c$ פתוחה. $x \in U$, $y \in V$, $\varnothing = V \cap U$.
3. $\Leftarrow$: תהי $A \subset U$ פתוחה, $V \ni x$ פתוחה U, V זרות אזי $x \notin X \backslash V \supset \overline{U}$ מכאן התכונה.
   $\Rightarrow$: נגדיר $V = X \backslash \overline{U}$ ואז V, U פתוחות זרות המפרידות את A מ $\{x\}$.
4. הוכחת השקילות כמו עבור T_3 ו T_2.

■

הערה 5.1.2 לקבוצה $X \supset C$ ונקודה $x \in X$ נגדיר $\mathrm{d}(x, C) = \inf_{y \in C} \mathrm{d}(x, y)$
אזי $\mathrm{d}(x, C) \geq 0 \Leftarrow \exists y_n \in C$ $\mathrm{d}(x, y_n) < \frac{1}{n}$ ואז $y_n \to c$ ולכן: $x \in \overline{C}$. להפך, $x \in \overline{C}$ אז $\exists y_n \in C$ כך ש $y_n \to x$
$\Leftarrow \mathrm{d}(x, y_n) \to 0$, $0 = \inf_{y \in C}(x, y)$.

משפט 5.1.3

מרחב מטרי הוא T_4.

הוכחה: יהי (X, d) מרחב מטרי. לצורך שקיפות ההוכחה נראה תחילה (למרות שמיותר) ש X הוא T_3. Y סגורה ב X, $x \in X$ ו $x \notin Y$. המשלים ל Y פתוח ולכן יש כדור $B_r(x)$ כך ש $r > 0$ שאינו חותך את Y.
אזי $V = \bigcup_{y \in Y} B_{r/2}(y)$ פתוחה המכילה את Y. $U = B_{r/2}(x)$ פתוחה המכילה את $\{x\}$ ומתקיים $\varnothing = U \cap V$ כי אם $z \in U \cap V$
אזי $z \in B_{r/2}(y)$ לאיזשהו $y \in Y$ אז:

$$\mathrm{d}(x, y) \leq \mathrm{d}(x, z) + \mathrm{d}(z, y) < r/2 + r/2 = r$$

וזו סתירה (כי $y \in V \cap B_r(x) = \varnothing$).
בקרה שלנו, Z, Y סגורות זרות לכן: $0 < \mathrm{d}(y, Z)$ לכל $y \in Y$.

$$U = \bigcup_{y \in Y} B_{\mathrm{d}(y,Z)/2}(y)$$

$$V = \bigcup_{z \in Z} B_{\mathrm{d}(z,Y)/2}(z)$$

ברור כי V, U פתוחותץ $Y \subset U$ ו $Z \subset V$. נראה שהן זרות וסיימנו.
אם לא קיימת $y \in Y$ ו $z \in Z$ כך ש $x \in B_{\mathrm{d}(y,Z)/z}(y) \cap B_{\mathrm{d}(z,Y)/z(z)}$. זה לא ייתכן. למשל בה"כ $\mathrm{d}(y, Z) \geq \mathrm{d}(z, Y)$

ואז:

$$\mathrm{d}(y,z) \geq \mathrm{d}(y,Z) \geq \frac{\mathrm{d}(y,z)}{2} + \frac{\mathrm{d}(z,Y)}{2} > \mathrm{d}(y,x) + \mathrm{d}(z,x) \geq \mathrm{d}(y,z)$$

וזו סתירה. ■

טענה 5.1.4

הצכטנה הבאה שקולה לT_2 עבור מרחב טופולוגי X. האלכסון $\Delta = \{(x,x) \in X \times X \mid x \in X\}$ היא סגורה ב $X \times X$ץ

הוכחה: אם X האוסדורף נראה כי המשלים $X \times X \backslash \Delta$ פתוחה.
אם $(x,y) \in X \times X \backslash \Delta$ אזי $y \neq x$ ולכן הם ניתנים להפרדה בפתוחות זרות. V,U, $x \in U$, $y \in V$ ואז $U \times V$ פתוחה ב $X \times X$ אבל $\underbrace{U \times V}_{\ni (x,y)} \cap \Delta$ ריקה. ולכן: $X \times X \backslash \Delta$ קבוצה פתוחה.
להפך, אם Δ סגור ב $X \times X$ יהיו $y \neq x$ ב X אזי $(x,y) \notin \Delta$ ולכן המשלים $X \times X \backslash \Delta$ פתוחה ויש פתוחה בסיסית $U \times V$ (U פתוחה ב X וV פתוחה ב X) המוכלת במשלים ומכילה את (x,y) אז V,U פתוחות המפרידות את x מ y. ■

משפט 5.1.5

1. יהי X מרחב טופולוגי שהוא $\begin{matrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{matrix}$ אזי כל תת מרחב שלו הוא $\begin{matrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{matrix}$
2. יהיו X,Y מרחב טופולוגיים שהם $\begin{matrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{matrix}$ אזי $X \times Y$ הוא $\begin{matrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{matrix}$

הוכחה:

1. נראה T_1:
יהי $Y \subset X$ אם X הוא T_1 כל נקודה ב Y סגורה אפילו ב X ומהגדרת טופולוגיות תת מרחב סגורה גם ב Y.
נראה T_2:
$y_1, y_2 \in Y \subset X$ נתונות להפרדה בפתוחות זרות U,V ואז $U \cap U$ ו $U \cap Y$ פתוחות זרות בY ומפרידות את y_1 מy_2.
נראה T_3:
אם $Y \subset X$, A סגורה ב Y ו $A \not\ni y \in Y$ אזי $A = Y \cap B$ כש B סגורה ב . בהכרח $y \notin B$ ואז ניתן להפריד את y מB מפתוחות זרות U,V בX ואז $U \cap Y$, $V \cap Y$ פתוחות ב Y המפרידות את y מ .

2. נראה T_1:
בהינתן X,Y הם T_1 יהיו $x \in X$ ו$y \in Y$ צריך להוכיח $\{(x,y)\}$סגורה.

למה 5.1.6

לפה אם $A \subset X$, $B \subset Y$ סגורות. אזי $A \times B$ סגורה.

הוכחה:

$$X \times Y \backslash A \times B = (X \backslash A) \times Y \cup X \times (Y \backslash B)$$

פתוחות בסיסיות. ■

נראה T_2:
X,Y הם T_2, נרצה להראות כי $(x',y') \neq (x,y)$ ב X,Y ניתנות להפרדה בפתוחות זרות.
לא קשה, אבל צריך להפריד למקרים. במקום זה נשתמש בקריטריון האלכסון:

$$\underbrace{\Delta_{X \times Y}}_{\substack{\cap \\ (X \times Y) \times (X \times Y)}} \cong \Delta_X \times \Delta_Y \subseteq X \times X \times Y \times Y$$

לפי הלמה, מכפלת סגורות סגורה. הומאומורפיזם פשוט:

$$(x,y,x',y') \iff (x,x',y,y')$$

ומכיוון ש Y,X הם T_2 אזי Δ_X ו Δ_Y סגורות. ולכן $\Delta_X \times \Delta_Y$ סגורה ואז מהלמה $\Delta_{X\times Y}$ סגורה ומקרטריון האלכסון $X \times Y$ האוסדורף.
נראה T_3:

אם X,Y הם T_3, תהי $A \subset X \times Y$ סגורה, $X \times Y \ni (x,y) \notin A$ נרצה להפריד. המשלים ל A פתוחה, $(x,y) \in X \times Y \backslash A$ ולכן יש פתוחה בסיסית $(x,y) \in U \times V$ כאשר U פתוחה ב X ו V פתוחה ב Y אבל $U \times V \subset X \times Y \backslash A$.

מכיוון ש X רגולרי ניתן להפריד את X מ $X \backslash U$ בפתוחות זרות או לפי הקריטריון השקול יש פתוחה U_0 ב X כך ש $x \in U_0$, $U \supset \overline{U_0}$.

אותו דבר ל Y. מרגולריות Y קיימת פתוחה V_0 ב Y כך ש $y \in V_0 \subset \overline{V_0} \subset V$ אזי $U_0 \times V_0$ סביבה פתוחה של (x,y) ב $X \times Y$ אבל:

$$\overline{U_0 \times V_0} = \overline{U_0} \times \overline{V_0} \subset U \times V \subset X \times Y \backslash A$$

ולכן מתקיים הקריטריון השקול לT_3.

■

הערה 5.1.7 המעבר $\overline{U_0 \times V_0} = \overline{U_0} \times \overline{V_0}$ הוא מסקנה מהלמה. הוכחה כתרגיל.

5.2 דוגמאות למרחבים נורמליים

משפט 5.2.1

קבוצה סדורה היטב X עם טופולוגיית הסדר היא מרחב טופולוגי נורמלי.

הערה 5.2.2 בקבוצה סדורה היטה, אינטרבל $(a,b]$ הוא קבוצה פתוחה. כי אם b איבר אחרון, זה מתלכס עם (a,∞) $\{a < x\}$ אחרת יש ל b עוקב b' ואז זו $(a,b') = (a,b']$

הוכחה: כל $\{a\}$ כאשר $a \in X$ היא סגורה בתור המשלים לפתוחה $(-\infty,a) \cup (a,\infty)$ פתוחות בסיסיות. לכן X הוא T_1.
כעת תהיינה A,B זרות וסגורות. אנו רוצים להפריד בפתוחות זרות.
לנוחות נניח קודם כל כי האיבר המינימלי x_0 של X אינו ב A ואינו ב B אזי לכל $a \in A$ קיים פתוחה בסיסית $(x_a,a]$ זרה לB וכן $(y_b,b]$ זרה לA לכל $b \in B$.
האיחודים:

$$\begin{aligned} U &= \bigcup_{a\in A} (x_a,a] \\ V &= \bigcup_{b\in B} (y_b,b] \end{aligned}$$

הן פתוחות זרות המפרידות את A מB.
נניח בשלילה כי הן אינן זרות, כך ש־$(x_a,a] \cap (y_b,b] \neq \varnothing$, ונניח בה"כ $a < b$. בנוגע ל־y_b, קיימות שתי אפשרויות:

1. $a \leq y_b$, ואז בהכרח האינטרוולים זרים.
2. $a > y_b$, ואז $a \in (y_b,b)$, אבל $a \notin B \supset (y_b,b)$, בסתירה.

כעת, נניח כי $x_0 \in A$, ונבחין כי $\{x_0\}$ גם סגורה וגם פתוחה: אם $X = \{x_0\}$ זה ברור, ואחרת, יהי x_1 העוקב שלו, ואז $\{x_0\} = (-\infty,x_1)$ וכן $\{x_0\} = (x_0,\infty)^c$.
אם כך, $A \backslash \{x_0\}, B$ סגורות וזרות וניתנות להפרדה בפתוחות זרות, $A \backslash \{x_0\} \subset U,\ B \subset V$. אך אז $U \cup \{x_0\}$ פתוחה שמכילה את A, ו־$B \subset V \backslash \{x_0\}$. ■

הגדרה 5.2.3 קבוצה סדורה היטב $(X,\geq)$ היא קבוצה כך שלכל $X \supset Y$ שאינה ריקה קיים איבר מינמלי.

הערה 5.2.4 סדר טוב הוא מלא, לכל $X \supset \{x,y\}$ גם קיים מינימלי, נניח x, אז $x \leq y$.

דוגמה 5.2.5 $\mathbb{Z},\mathbb{R}$ עם הסדר הרגיל אינן סדורות היטב. אבל $\mathbb{N}$ סדורה היטב.
הקבוצה $\mathbb{N}\cup\{\omega\}$ כך ש $n<\omega$ לכל $n\in\mathbb{N}$ היא סדורה היטב. כך גם:

$$0,1,\ldots,\omega,\ldots,2\omega,\omega+1,\ldots,\omega^2,\omega^2+1,\ldots$$

בניות

1. לכל סדורה היטב אפשר להוסיף איבר בסוף
2. לכל שרשרת עולה של סדורות היטב $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ שבה אם $\alpha>\beta$ אזי A_β היא רישא של A_α וגם $\bigcup\limits_\alpha A_\alpha$ סדורה היטב.

למה 5.2.6

לכל שתי קבוצות סדורות היטב יש דרך יחידה לתאר אחת כרישא של השניה. ז"א שאם $A\leq B$ או $B\leq A$.

הערה 5.2.7 אם שתי האפשרויות מתקיימות ביחד $\iff$ $A\cong B$ $\iff$ לA ולB יש את אותו טיפוס סדר.

הערה 5.2.8 על קבוצה סופית יש רק טיפוס סדר טוב יחיד $(0<1<\ldots<n)$.
על קבוצה בת מניה יש הרבה טיפוסי סדר טוב (אקסיומת הבחירה $\iff$ לכל קבוצה יש סדר טוב).
נתבונן על כל טיפוסי הסדר על קבוצה בת מנייה (למשל $\mathbb{N}$).
נסדר אותם לפי סדר יחס הרישא: $0<1<\ldots<\omega<\omega+1<\ldots<\omega^2<\ldots$
ניקח את האיחוד העולה ונקבל קבוצה סדורה היטב Ω.
Ω אינה בת מניה כי אחרת הייתה מתקבלת כרישא ממש של עצמה אבל כל רישא ממש שלה היא בת מנייה.

הערה 5.2.9 צריך להראות גם $T_1=(-\infty,x)\cup(x,\infty)$ פתוחה ולכן המשלים שלו סגור. אבל המשלים הוא $\{x\}$ משל.

הערה 5.2.10 $\{x\}$ פתוחה $\iff$ x עוקב או איבר ראשון

דוגמה 5.2.11 דוגמה למרחב T_1 שאינו T_2:
תהי X קבוצה אינסופית. נגדיר את טופולוגית המשלימים הסופיים (COF) $u\subset X$ היא פתוחה אסם u^c סופית או $\varnothing$.
ברור כי כל $\{x\}$ ו $\{y\}$ סגורים.
ברור גם שאין הפרדה בין הפתוחות ולכן X אינה T_2.

דוגמה 5.2.12 דוגמה למרחב Y שהוא T_2 ואינו T_3:
כקבוצה: $Y=\mathbb{R}$ אבל עם טופולוגיה שונה מהרגילה.
נסמן:

$$\begin{aligned} A &= \left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R} \\ X &= Y-A \end{aligned}$$

עם הטופולוגיה המושרית מ$\mathbb{R}$.
נגדיר טופולוגיה חדשה על Y באופן הבא: $U\subset Y$ תקרא פתוחה אם"ם $U\cap X$ פתוחה ב X וגם $U\cap(\mathbb{R}-\{0\})$ פתוחה ב $\mathbb{R}-\{0\}$ (עם הטופולוגיה הרגילה).

טענה 5.2.13

זו אכן טופולוגיה, וגם, היא חזקה יותר (מכילה את) מהטופולוגיה הרגילה על $\mathbb{R}$.

הוכחה: החלק הראשון (שזו אכן טופולוגיה) היא מקרה פרטי של עובדה כללית יותר:

אם X קבוצה ו: $\{Y_\alpha\}$ מרחבים טופולוגים, נתונות $f_\alpha : Y_\alpha \to X$ ומגדירים טופולוגיה על X ע"י $U \subset X$ נקראת פתוחה אם $f_\alpha^{-1}(U)$ פתוחה ב Y_α לכל α.

נבחין כי: $\varnothing = f_\alpha^{-1}(\varnothing) \Leftarrow \varnothing$ בטופולוגיה.

$X \Leftarrow Y_\alpha = f_\alpha^{-1}(X)$ בטופולוגיה.

$\bigcup_i f_\alpha^{-1}(U_i) = f_\alpha\left(\bigcup_i U_i\right)$ וגם: $\bigcap_i f_\alpha^{-1}(U_i) = f_\alpha^{-1}\left(\bigcap_i U_i\right)$. וזה מסיים את ההוכחה.

הערה 5.2.14 הפכנו כאן סימנים. צריך לשים לב לזה. $X = \mathbb{R}$ אצלנו ואילו Y_α הוא: $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{\alpha}\right\}$ כאשר $\alpha \in \mathbb{N}$.

גם החלק השני מיידי. כי f_α אצלנו הן הכלות ולכן המקורות הם חיתוך עם $\mathbb{R} - \{0\}$. וכם $\mathbb{R} - A$ מכיוון שהטופולוגיה מעליהם היא זו של תת־מרחב החיתוך של פתוחה מ $\mathbb{R}$ פתוחה בהם.

לכן אם U פתוחה ב $\mathbb{R}$ בטופולוגיה הרגילה, היא פתוחה בטופולוגייה החדשה. ■

מסקנה 5.2.15

Y הוא T_2. כל שתי נקודות שונות נתונות להפרדה בפתוחות רגילות זרות ובפרט בפתוחות זרות בטופולוגיה החדשה.

לעומת זאת, Y איננו T_3, את הקבוצה A לא ניתן להפריד מ $\{0\}$ למרות שהן זרות וסגורות. ו $0 \notin A$.

הנקודה $\{0\}$ סגורה כי המרחב Y הוא T_1 (כי הוא T_2).

הקבוצה A סגורה כי המשלים $\mathbb{R} - A = X$ פתוחה וזאת מהגדרת הטופולוגיה.

נבחין כי: $\mathbb{R} - A = X \cap (\mathbb{R} - A)$ פתוחה ב $\mathbb{R} - A$.

וגם: $\mathbb{R} - (A \cup \{0\}) = X \cap (\mathbb{R} - \{0\})$ פתוחה כיו $A \cup \{0\}$ סגורה כי כוללת את הגבול $\{0\}$ של $\left\{\frac{1}{n}\right\}$. פתוחה ב $\mathbb{R}$ ובפרט פתוחה ב $\mathbb{R} - \{0\}$.

כלומר, הקבוצה A כן סגורה בטופולוגיה החדשה (למרות שהיא לא בטופולוגיה הרגילה).

הערה 5.2.16 ברור שלא ניתן להפריד את A מ$\{0\}$ בטופולוגיה הרגילה. כי $0 \in \overline{A}$ בטופולוגיה הרגילה. ולכן, כל סביבה של 0 תחתוך את A.

אנו נוכיח כי כל סביבה של 0 ב Y חותכת כל סביבה של A בY ובכך נסיים.

תהי U סביבה פתוחה של 0 בY אזי $U \cap (\mathbb{R} - A)$ פתוחה ב $\mathbb{R} - A$ פתוחה ב $\mathbb{R} - A$. ולכן: $0 \in U - A = (\mathbb{R} - A) \cap V$ כש V פתוחה ב $\mathbb{R}$ ולכן V מכילה קטע $(-\varepsilon, \varepsilon)$ פתוח סביב 0. ולכן:

$$U - A \supset (-\varepsilon, \varepsilon) - A$$

אבל כל סביבה של A תכיל סביבה של כל נקודה ב A כלומר תכל קטע פתוח סביב כל נקודה בA $\left(-\frac{1}{n} - \varepsilon_n, \frac{1}{n}\varepsilon_n\right)$ כאשר $\varepsilon_n > 0$. זה כבר חותך את $(-\varepsilon, \varepsilon) - A$ וזה מראה את הנדרש. לכן Y אינו T_3.

למה 5.2.17

ל $0 \neq x \in Y = \mathbb{R}$ כל סביבה של x מכילה קטע פתוח $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$.

הוכחה: קבוצה W המכילה את x היא פתוחה אם"ם $W - A$ פתוחה ב $\mathbb{R} - A$ ו: $W - 0$ פתוחה ב $\mathbb{R} - 0$. ל $x \neq 0$ התנאי השני ריק. כלומר נחתוך את W עם $\mathbb{R} - \{0\}$ זו פתוחה ב $\mathbb{R} - \{0\}$ ולכן ב $\mathbb{R}$ ולכן מכילה קטע סביב x ■

דוגמה 5.2.18 למרחב T_3 שאינו T_4:

דוגמה אחת ניתנה בתרגול 4 - Ω הקבוצה הסדורה היטב "הקטנה ביותר" שאינה בת מנייה.

מוסיפים לה עוד איבר שגדול מכל האחרים. בתורת הקבוצות מסורתי לקחת את האיבר הזה בתור הקבוצה Ω כאיבר. ונקבל: $\overline{\Omega} = \Omega \cup \{\Omega\}$ (סימון פחות מבלבל: סמל ∞ שאינו ב Ω ו: $\overline{\Omega} = \Omega \cup \{\infty\}$).

בתרגול הוכח כי הוא T_3 אבל לא T_4.

הערה 5.2.19

1. Ω ו $\overline{\Omega}$ סדורות היטב עם טופולוגיית הסדר ולכן נורמליות כמרחבים טופולוגים.
2. מכפלת $T_3 \times T_3$ היא T_3 ולכן המכפלה שלנו היא T_3 ולכן קיבלנו מכפלה של T_4 שהיא אינה T_4.
3. כנשלמד את מושג הקומפקטיות נראה כי מרחב T_3 קומפקטי הוא T_4 וכי $\overline{\Omega}$ קומפקטי. לכן $\overline{\Omega}\times\overline{\Omega}$ קומפקטי(מכפלת קומפקטיים היא קומפקטית) ו T_3 ולכן T_4. ולכן $\Omega \times \overline{\Omega}$ הוא תת מרחב של מרחב נורמלי אבל אינו נורמלי.

ניתן כעת דוגמה שונה למרחב T_3 שאינו T_4.

תהי $\mathbb{N}$ כרגיל הטבעיים עם הטופולוגיה הדיסקרטית.

תהי J קבוצה (תשמש כאינדקסים) שאינה בת מנייה. יהי $X = \mathbb{N}^J = \{f : J \to \mathbb{N}\}$ עם טופולוגיית המכפלה.

הקבוצות הבסיסיות בטופולוגיית המכפלה הן בעצמן איחודים של קבוצות מהצורה:

$$\{f : J \to \mathbb{N} \mid \ f(j_1) = n_1,\ f(j_2) = n_2, \ldots, f(j_n) = n_n\} = X$$

בהנתן $f : J \to \mathbb{N}$ וקבוצה סופית $B \subset J$. נבנה ממנה את הקבוצה הבסיסית:

$$X(f|_B, B)\, X(f, B) = \{g : J \to \mathbb{N} \mid \ f(j) = f(j) \ \ \forall j \in B\}$$

הערה 5.2.20 משתמשים פה רק ב $f|_B$.

והקבוצות האלה עדין מהוות בסיס לטופולוגיית הכפלה.

כי היחידונים בסיס לטופולוגיה הדיסקרטית על $\mathbb{N}$.

נראה שהוא לא T_4. נגדיר 2 קבוצות סגורות P_1, P_2 ב X.

$$\begin{aligned} P_1 &= \{f : J \to \mathbb{N} \mid \text{ כל ערך ב } \mathbb{N} \text{ פרט ל1 מתקבל לכל היותר פעם אחת}\} \\ P_2 &= \{f : J \to \mathbb{N} \mid \text{ כל ערך ב } \mathbb{N} \text{ שאינו 2 מתקבל לכל היותר פעם אחת}\} \end{aligned}$$

מכיוון ש J איננה בת מנייה, כל $f \in P_1$ לוקח ערכים שונים מ1 על קבוצה סופית או בת מנייה ובשאר אברי $x \in J$ מתקיים $f(x) = 1$.

באותו אופן ל $f \in P_2$ $f(x) = 2$ פרט לקבוצה סופית או בת מנייה של אינדקסים x.

נראה כי P_1 ו P_2 סגורות זרות ואינן ניתנות להפרדה בפתוחות זרות.

מיידי כי P_1, P_2 הן זרות כי $f \in P_1$ מקיימת $f(x) = 1$ פרט לקבוצה סופית\בת מנייה של x־ים (נסמנה A_1) ו: $f \in P_2$ מקיימת $f(x) = 2$ פרט לקבוצה דומה A_2 אבל $\varnothing \neq J - A_1 - A_2$ כי J אינה בת מנייה ולאבר בה $1 = f(x) = 2$ סתירה.

נראה ש P_1 סגורה (לP_2 הוכחה דומה):

נראה כי המשלים $X - P_1$ פתוחה = איחוד של קבוצות בסיסיות.

$$\overline{X} - P_1 = \{f : J \to \mathbb{N} \mid \ f(j_1) = f(j_2) \neq 1 \text{ כך ש } J \text{ ב } j_1 \neq j_2 \text{ קיימים}\} =$$

$$\bigcup_{\substack{j_1 \in J \\ j_2 \in J \\ n \in \mathbb{N} - \{1\}}} \{f \in X \mid f(j_1) = f(j_2) = n\} = \bigcup_{\substack{j_1 \in J \\ j_2 \in J \\ n \in \mathbb{N} - \{1\}}} X\left(\begin{matrix} f(j_1) = n \\ f(j_2) = n \end{matrix}, B = \{j_1, j_2\}\right)$$

למה 5.2.21

מכפלה של מרחבים טופולוגיים T_3 (גם T_1, T_2) היא T_3.

הוכחה: לא הוכחה, רק הסבר.

הוכחנו למכפלה $X \times Y$, ולכן זה נכון גם לכל סופית באינדוקציה.

למכפלה $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha$ כאשר I כלשהי, T_1 וT_2 קלים מאוד (T_1: מכפלת סגורות תמיד סגורה).

נרצה להפריד נקודה מסגורה. נוח להראות כי אם $U \subset \prod_{\alpha \in I} U$ פתוחה, $x \in U$ אזי קיימת תיבה גדולה (פתוחה בסיסית $V = \prod_\alpha V_\alpha$, $x \in V \subset \underbrace{\overline{V}}_{=\prod \overline{V_\alpha}} \subset U$) וזה מושאר כתרגיל קל. ■

נחזור לדוגמה:

דוגמה 5.2.22 $X = \mathbb{N}^J$. J איננה בת מנייה. $\mathbb{N}$ דיסקרטית. חושבים על אברי X כפונקציות $f : J \to \mathbb{N}$. הטופולוגיה: טופולוגיית המכפלה.

בסיס לטופולוגיה ניתן לתאר כפונקציות שבמספר סופי של קואורדינטות קובעים את הערך שלהן.

בסיס זה חלקי לבסיס הרגיל של טופולוגיית המכפלה שבו במספר סופי של קואורדינטות α דורשים $f(j_\alpha) \subset A_\alpha$. מספיק להשתמש בו כי הטופולוגיה על $\mathbb{N}$ דיסקרטית.

סימון: אם $f \in X$, $B \subset J$ סופית. נסמן $X(f,b) = \{g : J \to \mathbb{N} \mid \ g(j) = f(j) \ \ \forall j \in B\}$ אלה מהוות בסיס.

נגדיר:

$$P_1 = \{f : J \to \mathbb{N} \mid \text{ נגדיר לכל } x \neq 1 \text{ ב}\mathbb{N}\text{המתקבל כ } f(j) \text{ לכל היותר ל } j \text{ יחיד}\}$$

הערה 5.2.23 כל $f \in P$ מקבלת את הערך $f(j) = 1$ פרט ל j בקבוצה סופית או בת מנייה.

באותו אופן:

$$P_1 = \{f : J \to \mathbb{N} \mid \text{ נגדיר לכל } x \neq 2 \text{ ב}\mathbb{N}\text{המתקבל כ } f(j) \text{ לכל היותר ל } j \text{ יחיד}\}$$

ברור כי $\varnothing = P_2 \cap P_1$ כי ב P_i מתקבל הערך i פרט לכל היותר לקבוצה בת מנייה, ו J אינסופית לא בת מנייה.

הראינו שהן סגורות, המשלימים הם:

$$X - P_1 = \bigcup_{\substack{j_1 \in J \\ j_2 \in J \\ n \in \mathbb{N} - \{1\}}} \{f \in X \mid f(j_1) = f(j_2) = n\}$$

נבחין, כי זה איחוד של קבוצות בסיסיות פתוחות, ולכן פתוח. ולכן P_1 סגורה. באופן דומה P_2 סגורה.

המטרה כעת: לא ניתן להפריד את P_1 מP_2 בפתוחות זרות.

נניח בשלילה $P_1 \subset U$, $P_2 \subset V$ פתוחות זרות. נבנה סדרה $\{j_n\}_{n=1}^\infty$ של איברים שונים ב J ופתוחות $\{u_i\}_{i=1}^\infty$ מוכלות כולן ב U באופן הבא:

נבנה את U_1: קיים n_1 ואינדקסים $j_1, \ldots, j_{n_1}$ שונים בJ כך שכל פונקציה $f : J \to \mathbb{N}$ מקיימת: $f(j_1) = f(j_2) = \ldots = f(j_{n_1}) = 1$ נמצאת בU_1.

סימון: תהי $B \subset J$ קבוצה סופית, ויהיו $\{n_b\}_{b \in B}$ אוסף איברים ב$\mathbb{N}$ כך שלכל $b \in B$ אזי נסמן:

$$Y\left(B, \{n_b\}_{b \in B}\right) = \{f : J \to \mathbb{N} \mid \ f(b) = n_b \ \forall b \in B\}$$

זוהי פתוחה בסיסית.

כלומר:

$$U_1 = Y\left(\{j_\alpha\}_{\alpha=1}^{n_1}, f(j_\alpha) = 1\right)$$

מדוע קיימת קבוצה B כזו? (כלומר, שעבורה $U_1 \subset U$).

נקח את הפונקציה הקבוע $f : J \to \mathbb{N}$, $\forall j \ f(j) = 1$. ואז קיימת קבוצה סופית B כך ש $X(f,B) \subset U$ כי $f \in P_1 \subset U$ ו U פתוחה לכן מכילה קבוצה בסיסית סביב f.

בניית U_2' כעת נגדיר f (חדשה) ע"י:

$$f(j_\alpha) = \begin{cases} \alpha & 1 \le \alpha \le n \\ 1 & \text{אחרת} \end{cases}$$

כעת קיימת קבוצה בסיסית:

$$B_2 = \{j_1, \dots, j_n, j_{n+1}, \dots, j_{n_2}\}$$

$(n_1 < n_2)$.

$$U_2 = Y \left(B_2, \begin{array}{l} \text{אינדקסים קודמים} \begin{cases} f(j_1) = 1 \\ \vdots \\ f(j_{n_1}) = n_1 \end{cases} \\ \text{אינדקסים חדשים} \begin{cases} f(j_{n_1+1}) = 1 \\ \vdots \\ f(j_{n_2}) = 1 \end{cases} \end{array} \right)$$

המוכלת כולה ב U.

נניח כי בנינו $f = f_k$ $(k \ge 1)$ ואינדקסים $n_1 < n_2 < \ldots < n_{k-1}$, ואינדסקים מתאימים: $j_1, \dots, j_{n_{k-1}}$ בJ. בונים $n_{k-1} < n_k$ ואינדקסים נוספים (כולם שונים זה מזה)

$$\underbrace{j_1, \dots, j_{n_{k-1}}}_{\text{הישנים}}, \underbrace{j_{n_{k-1}+1}, \dots, j_{n_k}}_{\text{החדשים}}$$

$$f_k(j_\alpha) = \begin{cases} \alpha & 1 \le \alpha \le n_{k-1} \\ 1 & n_{k-1} < \alpha \le n_k \end{cases}$$

כך ש:

$$U_n = Y \left(B_2, \begin{array}{l} \text{אינדקסים קודמים} \begin{cases} f(j_1) = 1 \\ \vdots \\ f\left(j_{n_{k-1}}\right) = n_{k-1} \end{cases} \\ \text{אינדקסים חדשים} \begin{cases} f\left(j_{n_{k-1}+1}\right) = 1 \\ \vdots \\ f(j_{n_k}) = 1 \end{cases} \end{array} \right)$$

מוכלת בU.

מדוע קיימת קבוצה כזאת? כדי להראות שיש סדרה כזו של אינדקסים חדשים, נגדיר את $f_k : J \to \mathbb{N}$ באופן הבא:

$$f_k(j) = \begin{cases} \alpha & j = j_\alpha, \quad 1 \le \alpha \le n_{k-1} \\ 1 & \text{אחרת} \end{cases}$$

פונקציה כזו היא בוודאי ב P_1. והקבוצה הבסיסית: $X\left(f_k, \{j_\alpha\}_{\alpha=1}^{n_k}\right) \subset U$ מוכלת בU ונותן לכן באינדוקציה עוד אינדקסים ואת f_{k+1}.

בכל סדרת הבנויות האלה, נבחרת קבוצה בת מנייה של אינדקסים. ובכל קבוצה U_k כזו האינדקסים האחרים יכולים להיות כל דבר, בפרט 2. נתבונן בפונקציה:

$$f(j_\alpha) = \begin{cases} \alpha & 1 \le \alpha < \infty \\ 2 & \text{אחרת} \end{cases}$$

כל ערך $2 \neq$ מתקבל פעם אחת ולכן היא ב P_2 ולכן יש לg סביבה פתוחה בסיסית W המוכלת בפתוחה V (אשר מכילה את P_2). הסביבה הזו תחתוך את U_k־ים ממקום מסויים (כי רק מספר סופי נקבעים) נקבעים בW. אבל $\varnothing = V \cap U \supset W \cap U_k$ סתירה.

הערה 5.2.24 הבנייה הזו עדינה מאוד. גם הבנייה בתרגול עם Ω היא עדינה. ואלו הדוגמאות הפשוטות ביותר הידועים למרחבי T_3 שאינם T_4. אחת הסיבות מדוע הדוגמאות מסובכות היא כי המרחבים "סבירים" הם נורמליים (מטריים, אורדינלים = קבוצות סדורות היטב) הנה עוד משפט בכיוון הזה:

משפט 5.2.25

יהי X רגולרי עם בסיס בן מנייה, אז X נורמלי.

הוכחה: יהיו A, B סגורות זרות נרצה להפריד אותן בפתוחות זרות.

לכל $x \in B$ ניתן להפריד את x מA בפתוחות זרות . סימטרית כל x בA ניתן להפריד מB בפתוחות זרות אבל צריך משהו עדין יותר.

ל$x \in A$ נבחר סביבה פתוחה בסיסית V כך ש $\overline{V}$ אינה חותכת את B.

מכיוון שV בבסיס יש רק מספר בן מנייה V־ים מופיעים ־ נסמן $\{V_i\}_{i=1}^{\infty}$ כל $\overline{V_i}$ זרה ל B, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} V_i$ מכסה את A.

באופן סימטרי, יש סדרה $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ של פתוחות בסיסיות כך ש $\overline{W_i}$זר לA ו $B \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} W_i$, אבל עדיין ייתכן:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} V_i\right) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} W_i\right)$$

אינו ריק.

נראה כי ניתן לתקן את U_i, V_i כך שעדיין $A \subset \bigcup V_i^{\text{חדש}}$ מכסה את A, $B \subset \bigcup\limits_i W_i$ פתוחות זרות.

נגדיר לכל $n \ge 1$, $V_n' = V_n - \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{W_i}$, ונגדיר: $W_n' = W_n - \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i}$. וכעת נגדיר: $V = \bigcup_n V_n'$ ו: $W = \bigcup\limits_n W_n'$ ונראה כי הן פתוחות זרות המפרידות את A מB.

V_n' פתוחה מהגדרתה (הורדה של מספר סופי של סגורות מפתוחה) וכן גם W_n' . כמו כן: $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} V_n'$ מכיל את A כי $a \in A$ שייך לאיזשהו V_i אבל לא שייך לשום $\overline{W_j}$. באופן סמטרי $\bigcup\limits_n W_n'$ מכיל את B.

כמו כן, $\left(\bigcup\limits_n W_n'\right) \cap \left(\bigcup\limits_n V_n'\right) = \varnothing$ כי כל איבר חיתוך היא איזשהו $W_m' \cap V_n'$ בה"כ $m \le n$, $W_m' = W_m - \bigcup\limits_{i=1}^{m} \overline{V_i}$, $V_n' = V_n - \bigcup\limits_{i=1}^{n} \overline{W_i}$ סתירה. $x \in W_m' \subset W_n \subset \overline{W_m}$ ■

דוגמה 5.2.26 הבסיס ל $\mathbb{R}^n$, $\{B(x,r), x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{Q}^n\}'$, הוא בן מנייה.

פרק 6

קשירות

הגדרה 6.0.27 מרחב טופולוגי X הוא קשיר אם לא ניתן לכתוב אותו כאיחוד זר $X = A \cup B$ כאשר A, B פתוחות לא ריקות (אפשר גם A, B סגורות).

טענה 6.0.28

תנאים שקולים לקשירות:

1. לא קיים פירוק $X = A \cup B$ כאשר A, B סגורות, זרות ולא ריקות.
2. לא קיימת העתקה רציפה ועל $f : X \to \{0,1\}$ כש $\{0,1\}$ עם הטופולוגיה הדיסקרטית.

הוכחה: ■

1. לוקחים $U = X - A$, $V = X - B$ או: $A = X - U$, $B = X - V$.
2. אם קיים פירוק $X = U \cup V$ נגדיר:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in U \\ 1 & x \in V \end{cases}$$

ואם קיימת $f : X \to \{0,1\}$ כנ"ל נגדיר $U = f^{-1}(\{0\})$ ו: $V = f^{-1}(\{1\})$.

דוגמה 6.0.29 מרחב דיסקרטי עם שתי נקודות לפחות אינו קשיר.

דוגמה 6.0.30 מרחב עם הטופולוגיה הטריוויאלית קשיר.

דוגמה 6.0.31 קטע ב $\mathbb{R}$ הוא תמיד קשיר. **הוכחה:** שכן את $\{0,1\}$ ב $\mathbb{R}$ (טופולוגיית תת־הרחב הזה היא דיסקרטית). אם בשלילה $f : (\text{קטע}) \to \{0,1\}$ היא על, נחשוב על f כפונקצייה ל$\mathbb{R}$ ונקבל סתירה ממשפט ערך הביניים. ■

6.1 תכונות בסיסיות של קשירות

משפט 6.1.1

1. תמונה רציפה של מרחב טופולוגי קשיר היא קשירה.
2. הסגור $\overline{A}$ של קבוצה קשירה A הוא קשיר.
3. יהי $\{A_\alpha\}$ אוסף של תתי־מרחבים של מרחב טופולוגי X. נניח כי כל A_α קשיר ו $\bigcap_\alpha A_\alpha \neq \varnothing$ אזי $\bigcup_\alpha A_\alpha$ קשיר.
4. מכפלת מרחבים טופולוגיים קשירים היא קשירה ואם מכפלת מרחבים טופולוגיים לא ריקים קשירה, כל אחד מהם קשיר.

הוכחה:

1. בהינתן $f: X \to Y$ רציפה, X קשיר נרצה להראות כי $f(x)$ קישרה. נחליף את Y ב$f(x)$ ונניח ש f היא על. (מותר - $f(x)$ עם טופולוגיית תת־המרחב). אם בשלילה $f(X)$ אינה קשירה, נכתוב $f(x) = U \cup V$ כש U, V פתוחות זרות לא ריקות. אזי $X = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$ ואלה פתוחות זרות ולא ריקות (כי f על).
2. נניח כי $\overline{A} = B \cup C$ כש $B, C \neq \varnothing$ סגורות וזרות אזי: $A = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ וכאן $A \cap B$ ו $A \cap C$ סגורות ב A וזרות. מלמה קודמת:

$$\left(\overline{A \cap B}\right) \cup \left(\overline{A \cap C}\right) = \overline{A} = A \cup B$$

מכיוון ש B, C זרות ו: $\overline{A \cap B} \subseteq B$ ו: $\overline{A \cap C} \subseteq C$ אז מתקיים שיוויון $\overline{A \cap B} = B$ ו: $\overline{A \cap C} = C$ בפרט אילו $A \cap B$ הייתה ריקה גם B הייתה ריקה.

3. תהי פונקציה:

$$f: \bigcup_\alpha A_\alpha \to \{0, 1\}$$

רציפה. נבחר $x_0 \in \bigcap_\alpha A_\alpha$ הצמצום $f|_{A_\alpha}$ רצפיה ומקשירות A_α היא קבועה. לכן:

$$f|_{A_\alpha} = f(x_0) \in \{0, 1\}$$

זה נכון לכל α. אם מכן א $f \equiv f(x_0)$ כלומר קבועה. בפרט, f לא על.

4. נתחיל ממקרה של שני מרחבים X, Y קשירים. תהי $f: X \times Y \to \{0, 1\}$ רציפה, נוכיח שהיא קבועה. יהיו $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ נראה כי:

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$$

נתבונן ב $f|_{X \times \{y_1\}}$. $X \cong X \times \{y_1\}$ לכן מקשירות X גם הוא קשיר ומכן $f|_{X \times \{y_1\}}$ קבועה. באופו אותן $f|_{\{X_1\} \times Y}$ קבועה. לכן: $f(x_2, y_2) = f(x_@, y_1) = f(x_1, y_1)$
נוכיח את המקרה הכללי:
נוכיח את $\Leftarrow$: נניח בשלילה כי X_α אינו קשיר אזי: $X_{\alpha_0} = U \cup V$, כאשר U, V פתוחות זרות לא ריקאות ואז:

$$\prod_\alpha X_\alpha = (U \times Y) \cup (V \times Y)$$

כאשר $Y = \prod_{\alpha \neq \alpha_0} X_\alpha$. זהוא איחוד זר של פתוחות לא ריקות, לכן המכפלה אינה קשירה.
כעת, α סופית, נקבל קשירות $\prod_\alpha X_\alpha$ באינדוקציה על גודל הקבוצה.
נניח כעת מכפלה אינסופית, אם $X_\alpha = \varnothing$ לאיזשהו α אין מה להוכיח ($\varnothing$ קשירה). אם כל $X_\alpha \neq \varnothing$ נבחר $a_\alpha \in X_\alpha$. תהי $I = \{\alpha\}$ קבוצת האינדקס לכל תת קבוצה סופית $S \subset I$ תת המרחב:

$$Y_S = \prod_{\alpha \in S} X_\alpha \times \prod_{\alpha \in I \setminus S} \{a_\alpha\} \subset \prod_{\alpha \in I} X_\alpha$$

הוא קשיר כי הומאומורפי למכפלה סופית של X_α. (הומאומורפיזם של הטלה ושיכון).
כל ה Y_S הם קשירים וכולם נחתכים בנקודה:

$$\prod_\alpha X_\alpha \ni (a_\alpha)_{\alpha\in I}$$

ממשפט שהראינו:

$$\bigcup_{\text{סופית } S\subset I} Y_S = Y$$

Y הוא מרחב קשיר של $\prod_\alpha X_\alpha$ ולכן $\overline{Y}$ קשיר אבל מהגדרת טופולוגיית המכפלה:

$$\prod_\alpha X_\alpha = \overline{Y}$$

(כל פתוחה בסיסית ב $\prod_\alpha X_\alpha$ חותכת איזשהו Y_S).

■

הערה 6.1.2 $\prod_{n=1}^{\infty}\mathbb{R}$ אינה קשירה בטופולויית התיבות (יוכח בתרגיל).

הגדרה 6.1.3 רכיב קשירות: יהי X מרחב טופולוגי, $x\in X$. רכיח הקשירות של x הוא: $\bigcup_{\substack{x\in A\subset X\\ A\text{קשירה}}} A$.

מהמשפט שצוטט זו קבוצה קשירה ולכן היא הקבוצה הקשירה המקסימלית (קיימת כזו) המכילה את x.
בפרט, אם X קשיר, אז מרכיב הקשירות של כל נקודה הוא X. מרכיב הקשירות של כל נקודה סגור כי הסגור שלו קשיר (ומכיל אותו) לכן שווה לו.
נגדיר על X יחס ל: $y,x\in X$. הקשירות שלהם נחתכים ($\iff$ מתלכדים) $\Leftarrow$ זהו יחס שקילות.

למה 6.1.4

מרכיבי קשירות של שתי נקודות זרים או מתלכדים.

הוכחה: אם נחתכים האיחוד שווה לכל אחד מהם. ולכן $X=\bigcup_\alpha C_\alpha$ כאשר C_α מרכיבי הקשירות של נקודות והאיחוד זר. ■

הגדרה 6.1.5 קשיר מקומית: מרחב טופולוגי X יקרא קשיר מקומית בנקודה $x\in X$ אם כל סביבה של x מכילה פתוחה קשירה המכילה את x.

דוגמה 6.1.6 כל מרחב דיסקרטי הוא קשיר מקומית. אבל אם יש בו לפחות 2 נקודות אזי הוא לא קשיר.

דוגמה 6.1.7 מרחב המסרק $\mathbb{R}^2\supset X=[0,1]\times\{0\}\cup\{0\}\times[0,1]\cup\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n}\right\}\times[0,1]$.

טענה 6.1.8

X הוא קשיר אבל אינו קשיר מקומית ב $(0,1)$.

הוכחה: הוכח בתרגול. ■

טענה 6.1.9

במרחב קשיר מקומית, מרכיבי הקשירות פתוחים.

הוכחה: מיידי מההגדרות. ■

הגדרה 6.1.10 מרחב טופולוגי X יקרא קשיר מסילתית. אם לכל $x,y\in X$ קיימת מסילה מ x ל y. כלומר העתקה רציפה $\alpha:[0,1]\to X$ כך ש $\alpha(0)=X$, $\alpha(1)=y$.

הערה 6.1.11 כמובן שכל קטע טוב באותה מידה כמו $[0,1]$

טענה 6.1.12

מרחב קשיר מסילתית הוא קשיר.

הוכחה: יהי X קשיר מסילתית. נניח בשלילה כי אינו קשיר אז קיימת $f : X \to \{0,1\}$ רציפה ועל. נבחר $x \in f^{-1}(0)$ ו: $y \in f^{-1}(1)$. תהי α מסילה מ x לy (קיימת מההנחה).
ולכן ההרכבה רציפה ועל מ $[0,1]$ ל $\{0,1\}$ וזו סתירה. ■

הערה 6.1.13 ההפך אינו נכון. נראה דוגמה בקרוב.

טענה 6.1.14

1. תהי $f : X \to Y$ רציפה. אם X קשיר מסילתית גם התמונה $f(X)$ קשירה מסילתית.
2. מכפלה $\prod_\alpha X_\alpha$ של מרחבים $X_\alpha \neq \varnothing$ קשירה מסילתית אם"ם כל X_α קשיר מסילתית.

הוכחה: ■

1. יהיו $y_1, y_2 \in f(X)$ נבחר $x_1, x_2 \in X$ כך ש $f(x_i) = y_i$. תהי α מסילה ב X מ x_1 ל x_2 אזי $f \circ \alpha$ היא מסילה ב Y מ y_1 ל y_2.
2. נניח כי כל X_α קשיר מסילתית. תהיינה $x = (x_\alpha)_\alpha$ ו: $y = (y_\alpha)_\alpha$ נקודות ב $\prod_\alpha X_\alpha$. נבחר מסילה $\beta_\alpha : [0,1] \to X_\alpha$ (לכל α) המחברת את x_α ל y_α.
$$\beta_\alpha(0) = x_\alpha \quad \beta_\alpha(1) = y_\alpha$$
אזי: $\beta = \times_\alpha \beta_\alpha : [0,1] \to \prod_\alpha X_\alpha$ (כלומר מכפלת הפונקציות) רציפה (כי רציפות לתוך מכפלה $\iff$ רציפות כל הקואורדינטה) ומתקיים $\beta(0) = x$, $\beta(1) = y$ כנדרש.
כיוון שני: אם המכפלה היא קשירה מסילתית אזי נבחר $a_\alpha \in X_\alpha$ ואז לכל $\alpha_0 \in I$ ו: $x_{\alpha_0}, y_{\alpha_0} \in X_{\alpha_0}$ נגדיר:
$$\begin{aligned} x &= (x_{\alpha_0}) \times \prod_{\alpha \neq \alpha_0} a_\alpha \\ y &= (y_{\alpha_0}) \times \prod_{\alpha \neq \alpha_0} a_\alpha \end{aligned}$$
נחבר את x לy במסילה β במכפלה ונטיל אותה על קואורדינטה α_0.

תרגיל: יהיו X_α מרחבים קשירים מקומית, האם $\prod_\alpha X_\alpha$ קשירה מקומית?

דוגמה 6.1.15 מרחב הסינוס: מרחב הסינוס (הגרסה הלא קשירה) הוא דוגמה למרחב שהוא קשיר אבל אינו קשיר מסילתית. $X \subset \mathbb{R}^2$ והוא האיחוד:
$$\{0\} \times [-1,1] \cup \left(t, \sin\frac{1}{t}\right)$$
כאשר $t \in [0,1]$.
$$\begin{aligned} X_1 &= \left\{\left(A, \sin\frac{1}{t}\right) \mid 0 < t \leq 1\right\} \\ X_2 &= \{0\} \times [-1,1] \end{aligned}$$
כאשר $X = X_1 \cup X_2$. שניהם קשירים, כיוון ש X_1 הוא תמונת מסילה $(0,1]$. ואלו $[-1,1]$ עבור X_2.
$$\begin{aligned} t &\mapsto \left(t, \sin\frac{1}{t}\right) \\ t &\mapsto (0,t) \end{aligned}$$

טענה 6.1.16

X קשיר.

נוכיח זאת בעזרת הלמה הבאה:

למה 6.1.17

$X = \overline{X_1}$.

הוכחה: ההכלה $\overline{X_1} \subset X$ אם $\left(t_n, \sin\frac{1}{t_n}\right) \to (a,b) \in \mathbb{R}^2$ אזי $t_n \to a$ ונפריד בין שני מקרים. אם $a \neq 0$ אזי בהכרח $\sin\frac{1}{t_n} = \sin\frac{1}{a}$ (מרציפות הסינוס). ולכן הגבול ב X_1.

אם $a = 0$ אזי: $1 \geq \left|\sin\frac{1}{t_n}\right|$ ולכן הגבול $[-1,1] \ni \lim\limits_{n\to\infty} \sin\frac{1}{t_n} = b$.

ולכן הגבול $X_2 \ni \lim\limits_{n\to\infty}\left(t_n, \sin\frac{1}{t_n}\right)$. בכל מקרה הגבול ב X.

נוכיח הכלה הפוכה. יספיק להראות אם $-1 \leq b \leq 1$ אזי קיימים $t_n \to 0$ כך ש $\sin\frac{1}{t_n} \to b$. נקח את. נגדיר:

$$t_n = \frac{1}{2\pi n + \arcsin(b)}$$

נבחין כי $t_n \to 0$ וכי:

$$\sin\frac{1}{t_n} = \sin(2\pi n + \arcsin(b)) = b$$

ולכן הגבול הוא b. ■

מסקנה 6.1.18

$X = \overline{X_1}$ הוא קשיר מכיוון שהוא סגור של קבוצה קשירה.

נראה כי X אינו קשיר מסילתית. נתבונן במקרה של $(1,\sin 1) \in X_1$ ו: $(0,0) \in X_2$ ונראה שלא ניתן לקשר אותן במסילה ב X. נניח בשלילה כי $\alpha : [0,1] \to X$ רציפה $\alpha(1) = (1,\sin 1)$ ו: $\alpha(0) = (0,0)$.

נכתוב $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$. ממשפט ערך הביניים עבור α_1 קיימות $t_1 > t_2 > t_3 > \dots$ (סדרה $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ יורדת מונוטונית) כך ש $\alpha_1(t_n) = \frac{1}{\pi\left(\frac{1}{2}+n\right)}$.

כעת בהכרח: $\alpha_2(t_n) = \sin\left(\frac{1}{\alpha_1(t_n)}\right) = \sin\left(\pi\left(\frac{1}{2}+n\right)\right) = (-1)^n$. בפרט, כאשר $t \to 0$ (דרך הסדרה t_n) אין ל α_2 גבול. זה גורר כי α אינה רציפה ב$t = 0$ וזו סתירה להנחה.

משפט 6.1.19

המרחבים הטופולוגיים:

1. $(0,1)$ (קטע פתוח)
2. $[0,1]$
3. מעגל היחידה $S^1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\right\}$
4. $[0,1)$

אינם הומאומורפים זה לזה.

הוכחה: 1) אינו הומאומורפי לאחרים כי כשנוציא מ $(0,1)$ נקודה כלשהי המרחב $(0,1)\setminus\{x\}$ אינו קשיר. אבל מכל אחד מהאחרים ניתן להוציא נקודה ($[0,1]-\{0\}$, {נקודה כלשהי} S^1-, $[0,1)-\{0\}$) ולשמור על קשירות.

2), 3) ו 4) אינם הומאומורפים כי מ 2) אפשר להוציא שתי נקודות בדיוק בלי לנתק את הקשירות, וב 3) כל נקודה שנוציא לא תנתק, ואילו ב4) יש בדיוק נקודה אחת שאפשר להוציא בלי לנתק. ■

הגדרה 6.1.20 קשירות מסילתית מקומית: מרחב X יקרא **קשיר מסילתית מקומית** ב־$x \in X$ אם כל סביבה של x מכילה סביבה של x שהיא קשירה מסילתית.

הערה 6.1.21 מרחב טופולוגי קשיר מסילתית מקומית הוא גם קשיר מקומית.

יהי X מ"ט, נגדיר עליו יחס ע"י כך שלכל $x,y\in X$ מתקיים $x\sim y$ אם קיימת מסילה המחברת את x ל־y.

טענה 6.1.22

זהו יחס שקילות.

הוכחה: המסילה הקבועה נותנת רפלקסיביות.

סימטריה - אם α מחברת את x ל־y, אז $\beta(t)=\alpha(1-t)$ מחברת את y ל־x.

טרנזיטיביות - ברור, אבל נראה פורמלית. אם $\alpha:[0,1]\to X$ מקשרת את x ל־y ו־$\beta:[0,1]\to X$ מקשרת את y ל־z, נגדיר $\gamma:[0,1]\to X$ ע"י $\gamma(t)=\begin{cases}\alpha(2t) & t\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\\ \beta(2t-1) & t\in\left[\frac{1}{2},1\right]\end{cases}$.

$\left[0,\frac{1}{2}\right],\left[\frac{1}{2},1\right]$ סגורות ב־$[0,1]$ והצמצומים אליהם הן פונקציות רציפות המסכימות בחיתוך, ולכן מטענה שראינו, גם γ רציפה, ולכן היא מסילה רציפה שמחברת את x ל־z. ■

הגדרה 6.1.23 מחלקת השקילות של יחס זה נקראת **רכיב קשירות מסילתית**.

מההגדרות ברורה הטענה הבאה:

טענה 6.1.24

1. אם X מ"ט קשיר מסילתית מקומית, אז כל רכיב קשירות מסילתית הוא קבוצה פתוחה.
2. יהי X מ"ט קשיר מסילתית מקומית וקשיר, אז X קשיר מסילתית (בפירוק הזר לרכיבי קשירות מסילתית, כולם פתוחים ולכן מקשירות קיים רק רכיב אחד).

6.2 קומפקטיות

תזכורת 6.2.1

- תהי A סגורה וחסומה ב־$\mathbb{R}^n$, אז לכל סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}\subset A$ יש תת־סדרה מתכנסת, $a_{n_k}\to a\in A$.
- הלמה של היינה־בורל: מכל כיסוי פתוח של קבוצה סגורה וחסומה ניתן להוציא כיסוי סופי.

כל אחת משתי התכונות הנ"ל מאפיינת את הקבוצות הסגורות וחסומות ב־$\mathbb{R}^n$. מושג הקומפקטיות מכליל אותן.

הגדרה 6.2.2 קומפקטיות, קומפקטיות סדרתית ותכונת החיתוכים הסופיים:

1. מרחב טופולוגי X יקרא **קומפקטי סדרתית** אם לכל סדרה בו יש תת־סדרה מתכנסת, כשנאמר ש־$(x_n)_{n=1}^{\infty}\subset X$ מתכנסת ל־$x\in X$ אם לכל סביבה U של x קיים n_0 כך ש־$x_n\in U$ לכל $n>n_0$.
2. מרחב טופולוגי יקרא **קומפקטי** אם לכל כיסוי פתוח של X, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ (כך ש־U_α פתוחה ב־X לכל $\alpha\in I$ וכן $\bigcup\limits_{\alpha\in I}U_\alpha=X$), קיים תת־כיסוי סופי $U_{\alpha_1},\dots,U_{\alpha_n}$ כך ש־$\bigcup\limits_{k=1}^{n}U_{\alpha_k}=X$.

הערה 6.2.3 ע"י מעבר למשלימים מקבלים מ־2 הגדרה שקולה (בלמה בהמשך).

3. אוסף $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ של תתי־קבוצות של קבוצה X ייקרא **בעל תכונת החיתוכים הסופיים** (FIP - Finite Intersection Property) אם כל חיתוך סופי $\bigcap\limits_{i=1}^{n}V_{\alpha_i}$ אינו ריק.

דוגמה 6.2.4 X קבוצה אינסופית, $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ תת־הקבוצות עם משלים סופי, אזי ל־$\{V_\alpha\}$ יש את תכונת החיתוכים הסופיים.

למה 6.2.5

1. מ"ט X הוא קומפקטי אס"ם לכל אוסף $\{V_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כך ש־V_α סגורה ב־X ועם FIP מתקיים $\bigcap_{\alpha\in I} V_\alpha \neq \varnothing$.
2. (וריאציה) מ"ט X הוא קומפקטי אס"ם לכל אוסף $\{V_\alpha\}$ של תתי־קבוצות כלשהן עם FIP מתקיים $\bigcap_{\alpha\in I} \overline{V_\alpha} \neq \varnothing$.
3. תת־מרחב סגור של מ"ט קומפקטי הוא קומפקטי.
4. אם X מ"ט קומפקטי והאוסדורף, אז כל תת־מרחב קומפקטי שלו סגור.

הוכחה:

1. שקול לקומפקטיות ע"י מעבר למשלימים. נסמן $U_\alpha = X\backslash V_\alpha$. נניח שהמרחב לא קומפקטי. אז יש $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כך ש־ $\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha = X$ אבל לא קיים תת־כיסוי סופי$\Longleftarrow\bigcap_{\alpha\in I} V_\alpha \neq \varnothing$, אבל לכל קבוצה סופית

אם נניח ש־1 לא מתקיים, אזי יש אוסף קבוצות סגורות $\{V_\alpha\}$ כך ש־$\bigcap_{i=1}^{n} V_{\alpha_i} \neq \varnothing$ לכל $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}$ סופית, אך $\bigcap_{\alpha\in I} V_\alpha = \varnothing$.
אזי $\bigcup_\alpha U_\alpha = X$ הוא כיסוי פתוח של X שאין לו תת־כיסוי סופי.

■

הגדרה 6.2.6 קומפקטיות סדרתית: מרחב טופולוגי X יקרא קומפקטי סדרתית אם לכל סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset X$ קיימת תת־סדרה מתכנסת: $(x_{n_k})_{k=0}^{\infty}$.

הגדרה 6.2.7 קומפקטיות של נקודות הצטברות: מרחב טופולוגי X יקרא בעל תכונת קומפקטיות של נקודות הצטברות לכל קבוצה אינסופית ב X יש נקודת הצטברות.

נקודת הצטברות של תת קבוצה A במרחב טופולוגיה X היא נקודה $y \in X$ כך שכל סביבה שלה מכילה נקודה $y \neq a \in A$.

משפט 6.2.8

גם קומפקטיות וגם קומפקטיות סדרתית (כל אחת לחוד) גוררות קומפקטיות של נקודות הצטברות.

משפט 6.2.9

במרחב מטרי, תכונות אלה שקולות.

טענה 6.2.10

1. תמונה רציפה של מרחב טופולוגי קומפקטי היא קומפקטית.
2. תת קבוצה סגורה במרחב טופולוגי קומפקטי היא קומפקטית.
3. תת מרחב קומפקטי של מרחב טופולוגי האוסדורף, סגור בו.

הוכחה:

1. תהי $f : X \to Y$ רציפה. X קומפקטי. יהי $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח של $f(X)$. מההגדרה: $W_\alpha \cap f(X) = U_\alpha$ כש W_α פתוחה ב Y ואז:

$$f^{-1}(U_\alpha) = f^{-1}(W_\alpha)$$

פתוחות ומכסות את X ולכן יש תת כיסוי סופי $X = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(W_{\alpha_i})$. ואז: $f(X) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} W_{\alpha_i}\right) = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$ תת כיסוי סופי ל $f(X)$ כנדרש.

2. יהי X מרחב טופולוגי קומפקטי. $Y \subset X$ סגורה. יהי $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ כיסוי פתוח ל Y. שוב נכתב $U_\alpha = Y \cap W_\alpha$ כש W_α פתוחות ב X אזי:

$$\left(\bigcup_\alpha W_a\right) \cup (X - Y)$$

הוא כיסוי פתוח של X. נוציא ממנו תת כיסוי סופי $\bigcup_{i=1}^{n} W_{\alpha_i} \cup (X-Y)$ אזי: $Y \subset \bigcup_{i=1}^{n} W_{\alpha_i}$ ולכן:

$$Y = Y \cap (W_{\alpha_i}) = \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$$

3. יהי X מרחב טופולוגי האוסדורף ותהי $Y \subset X$ קומפקטית. נוכיח $X-Y$ פתוחה. תהי $x \in X-Y$ לכל $y \in Y$ יש פתוחות זרות $V_{x,y}, U_{x,y}$ כך ש $x \in U_{x,y}$ ו: $y \in V_{x,y}$ (בגלל האוסדורף). $\bigcup_{y \in Y} V_{x,y}$ מכסה את Y והוא כיסוי פתוח שלו. (אנו מתכוונים ל $\bigcup (V_{x,y} \cap Y)$) לכן, מקומפקטיות Y קיים תת־כיסוי סופי $\{V_{x,u_i}\}_{i=1}^{n}$ אשר מכסה את Y. ואז: $\bigcup_{i=1}^{n} V_{x,y_i}$ זר ל $U_x = \bigcap_{i=1}^{n} U_{x,y_i}$. U_x פתוחה וזרה ל Y בסביבה של x ולכן $X-Y$ פתוחה. כלומר Y סגורה כנדרש.

■

כעת נוכיח את המשפט ממקודם:

משפט 6.2.11

גם קומפקטיות וגם קומפקטיות סדרתית (כל אחת לחוד) גוררות קומפקטיות של נקודות הצטברות.

הוכחה: נראה כי קומפקטיות סדרתית גוררת קומפקטיות של נקודות הצטברות.

יהי X קומפקטי סדרתית, ותהי $A \subset X$ תת־קבוצה אינסופית.

נבחר סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ שכל $a \in A$ וכולן שונות זו מזו. קיימת ל $\{a_n\}$ תת סדרה מתכנסת $a_{n_k} \to x \in X$. צריך להוכיח כי בכל סביבה U של x יש נקודה של A השונה מx. אבל מהנתון קיים k_0 כך שלכל $k_0 \leq k$, $a_{n_k} \in U$.

מכיוון ש a_{n_k} שונות זו מזו מתקיים $a_{n_k} \neq x$ עבור k מספיק גדול. כנדרש.

נראה כי קומפקטיות גוררת קומפקטיות של נקודות הצטברות.

יהי X קומפקטי. נניח בשלילה כי יש בו קבוצה אינסופית A ללא נקודות הצטברות. נוציא סדרה $\{a_n \in A\}_{n=1}^{\infty}$. של נקודות שונות. בוודאי של $\{a_n\}$ אין נקודות הצטברות.

נטען כי הקבוצה $A_0 = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סגורה מכיוון שהמשלים שלה פתוח. בהינתן $b \notin A_0$ אזי מכיוון שאין ל A_0 נקודות הצטברות, אזי יש ל B סביבה זרה ל A_0 אחרת היא נקודת הצטברות של A_0 (בוודאי כל נקודה של A_0 שונה מ b). מכיוון ש A_0 סגורה ב X שהוא קומפקטי, אז A_0 קומפקטית.

אותה הוכחה ש A_0 סגורה עובדת גם עבור $A_0 - \{a\}$ לכל $a \in A_0$. ואז נקבל כיסוי פתוח:

$$A_0 = \bigcup_{a \in A_0} \{a\} = \bigcup_{a \in A_0} (X - (A_0 - \{a\})) \cap A_0$$

כלומר, אנו חותכים קבוצה פתוחה ב X עם A_0 לכן החיתוך הוא פתוח בטופולוגיה המושרית על A_0 (זה מוכיח כי A_0 דיסקרטית, כל נקודה פתוחה בה). מקומפקטיות יש לכיסוי זה תת כיסוי סופי $\iff$ A_0 עצמה קבוצה סופית. סתירה להנחת השלילה כנדרש. ■

המטרה כעת להוכיח כי למרחב מטרי קומפקטיות שקולה לקומפקטיות סדרית ולקומפקטיות נקודות גבול.

הגדרה 6.2.12 יהי (X,d) מרחב מטרי.
יהי $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ כיסוי ל X נאמר כי $\varepsilon > 0$ הוא מספר לבג (Lebesgue) עבור הכיסוי אם לכל $x \in X$ הכדור $B_\varepsilon(x)$ מוכל באיזשהי U_α.

הערה 6.2.13 אם $0 < \delta < \varepsilon$ ו ε מספר לבג לכיסוי, אז גם δ כזה.

טענה 6.2.14

יהי (X,d) מרחב מטרי קומפקטי סדרתית אזי לכל כיסוי פתוח שלו קיים מספר לבג.

הוכחה: יהי U_α כיסוי פתוח של X. נניח בשלילה שאין לו מספר לבג.

אזי לכל n טבעי (≤ 1) קיימת נקודה $x_n \in X$ כך ש: $B_{\frac{1}{n}}(x_n)$ אינו מוכל בשום U_α.

מההנחה יש ל $\{x_n\}$ תת סדרה מתכנסת $x_{n_k} \to x$ נבחר α כך ש $x \in U_\alpha$. יש כדור $B_\varepsilon(x) \subset U_\alpha$ ($\varepsilon > 0$) פתוח.

ל $k_0 < k$ מתאים $x_{n_k} \in B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x)$ וגם $\frac{2}{\varepsilon} < n_k$ אמ"ם $\frac{\varepsilon}{2} > \frac{1}{n_k}$ וזו סתירה כי:

$$B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k}) \subset B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_{n_k}) \subset B_\varepsilon(x) \subset U_\alpha$$

וזו כמובן סתירה. ■

משפט 6.2.15

הטענות הבאות שקולות למרחב מטרי (X,d):

1. X קומפקטי.
2. X קומפקטי של נקודות הצטברות.
3. X קומפקטי סדרתית.

הוכחה: $1 \Leftarrow 2$: הוכח. זו עובדה כללית למרחבים טופולוגיים.

נראה $2 \Leftarrow 3$: תהי $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה ב X.

מקרה א: הקבוצה $\{x_n\}$ היא סופית. אז יש תת סדרה $(x_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ כך ש $n_k \to \infty$ של אינדקסים שונים n_k . כך ש x_{n_k} סדרה קבועה.

ובוודאי סדרה קבועה היא מתכנסת (לגבול שהיא עצמה).

מקרה ב: הקבוצה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ אינסופית. מההנחה יש לה נקודת הצטברות a $\Leftarrow$ לכל שלם $1 \leq k$ יש $a \neq x_{n_k}$ כך ש $x_{n_k} \in B_{\frac{1}{k}}(a)$. בה"כ נוכל להניח כי n_k מונוטונית עולה ממש ואז $x_{n_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} a$ וקבלנו תת סדרה מתכנסת כנדרש.

לבסו, נראה $1 \Leftarrow 3$:

יהי X מרחב קומפקטי סדרתית. נניח בשלילה כי אינו קומפקטי. זה אומר כי קיים ל X כיסוי פתוח $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ ללא תת כיסוי סופי. יהי $\varepsilon > 0$ מספר לבג עבור $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$. נבנה באינדוקציה על n סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ בX כך ש:

$$\mathrm{d}(x_n, x_m) \geq \varepsilon$$

לכל $1 \leq m,n$ שונים. אם נצליח נסיים. כי אז ל (x_n) לא יכולה להיות תת סדרה מתכנסת בסתירה להנחה ש X קומפקטית סדרתית.

בניית (x_n)**:** x_1 - נקודה כלשהי ב X.

x_2 - $B_\varepsilon(x_1)$ מוכל באיזשהי Y_{α_1} אבל $X \neq U_{\alpha_1}$ (אחרת קיים ל $\{U_\alpha\}$ תת כיסוי סופי מאוד) לכן נוכן לבחור $x_2 \in X - U_{\alpha_q}$. נגיד שבנינו את $x_1,\dots,x_n$, ונבנה את x_{n+1}. מכך ש ε מספר לבג קיימות: $U_{\alpha_1},\dots,U_{\alpha_n}$ כך ש $B_\varepsilon(x_i) \subset U_{\alpha_i}$. אבל $X \neq \bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}$ אחרת קיים ל $\{U_\alpha\}$ תת כיסוי סופי. נבחר $x_{n+1} \in X - \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_{\alpha_i}\right)$ וקבלנו סתירה כנדרש. ■

פרק 7

הכללה של מושגים מאינפי

נרצה להכליל מונחים מאינפי (של כמה משתנים).

7.1 רציפות במידה שווה

הגדרה 7.1.1 יהי (X,d) מרחב מטרי. נאמר כי פונקציה $f:X\to\mathbb{R}$ היא רצפה במידה שווה אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x,y\in X$ כך ש $\mathrm{d}(x,y)<\delta$ מתקיים $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

להגדרה זו אין הכללה טובה למרחבים טופולוגיים (אבל יש הכללה למרחבים אינפורמיים" של מרחבים מטריים שעבורם יש מושג כזה.

7.2 משפטי ויירשטראס

משפט 7.2.1

יהי X מרחב טופולוגי קומפקטי ותהי $f:X\to\mathbb{R}$ רציפה.

1. משפט ויירשטראס ראשון: f חסומה.
2. משפט ויירשטראס שני: f מקבלת את המקסימום והמינימום שלה.
3. תהי d מטריקה על X, אזי f רציפה במידה שווה ביחס אליה.

הוכחה:

1. ל $n\in\mathbb{N}$ כך ש $n\geq 1$. תהי $\mathbb{R}\supset W_n=(-n,n)$. ולכן $f^{-1}(W_n)$ כיסוי פתוח ל X. נוציא תת כיסוי סופי ב $\left(f^{-1}(W_{n_i})\right)_{i=1}^{r}$ ואז $n=\max\limits_{i\leq r}n_i$ וחוסם את $|f|$.
   הוכחה אלטרנטיבית: $f(X)$ קומפקטית ב $\mathbb{R}$ ובפרט חסומה.
2. יהי $M=\sup\limits_{x\in X}f(x)$ (הוא קיים וסופי מהמשפט הראשון), נשתמש בתכונת החיתוכים הסופיים: נתבונן בקבוצה $W_\varepsilon=f^{-1}([M-\varepsilon,M])$ ($\varepsilon>0$) ה $(W_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ הוא אוסף של קבוצות סגורות ב X ויש לו את תכונת הכיסויים הסופיים ולכן (X קומפקטי) יש לו חיתוך לא ריק לכל x בחיתוך הזה $x\in X$ ומקיים $f(x)=M$ וסיימנו. הוכחה זהה למינימום.
   הוכחה אלטרנטיבית: $f(X)$ קומפקטים ב $\mathbb{R}$ ובפרט סגורה!!!
3. יהי (X,d) מרחב מטרי קומפקטי, יהי $\varepsilon>0$ ויהי $\delta>0$ מספר לבג עבור הכיסוי הפתוח:

$$\left\{f^{-1}\left(t-\frac{\varepsilon}{2},t+\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\}_{t\in\mathbb{R}}$$

אם $x,y\in X$ מקיימות $\mathrm{d}(x,y)<\delta$ אזי הן שייכות לאחת מקבוצות הכיסוי ואז $|f(x)-f(y)|$ - מרחב בין שתי נקודות באותו קטע $\left(t-\frac{\varepsilon}{2},t+\frac{\varepsilon}{2}\right)$ ולכן מרחקן קטן מ ε וסיימנו.

■

משפט 7.2.2 משפט טיכונוף

מכפלת מ"ט קומפקטיים היא קומפקטית.

הוכחה: יהיו $\{X_\alpha\}_{\alpha\in I}$ מ"ט קומפקטיים, ויהי $\{F_\beta\}_\beta$ תת־קבוצות של $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ בעלות FIP. נרצה להראות שחיתוך הסגורים אינו ריק.

לצורך כך, נחליף את האוסף $\mathcal{F}=\{F_\beta\}$ באוסף גדול יותר עם אותה תכונה.

נתבונן בכל האוספים המכילים את $\mathcal{F}$ ומקיימים FIP - $Coll=\{\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H},\ldots\}$. כל איבר ב־$Coll$ הוא אוסף תתי־קבוצות של $\prod_\alpha X_\alpha$, מכיל את $\mathcal{F}$, ובעל FIP.

בתוך $Coll$, נאמר כי $\mathcal{G}\le\mathcal{H}$ אם $\mathcal{G}$ הוא תת־אוסף של $\mathcal{H}$, כלומר $\mathcal{G}\subset\mathcal{H}$. ברור כי זה מגדיר יחס סדר חלקי.

תהי $\{\mathcal{G}_\gamma\}$ שרשרת לא־ריקה ב־$Coll$. נתבונן ב־$\mathcal{G}^*=\bigcup_\gamma \mathcal{G}_\gamma$. זהו בבירור אוסף של תתי־קבוצות של $\prod_\alpha X_\alpha$. יש לו את תכונת החיתוכים הסופיים - אם $F_1,\ldots,F_n\in\mathcal{G}^*$, אז $F_i\in\mathcal{G}_{\gamma_i}$, ואז עבור $\gamma=\max_{1\le i\le n}\gamma_i$ יתקיים מתכונת השרשרת ש־$\mathcal{G}_{\gamma_i}\subset\mathcal{G}_\gamma$, כלומר כל F_i ב־$\mathcal{G}_\gamma$, שיש לו את תכונת החיתוכים הסופיים. לכן $\mathcal{G}^*\in Coll$.

לפיכך, מהלמה של צורן, קיים ב־$Coll$ איבר מקסימלי, שנסמנו ב־$\mathcal{G}$. המקסימליות גוררת של־$\mathcal{G}$ התכונות הבאות:

1. תהי $U\subset\prod_\alpha X_\alpha$ המכילה איזשהו $G_\beta\in\mathcal{G}=\{G_\beta\}_\beta$, אזי גם U ב־$\mathcal{G}$.
2. חיתוך סופי $\bigcap_{i=1}^n G_{\beta_i}$ של $G_{\beta_i}\in\mathcal{G}$ הוא גם ב־$\mathcal{G}$
3. קבוצה $V\subset\prod_\alpha X_\alpha$ החותכת כל G_β היא גם ב־$\mathcal{G}$, כי $V\cap\left(\bigcap_{i=1}^n\mathcal{G}_{\beta_i}\right)\neq\varnothing$.

כעת נסמן ב־π_α את ההטלה $\pi_\alpha:\prod_{\alpha'}X_{\alpha'}\to X_\alpha$. תהי $G\subset\prod_\alpha X_\alpha$, נתבונן ב־$\pi_\alpha^{-1}(\pi_\alpha(G))$.

אם $G\in\mathcal{G}$, אזי $\pi_\alpha^{-1}(\pi_\alpha(G))$ מכילה את G ולכן ב־$\mathcal{G}$.

$\pi_\alpha^{-1}(\pi_\alpha(G))=\pi_\alpha(G)\times\prod_{\alpha'\neq\alpha}X_{\alpha'}$ היא תיבה גדולה. לכן, ל־α קבוע יש לאוסף $\{\pi_\alpha^{-1}(\pi_\alpha(G))\}_{G\in\mathcal{G}}$ את תכונת החיתוכים הסופיים (כי לתיבות הגדולות באופן כללי יש תכונה זו). ולכן גם לאוסף $\{\pi_\alpha(G)\}_{G\in\mathcal{G}}$ (כש־α קבוע) יש את תכונת החיתוכים הסופיים. זהו אוסף של תתי־קבוצות של X_α, שהוא קומפקטי, ולכן $\bigcap_{G\in\mathcal{G}}\overline{\pi_\alpha(G)}\neq\varnothing$.

נשתמש באקסיומת הבחירה - לכל α, נבחר $x_\alpha\in\bigcap_{G\in\mathcal{G}}\overline{\pi_\alpha(G)}$. כל סביבה של x_α ב־X_α תחתוך את $\pi_\alpha(G)$ לכל $G\in\mathcal{G}$.

נסמן $x=(x_\alpha)_{\alpha\in I}$, כך ש־$x\in\prod_\alpha X_\alpha$. נוכיח ש־$x\in\bigcap_{G\in\mathcal{G}}\overline{G}$ ונסיים.

כל סביבה של x ב־$\prod_\alpha X_\alpha$ מכילה תיבה פתוחה גדולה $B=\prod_{i=1}^n U_{\alpha_i}\times\prod_{\alpha\notin\{\alpha_1,\ldots,\alpha_n\}}X_\alpha$ ש־X שייך אליה. מספיק להראות שכל B חותכת כל $G\in\mathcal{G}$, ואז $x\in\overline{G}$ לכל $G\in\mathcal{G}$.

$B=\bigcap_{i=1}^n\underbrace{\left(U_{\alpha_i}\times\prod_{\alpha\neq\alpha_i}X_\alpha\right)}_{B_i}$, ולכל i מתקיים $B_i\cap G\neq\varnothing$ (B_i היא סביבה של x לכל $1\le i\le n$, U_{α_i} היא סביבה של x_{α_i} לכל $1\le i\le n$, ולכן $\pi_{\alpha_i}(G)\cap U_{\alpha_i}\neq\varnothing$ לכל $G\in\mathcal{G}$, ולכן $G\cap B_i\neq\varnothing$ לכל G), ומתנאי 3 סיימנו. ■

טענה 7.2.3

$X=\prod_{i=1}^\infty[0,1]$ אינו קומפקטי בטופולוגית התיבות.

הוכחה: הקבוצות $\left(\frac13,1\right]$ ו־$\left[0,\frac23\right)$ פתוחות ב־$[0,1]$. לכל תת־קבוצה $A\subset\mathbb{N}$ נגדיר $U_A=\prod_{i\in A}\left[0,\frac23\right)\times\prod_{i\in\mathbb{N}\setminus A}\left(\frac13,1\right]$.

מכיוון ש־$\left[0,\frac23\right),\left(\frac13,1\right]$ כיסוי פתוח של $[0,1]$, אזי $X=\bigcup_{A\subset\mathbb{N}}U_A$ ו־$\{U_A\}_{A\subset\mathbb{N}}$ כיסוי פתוח בטופולוגית התיבות, אך נראה שאין לו כיסוי פתוח בטופולוגית התיבות. בהינתן $A_1,\ldots,A_r$ אז $\bigcup_{k=1}^r U_{A_k}\neq X$.

אם $B_i = A_i^c$, נתבונן בקבוצה $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \subset X$. אזי $\{P_{A_i}\} = U_{A_i} \cap \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, כאשר $P_{A_i} = (X_{A_i,n})_{n=1}^{\infty}$ עם $X_{A_i,n} = \begin{cases} 0 & n \in A \\ 1 & n \notin A \end{cases}$.

ולכן $\{0,1\} \cap \bigcup_{k=1}^{r} U_{A_k}$ יכיל לכל היותר r נקודות. ■

משפט 7.2.4

מרחב קומפקטי האוסדורף הוא נורמלי.

הוכחה: היתה הוכחה בתרגיל 9 שאלה 1. נתחיל בהוכחת רגולריות.

תהי $A \subset X$ קבוצה סגורה ו־$x \in X \backslash A$ נקודה, נפרידן בפתוחות זרות. לכל $a \in A$, נבחר V_a פתוחה כך ש־$a \in V_a$, וכן U_a פתוחה כך ש־$x \in U_a$, ו־V_a, U_a זרות.

מההנחות נובע כי A קומפקטית, ולכן מספר סופי של V_a יכסו את A ($\{V_{a_i}\}_{i=1}^{n}$), כאשר $V = \bigcup_{i=1}^{n} V_{a_i}$ פתוחה המכילה את A, וזרה לפתוחה $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{a_i}$ המכילה את x.

כעת נוכיח נורמליות - תהיינה A, B סגורות זרות ב־X. לכל $x \in B$ נבחר פתוחות זרות U_x, V_x כך ש־$x \in U_x$, $A \subset V_x$. מספר סופי $\{U_{x_i}\}_{i=1}^{n}$ מכסות את B. תהיינה $V = \bigcap_{i=1}^{n} V_{x_i}$, $U = \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$. אלו פתוחות זרות כך ש־$A \subset V$, $B \subset U$. ■

משפט 7.2.5

יהי X קומפקטי, Y האוסדורף, $f : X \to Y$ חח"ע ורציפה עם טווח צפוף, אז f הומאומורפיזם.

הוכחה: היה בתרגיל 9. ■

7.2.1 קומפקטיות מקומית

הגדרה 7.2.6 מ"ט X קומפקטי מקומית במובן החלש אם לכל נקודה בו קיימת סביבה קומפקטית.
מ"ט X קומפקטי מקומית במובן החזק אם לכל $x \in X$ וסביבה U של x, קיימת סביבה קומפקטית V כך ש־$x \in V \subset U$.

ברור כי מתקיים:

1. X קומפקטי מקומית במובן החלש $\Longleftarrow$ X קומפקטי.
2. X קומפקטי מקומית במובן החזק $\Longleftarrow$ X קומקפטי מקומית במובן החלש.

משפט 7.2.7

במ"ט האוסדורף, קומפקטיות מקומית (שנראה שהסוגים שקולים) גוררת שהמרחב רגולרי.

הוכחה: תהי $A \subset X$ סגורה, $x \in X \backslash A$. תהי C סביבה קומפקטית של x. אז C מכילה פתוחה סביב x.

ממשפט שהוכחנו, C היא מ"ט נורמלי. אז יש קבוצות פתוחות ב־C - U', V' - המפרידות את x מ־$A \cap C$, כלומר $x \in U'$, $A \cap C \subset V'$.
נכתוב $V' = W \cap C$ כך ש־W פתוחה ב־X. נבחר פתוחה $U \subset X$ כך ש־$x \in U$ ו־$x \in U \subset U'$.

קיימת U כזו כי C מכילה פתוחה ב־X המכילה את x (מקומפקטיות מקומית במובן החזק), ולכן יכולנו לבחור את U' להיות פתוחה ב־X ולא רק ב־C.

נתבונן ב־$W \cup (X \backslash C)$. זו פתוחה ב־X, מכילה את A וחותכת את C ב־$W \cap C = V'$, ובפרט היא זרה ל־U. ■

משפט 7.2.8

במ"ט האוסדורף, קומפקטיות במובן החלש $\Leftrightarrow$ קומפקטיות במובן החזק.

הוכחה: חזק $\Longleftarrow$ חלש מיידית. נוכיח שחלש $\Longleftarrow$חזק.

תהי $x \in X$, תהי C סביבה קומפקטית של x, ותהי U סביבה של x. מכיוון ש־C קומפקטית ו־X האוסדורף, C סגורה ב־X. בה"כ U פתוחה ב־X, ולכן $C \backslash U$ סגורה ב־X.

הראינו בשבוע שעבר ש־X רגולרי, ולכן קיימת סביבה פתוחה V של x כך ש־$\overline{V} \subset U$. כעת $C \cap \overline{V}$ סגורה בקומפקטית ולכן קומפקטית, סביבה של x כחיתוך שתי סביבות, וכמובן מוכלת ב־U. ■

7.3 מרחבי מנה

הערה מקדימה כללית:

הערה 7.3.1 תהי $f : X \to Y$ העתקה בין קבוצות. אזי אם $\mathcal{U}$ טופולוגיה על X, יש טופולוגיה "טבעית" על Y המוגדרת ע"י כך ש־$V \subset Y$ תיקרא פתוחה $\Leftrightarrow$ $f^{-1}(V)$ פתוחה ב־X.
טופולוגיה זו "טבעית" במובן הבא:

1. f הופכת להיות רציפה
2. רק הקבוצות ההכרחיות לרציפות f שייכות לטופולוגיה זו. במילים אחרות, מכל הטופולוגיות האפשריות על Y שעבורן f רציפה, זו החלשה ביותר.

הגדרה 7.3.2 טופולוגיה מושרית: נאמר כי טופולוגיה זו על Y **מושרית** מהטופולוגיה $\mathcal{U}$ דרך f.

הגדרה 7.3.3 טופולוגית המנה: המקרה שיעניין אותנו הוא כאשר f היא על Y, ואז נקרא לטופולוגיה המתקבלת על Y **טופולוגיית המנה**.

אז ניתן לחשוב על Y קבוצתית כמנה של X ביחס שקילות - $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$.

הערה 7.3.4 אם R יחס שקילות על קבוצה X, קיימת קבוצת המנה X/R (אוסף מחלקות השקילות), ויש העתקה טבעית $\pi : X \to X/R$ ששולחת נקודה למחלקת השקילות שלה.

דוגמה 7.3.5 $A \subset X$, ונגדיר $x_1 \sim x_2$ אם $(x_1 = x_2) \vee (x_1, x_2 \in A)$.
נאמר כי Y מתקבל מ־X ע"י זיהוי A לנקודה ונסמן $Y = X/A$.
$X = [0,1]\,,\ A = \{0,1\}$.

טענה 7.3.6

ניתן לזהות את X/A עם המעגל S^1.

הוכחה: תהי $\varphi : [0,1] \to S^1$ (כאשר S^1 עם הטופולוגיה המושרית מ־$\mathbb{R}^2$), כך ש־$\varphi(t) = e^{2\pi i t}$.
נסמן ב־$\pi : [0,1] \to {}^{[0,1]}/_{\{0,1\}}$ את העתקת המנה ששולחת כל איבר למחלקת השקילות שלו. היא רציפה, על וכמעט חח"ע - $\pi(0) = \pi(1)$, ובשאר התחום היא חח"ע.
מכיוון ש־$\varphi(0) = \varphi(1)$, ברור כי קיימת העתקה יחידה כקבוצות $\psi : {}^{[0,1]}/_{\{0,1\}} \to S^1$ כך ש־$\varphi = \psi \circ \pi$.
אנו נראה כי ψ הומאומורפיזם. היא בוודאי חח"ע ועל. תהי $U \subset S^1$ פתוחה. יש להראות כי $\psi^{-1}(U)$ פתוחה במרחב המנה. זה שקול לכך ש־$\pi^{-1}\left(\psi^{-1}(U)\right) = \varphi^{-1}(U)$ פתוחה ב־$[0,1]$. זה נכון כי φ רציפה.
מרחב המנה הוא גם קומפקטי:

למה 7.3.7

יהי X קומפקטי, R יחס שקילות עליו, אזי X/R קומפקטי.

הוכחה: העתקת המנה רציפה, ותמונה רציפה של קומפקטי היא קומפקטית. ■

לכן ψ חח"ע ועל ורציפה ממרחב קומפקטי למרחב האוסדורף, ולכן היא הומאומורפיזם. ■

מסקנה 7.3.8

1. אם X מ"ט ו־R יחס שקילות, מתקבלת העתקת מנה $\pi : X \to X/R$ שהיא רציפה (מהגדרת טופולוגית המנה). אם Y מ"ט אזי $\psi : X/R \to Y$ רציפה $\Leftrightarrow$ $\psi \circ \pi$ רציפה.
2. העתקה רציפה $\varphi : X \to Y$ היא מהצורה $\varphi = \psi \circ \pi$ עבור $\psi : X/R \to Y$ אם ורק אם קיימת ψ כזו כהעתקה בין קבוצות - במילים אחרות, רציפות ψ אוטומאטית מהגדרת טופולוגית המנה.

משפט 7.3.9

יהי X מ"ט, R יחס שקילות עליו, אזי אם X קומפקטי / קשיר / קשיר מסילתית גם X/R כזה.

הוכחה: תמונה רציפה של כל אחת מתכונות אלו שומרת על התכונה. ■

הערה 7.3.10 זה לא נכון לתכונות ההפרדה! למשל מ"ט דיסקרטי הוא האוסדורף, אבל תחת הטופולוגיה הטריוויאלית איננו כזה.

משפט 7.3.11

יהיו X,Y מ"ט, R יחס שקילות על X, $\pi : X \to X/R$ העתקת המנה. תהי $f : X \to Y$ רציפה.

1. אם לכל $x_1 \sim x_2$ מתקיים $f(x_1) = f(x_2)$ אזי קיימת $\phi : X/R \to Y$ יחידה כך ש־$f = \phi \circ \pi$.
2. אם באותם תנאים X קומפקטי ו־Y האוסדורף ו־f על, וכן $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$, אזי ϕ הומאומורפיזם.

הוכחה: ההוכחה זהה לדוגמה שראינו ומושארת כתרגיל. ■

דוגמה 7.3.12 $[0,1]/\{0,\frac{1}{2},1\}$ הומאומורפי לצורה של 8.

דוגמה 7.3.13 יהי $B_n = B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ כדור היחידה הסגור (בנורמה אוקלידית), ו־$S = S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$.
אזי $B_n/S^{n-1} \cong S^n$ (אינטואיטיבית, כדאי לחשוב על $n = 1,2$).

אפשר לעשות זאת באופן ישיר, אך וריאציה נוחה יותר היא להשתמש בבניית עזר.

יהי $I = [0,1]$, ונביט ב־$G : S^{n-1} \times I \to B_n$ כך ש־$(\vec{x},t) \mapsto t\vec{x}$. העתקה זו משרה הומאומורפיזם $S^{n-1}\times I/S^{n-1}\times\{0\} \cong B_n$. G שולחת את $S^{n-1} \times \{t\}$ הומאומורפית על הספירה ברדיוס t עבור $t > 0$, וממוטטת את $S^{n-1} \times \{0\}$ לראשית. מהמשפט הכללי הקודם, נקבל הומאומורפיזם $S^{n-1}\times I/S^{n-1}\times\{0\} \cong B_n$.

כעת, במקום $0 \in I$ ניתן לקחת כל קטע סגור J ונקודת קצה שלו a - למשל, ניקח $[-1,1]$ ואת הנקודה -1.

אזי $S^{n-1}\times[-1,1]/S^{n-1}\times\{-1\} \cong B_n$. כעת, אם נמוטט לא רק נקודה נוכל להגדיר הומאומורפיזם מפורש.

באופן מפורש נגדיר $F : S^{n-1} \times [-1,1] \to S^n$ ע"י $F((x_1,\ldots,x_n),t) = \left(\sqrt{1-t^2}(x_1,\ldots,x_n),t\right)$ (כאשר $\sum_i x_i^2 = 1$). אזי $\sum_i \left(\sqrt{1-t^2}x_i\right)^2 + t^2 = 1$ (ולכן ההעתקה מוגדרת היטב).

אזי F משרה הומאומורפיזם $S^{n-1}\times[-1,1]/R \cong S^n$.

כלומר, המנה של B^n ב־S^{n-1} (B^n/S^{n-1}) מזדהה עם S^n, כנדרש.

הגדרה 7.3.14 יריעה: מ"ט X נקרא **יריעה ממימד** n אם לכל $x \in X$ קיימת סביבה פתוחה הומאומורפית ל־$\mathbb{R}^n$.
מקובל להוסיף עוד שני תנאים טכניים:

1. X האוסדורף
2. יש לטופולוגיה בסיס עם מספר בן מנייה של פתוחות בסיסיות.

דוגמה 7.3.15 $\mathbb{R}^n$ עם בסיס לטופולוגיה שהוא כדורים פתוחים עם רדיוס ומרכז רציונליים.

משפט 7.3.16

משפט קשה בטופולוגיה אלגברית - המימד n מוגדר באופן יחיד (ראינו עבור $n = 1$, נראה בהמשך הקורס עבור $n = 2$).

כמה עובדות מיידיות:

1. קבוצה פתוחה ביריעה ממימד n היא יריעה ממימד n
2. מכפלת יריעה ממימד m ביריעה ממימד n היא יריעה ממימד $n+m$
3. הספירה S^n היא יריעה ממימד n (למשל כי לכל $x \in S^n$ מתקיים $\mathbb{R}^n \cong S^n \setminus \{x\}$).

עוד כמה משפטים לא קלים:

משפט 7.3.17

1. יריעה ממימד 1 הומאומורפית ל־$\mathbb{R}$ או ל־S^1.
2. יש מיון מלא (עד כדי הומאומורפיזם) ליריעות דו־מימדיות קומפקטיות
3. במובן מסוים (ומסובך יותר), גם ליריעות תלת־מימדיות קומפקטיות.

דוגמה 7.3.18

- כל קבוצה פתוחה ביריעה היא יריעה מאותו מימד.
- מכפלת יריעות היא יריעה שמימדה הוא סכום המימדים.
- נסמן $I=[0,1]$, ונגדיר יחס שקילות ־ לכל t, $(0,t)\sim(1,t)$, ולכל δ, $(\delta,0)\sim(\delta,1)$. נסמן יחס זה ב־$(\sim')$.
  קל להשתכנע כי אם נגדיר על I יחס שקילות $0\sim 1$ (שנסמנו ב־$(\text{"}\sim\text{"})$), אז $\delta'\times\delta'={}^{I\times I}/_{\sim'}={}^{I}/_{\sim\text{"}}\times{}^{I}/_{\sim\text{"}}$.
- S^n יריעה ממימד n. כל חצי ספירה פתוחה ניתן להטיל על הכדור הפתוח B_n, שהוא הומאומורפי ל־$\mathbb{R}^n$ (כל נקודה בספירה יושבת על חצי־ספירה פתוחה).
  - כדור פתוח הומאומורפי ל־$\mathbb{R}^n$ לפי כך שעבור $x\in B_n(0)$ מתקיים $x\mapsto\begin{cases}\frac{x\tan(\|x\|)}{\|x\|} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$.

הערה 7.3.19 בכל הדוגמאות מתקיימים גם שני התנאי הטכניים שציינו ־ האוסדורף + בסיס בן מנייה.

הגדרה 7.3.20 המרחב הפרוייקטיבי: ${}^{S^n}/_{\sim}=\mathbb{RP}^n$ כאשר $x\sim(-x)$ (נקודות אנטיפודיות).

המרחב הפרוייקטיבי הוא יריעה n מימדית (הוא האוסדורף כי אפשר לקחת סביבות מספיק קטנות על המעגל).

7.4 קבוצת קנטור

C_n הוא איחוד סופי של קטעים סגורים המוכלים ב $[0,1]$.
$C_0=[0,1]$
C_{n+1}= מכל קטע $[a,b]$ ב C_n מויאים את השליל האמצעי: $\left[a,a+\frac{b-a}{3}\right]\cup\left[a+\frac{2(b-a)}{3},b\right]$.
קבוצת קנטור היא:

$$C=\bigcap_{n=0}^{\infty}C_n$$

הוכחנו כי:

1. $x\in[0,1]$ הוא ב C אם"ם בפיתוח שלו לבסיס 3 (כלומר $x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{3^n}$ כאשר $a_n\in\{0,1,2\}$ ולא לוקחים פיתוחים סופיים פרט ל $x=0$) רק הספרות $0,2$ משתתפות.
2. C קומפקטית מעוצמת הרצף. כל מרכיב קשירות של C הוא נקודה אחת.

משפט 7.4.1

$C\cong\{0,1\}^{\mathbb{N}}$

הוכחה: נבנה $\varphi:\{0,1\}^{\mathbb{N}}\to C$ ע"י:

$$\varphi(a)=\varphi\left((a_n)_{n=1}^{\infty}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2a_n)}{3^n}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{e^n}$$

כאשר $a=(a_n)_{n=1}^{\infty}\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, כלומר $a_n\in\{0,1\}$.

ברור כי מתקבלים הפיתוחים של אברי C בבסיס 3 וכי העתקה חח"ע (שני פיתוחים עם ספרות $2,0$ בלבד אינם יכולים לתת אותו מספר ממשי).
בנוסף φ רציפה כי אם n הספרות הראשונות קבועות (כלומר אם $a,b\in\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ומתקיים $a_k=b_k$ לכל $n\geq k$) אזי:

$$\underbrace{2\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{3^k}}_{=2\frac{1}{3^{n+1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\frac{2}{2/3}\cdot\frac{1}{3^{n+1}}=\frac{1}{3^n}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0}\geq|\varphi(a)-\varphi(b)|$$

לכן, φ פונקציה חח"ע ועל ורציפה ממרחב קומפקטי למרחב האוסדורף ולכן הומאומורפיזם. ■

הערה 7.4.2 אפשר לבנות את $\psi=\varphi^{-1}$. כך ש:

$$(\psi_n)_{n=1}^{\infty}=\psi:C\to\{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

נבנה את הפונקציות:

$$\psi_n:C\to\{0,1\}$$

באופן של:

$$\psi_n=\tilde{\psi_n}\mid_C$$

נבנה את $\tilde{\psi_n}$ באופן הבא:

$$\tilde{\psi_n}:C_{n+1}\to\{0,1\}$$

$$\tilde{\psi_n}(x)=\begin{cases}0 & \text{בצד השמאלי של הקטע מ } C_n \text{ שחלקנו } x\\ 1 & \text{בצד הימני}\end{cases}$$

ברור כי $\tilde{\psi_n}$ קבועה מקומית על C_n ולכן רציפה. לכן גם $\psi_n=\tilde{\psi_n}\mid_C$ רציפה מתכונת טופולוגיית המכפלה $\psi=(\psi_n)_n$ רציפה.
מהגדרת C כחיתוך נובע כי ψ חח"ע. הטווח שלה כחיתוך כל קבוצה בסיסית

$$(a_1,\ldots,a_n)\times\{0,1\}^{\mathbb{N}}$$

ולכן צרוף.
כדי לסיים:

- או שבודקים ש φ,ψ פונקציות הפוכות.
- או שמשתמשים במשפט שהוכחנו קודם.

7.5 העקום של פיאנו

העקה רציפה ועל $f:[0,1]\to[0,1]^2$ מכוסה בתרגול.

פרק 8

החבורה היסודית

8.1 מבוא

תזכורת 8.1.1 חבורה היא קבוצה עם פעולה:

$$G \times G \to G$$

יש לה יחידה:

$$g \cdot e = e \cdot g = g$$

יש לה הופכי:

$$g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = e$$

והיא אסוציאטיבית:

$$(xy)\, z = x\,(yz)$$

אבל לא בהכרח קומוטטיבית. כלומר ייתכן: $xy \neq yx$.

למרחב טופולוגי X ולנקודה $x_0 \in X$ נבנה את החבורה היסודית של X בx_0 שתסומן:

$$\pi_1\,(X, x_0)$$

(קבוצת מחלקות שקילות של איזשהו יחס על איזשהי קבוצה).

תזכורת 8.1.2 הומומורפיזם של חבורות:
H, G חבורות. פונקציה $f : G \to H$ תקרא הומומורפיזם אם:

$$f\,(xy) = f\,(x)\, f\,(y)$$

לכל $x, y \in G$ זה גורר כי:

$$\begin{aligned} f\,(e_G) &= e_H \\ f\left(x^{-1}\right) &= (f\,(x))^{-1} \end{aligned}$$

תכונה חשובה מאוד של החבורה היסודית: כל העתקה רציפה של מרחב טופולוגי $f : X \to Y$ תתן לנו הומומורפיזם של חבורות:

$$f_* : \pi_1 (X, x_0) \to \pi_1 (Y, y_0)$$

כאשר $y_0 = f(x)$.

8.2 הכנות לקראת בניית π_1

יהיו X, Y מרחבים טופולוגיים ותהיינה $f, g : X \to Y$ רציפות.

הגדרה 8.2.1 נאמר כי f, g הומוטופיות אם "ניתן להזיז את f באופן רציף ל g". כלומר: קיימת העתקה רציפה:

$$F : X \times [0,1] \to Y$$

כך ש:

$$\begin{aligned} F(x,1) &= g(x) \\ F(x,0) &= f(x) \end{aligned}$$

הסיה למינוח הלא פורמלי: נגדיר $y \in [0,1]$ ונגדיר:

$$\begin{aligned} f_t : X &\to Y \\ f_t(x) &= F(x,t) \end{aligned}$$

הצמצום F לקו גובה מתאים ל t, $\{f_t\}_{0 \le t \le 1}$ משפחה רציפה של פונקציות המתחילה ב f ומסתיימת ב g.

$$\begin{aligned} f_0 &= f \\ f_1 &= g \end{aligned}$$

סיבוב טכני קטן אבל מועיל:
תהי A תת קבוצה של X. אם $F(a,t)$ אינה תלוייה ב t לכל $a \in A$ נאמר כי ההומוטופיה F היא "יחסית לA" כדי שזה יקרה חייב בפרט להתקיים $f(a) = F(a,0) = F(a,1) = g(a)$. כלומר:

$$f|_A = g|_A$$

הגדרה 8.2.2 מסילה במרחב טופולוגי X היא העתקה רציפה:

$$f : [0,1] \to X$$

הערה 8.2.3 נסמן $I = [0,1]$ לנוחות. הומוטופיה של מסילות היא כמובן: $F : I \times I \to X$ (רציפה)

הומוטופיה של מסילות ביחס לנקודות קצה היא הומוטופיה של מסילות ביחס לקבוצה $\{0,1\}$ (של שתי נקודות הקצה).
מזיזים באופן רציף את המסליה f למסילה g דרך המסילות f_t. להגיד שההומוטופיה היא ביחס לנקודות קצה משמעו כי נקודות הקצה הולכות לנקודות ב X שאינן תלויות ב t.

הגדרה 8.2.4 מסילה במרחב טופולוגי X היא $\alpha : I \to X$ רציפה תקרא סגורה אם $\alpha(0) = \alpha(1)$.

הערה 8.2.5 הראינו כי $[0,1]/_{0\sim 1}$ הומאומורפי למעגל S^1 ולכן המסילה סגורה מכילה אותו מידע כמו העתקה רציפה:

$$\overline{\alpha} : S^1 \to X$$

הגדרה 8.2.6 מרחב המסילות: יהי X מרחב טופולוגי. $x_0 \in X$ מרחב המסילות (הסגורות ב X) ביחס ל x_0 הוא:

$$P(X, x_0) = \{\alpha : I \to X \mid \ \alpha(0) = \alpha(1) = x_0\}$$

הגדרה 8.2.7 שרשור של מסילות: תהיינה $\alpha, \beta : I \to X$ ונניח כי $\alpha(1) = \beta(0)$. השרשור של α ו β שיסומן $\alpha \times \beta$ היא המסילה "α ואח"כ β". כלומר:

$$\alpha * \beta(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & 0 \le t \le \frac{t}{2} \\ \beta(2t-1) & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

השרשור הוא מסילה (כלומר רציפה) מ $\alpha(0)$ ל $\beta(1)$.
בפרט אם $\alpha, \beta \in P(X, x_0)$ אזי גם: $\alpha * \beta \in P(X, x_0)$.
וקבלנו "חוק כפל" $P(X, x_0) \times P(X, x_0) \to P(X, x_0)$.

למה 8.2.8

הומוטופיה של מסילות ביחס לנקודות קצה הוא יחס שקילות.

הערה 8.2.9 זה מקרה פרטי של הומוטופיה ביחס לתת קבוצה.

טענה 8.2.10

יהי X, Y מרחבים טופולוגיים אם $A \subset X$ אם $f, g, h : X \to Y$ רציפות אזי:

1. f הומוטופית לעצמה ביחס ל A.
2. f הומוטופית ל g ביחס ל $A \Leftarrow$ g הומוטופית ל f ביחס ל A.
3. f הומוטופית ל g ו g ל h ביחס ל A אזי f הומוטופית ל h ביחס ל A.

הערה 8.2.11 סימון: $f \sim_A g$.

הוכחה:

1. $F(x,t) = f(x)$ נותן $f \sim_A f$.
2. אם $F(x,t)$ נותנת $f \sim_A g$ אזי $F(x, 1-t)$ נותנת $g \sim_A f$.
3. $f \sim_H h$ אזי $f \sim_F g \sim_G g$.

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,t) & t \le \frac{1}{2} \\ G(x,t) & t \ge \frac{1}{2} \end{cases}$$

הסכמה בחיתוך $t = \frac{1}{2}$ נותנת רציפות H. מרציפות G, F.

■

הערה 8.2.12 אם $F(a,t)$ קבועה ב t , $G(a,t)$ קבועה ב t אזי: $H(a,t)$ קבועה ב t גם היא.

כמסקנה נקבל כי יחס ההומוטופיה ביחס לנקודת קצה על $P(X, x_0)$ הוא יחס שקילות.
נסמן את קבוצת מחלקות השקילות:

$$\pi(X, x_0) = {}^{P(X,x_0)}/_{\sim}$$

למה 8.2.13

אם $\alpha_1 \sim \alpha_2$ מסילות, $\beta_1 \sim \beta_2$ ב X. הומוטופיה ביחס לנקודות קצה. אז:

$$\alpha_1 * \beta_1 \sim \alpha_2 * \beta_2$$

כל אלה ב $P(X, x_0)$ אם כי היה מספיק להניח $\alpha_1(1) = \beta_1(0)$.
בהוכחה נגדיר את:

$$H : [0,1] \times [0,1] \to X$$

$$H(s,t) = \begin{cases} F(2s,t) & s \leq \frac{1}{2} \\ G(2s-1,t) & s \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

1. H רציפה כי נתון ש F, G רציפות ובחיתוך:

$$F\left(2 \cdot \frac{1}{2}, t\right) = F(1,t) = x_0 = G(0,t) = G\left(2 \cdot \frac{1}{2} - 1, t\right)$$

2. אם נסתכל ב $t = 0$ נקבל כי:

$$H(s,0) = \begin{cases} F(2s,0) & s \leq \frac{1}{2} \\ G(2s-1,0) & s \geq \frac{1}{2} \end{cases} = \begin{cases} \alpha(2s) & s \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2s-1) & s \geq \frac{1}{2} \end{cases} = (\alpha_1 * \beta_1)(s)$$

ובאותו אופן:

$$H(s,1) = (\alpha_2 * \beta_2)(s)$$

3. כמו כן, כמובן:

$$\begin{aligned} H(0,t) &= \text{const} \\ H(1,t) &= \text{const} \end{aligned}$$

מסקנה 8.2.14

חוק הרשור על $P(X, x_0)$ משרה חוק שרשור של מחלקות שקילות $\pi(X, x_0) \times \pi(X, x_0) \to \pi(X, x_0)$.

משפט 8.2.15

חוק הרשור על $\pi(X, x_0)$ נותן לה מבנה של חבורה.
איבר היחיסה: המסילה הקבועה $p(s) = x_0$ לכל $s \in [0,1]$.
ההפכי למסילה $\alpha(s)$ הוא $\alpha(1-s)$ ("אותה מסילה בכיוון הנגדי").

למסילה $\alpha \in P(X, x_0)$ נסמן ב $[\alpha]$ את מחלקת השילות של α ב $\pi(X, x_0)$.
עלינו להראות:

1. היחידה:

$$[\alpha * e] = [\alpha] = [e * \alpha]$$

2. הופכי:

$$\left[\alpha * \alpha^{-1}\right] = \left[\alpha^{-1} * \alpha\right] = [e]$$

3. אסוציאטיביות:

$$[(\alpha * \beta) * \gamma] = [\alpha * (\beta * \gamma)]$$

לכל $\alpha, \beta, \gamma \in P(X, x_0)$.

הוכחה:

1. נגדיר $F(s,t) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{2s}{t+1}\right) & s \in \left[0, \frac{t+1}{2}\right] \\ x_0 & s \in \left[\frac{t+1}{2}, 1\right] \end{cases}$. מתקיים $F\left(\frac{t+1}{2}, t\right) = \alpha(1) = x_0$, ולכן זו פונקציה רציפה. בנוסף, $F(s,0) = (\alpha * e)(s)$, $F(s,1) = \alpha(s)$, ולכן F נותנת את ההומוטופיה הדרושה בין α ל־$\alpha * e$, כלומר $[\alpha] = [\alpha * e]$.
2. מושאר כתרגיל להראות כי אם $\overline{\alpha}(s) = \alpha(1-s)$, אז $\overline{\alpha} = \alpha^{-1}$. רמז: "צריך לזרוק חבל ולמשוך אותו חזרה".
3. נגדיר:

$$F(s,t) = \begin{cases} \alpha\left(\frac{s}{\frac{t+1}{4}}\right) & s \in \left[0, \frac{t+1}{4}\right] \\ \beta\left(\frac{s - \frac{t+1}{4}}{\frac{t+2}{4} - \frac{t+1}{4}}\right) & s \in \left[\frac{t+1}{4}, \frac{t+2}{4}\right] \\ \gamma\left(\frac{s - \frac{t+2}{4}}{1 - \frac{t+2}{4}}\right) & s \in \left[\frac{t+2}{4}, 1\right] \end{cases}$$

נותר לבדוק רציפות. עבור $s = \frac{t+1}{4}$ נקבל $\alpha(1) = \beta(0)$, ועבור $s = \frac{t+2}{4}$ נקבל $\beta(1) = \gamma(0)$.

■

בפעם הבאה נוכיח שאם X קבוצה קמורה ב־$\mathbb{R}^n$ אזי $\Pi_1(X, x_0)$ היא החבורה הטריוויאלית

הערה 8.2.16 אם $f : X \to Y$ רציפה, אז מסילה α ב־X עוברת למסילה $f \circ \alpha$ ב־Y. אם $\alpha \in P(X, x_0)$ אז $f \circ \alpha \in P(Y, f(x_0))$, ואם $\alpha, \beta \in P(X, x_0)$ הומוטופיות $\alpha \sim_F \beta$, אז $f(\alpha) \sim_{f \circ F} f(\beta)$.
בנוסף, $f \circ (\alpha * \beta) = (f \circ \alpha) * (f \circ \beta)$.

מסקנה 8.2.17

ההרכבה עם f מוגדרת היטב מ־$\Pi_1(X, x_0)$ ל־$\Pi_1(Y, f(x_0))$ ונותנת הומומורפיזם של חבורות.

טענה 8.2.18

יהי Y מרכיב הקשירות המסילתית של x_0 ב־X. אז $P(Y, x_0) = P(X, x_0) \Longrightarrow \pi_1(Y, x_0) \cong \pi_1(X, x_0)$.

טענה 8.2.19

אם $\beta : I \to X$ מקיימת $\beta(0) = x_0$, $\beta(1) = x_1$, אז מתקבל איזומורפיזם של חבורות: $\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(X, x_1)$ לפי $[\alpha] \mapsto \left[\beta^{-1} * \alpha * \beta\right]$.
כמו כן, $f : X \to Y$ רציפה משרה $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ לפי $[\alpha] \mapsto [f \circ \alpha]$.

שתי הטענות האחרונות מוכחות בתרגיל 13.

הגדרה 8.2.20 תחום דמוי כוכב: תחום $C \subset \mathbb{R}^n$ יקרא **דמוי כוכב ביחס ל־** $x_0 \in V$ אם לכל $x \in V$, כל קטע קשיר $\overline{x_0 x}$ מוכל ב־V.

דוגמה 8.2.21 קבוצה קמורה היא דמוית כוכב ביחס לכל נקודה שלה.

טענה 8.2.22

תהי $V \subset \mathbb{R}^n$ דמויית כוכב ביחס ל־$x_0 \in V$, אז $\pi_1(V, x_0)$ היא החבורה הטאיוויאלית (ונסמן $\pi_1(V, x_0) = 1$).

הערה 8.2.23 קבוצה דמוית כוכב היא קשירה מסילתית, ולכן ינבע מיידית ש־$\pi_1(V, x) = 1$ לכל $x \in V$.

הוכחה: תהי $\alpha \in P(V,x_0)$, מספיק להראות כי $\alpha \sim e$ (כלומר α הומוטופית למסילה הקבועה $e(t)=x_0$ בהומוטופיה השומרת נקודות קצה).

נגדיר את ההומוטופיה $F: I\times I \to V$ ע"י $F(s,t)=(1-t)\alpha(s)+t\underbrace{x_0}_{e(s)}$. ברור כי f רציפה עם התכונות הנדרשות. ■

משפט 8.2.24

החבורה היסודית של המעגל מקיימת $\pi_1(S^1,x_0)\cong\mathbb{Z}$ (עבור $x_0\in S^1$ כלשהי).

בהוכחה נבנה את האיזומורפיזם, שנקרא "הדרגה" של המסילה. אינטואיטיבית, דרגה של מסילה תהיה כמה פעמים המסילה מסתובבת סביב המעגל.

הגדרה 8.2.25 העתקת האקספוננט (ההעתקה המעריכית): $\exp:\mathbb{R}\to S^1$ מוגדרת כך ש־$\exp(t)=e^{2\pi it}=(\cos(2\pi t),\sin(2\pi t))$.

הערה 8.2.26 תכונות מרכזיות:

- $\exp(t_1+t_2)=\exp(t_1)\exp(t_2)$
- $\exp$ רציפה
- $\exp$ פתוחה. יותר מזה, היא הומאומורפיזם מקומי. ליתר דיוק, לכל $z\in S^1$, נניח כי $z=\exp(t)$, אז $\exp:\left(t-\frac{1}{2},t+\frac{1}{2}\right)\to S^1\setminus\{-z\}$ היא הומאומורפיזם.
  כמובן ש־$z=\exp\left(t+\frac{1}{2}\right)=\exp\left(t-\frac{1}{2}\right)$. ההעתקה ההפוכה תסומן $\log: S^1\setminus\{-z\}\to\left(t-\frac{1}{2},t+\frac{1}{2}\right)$, ונשים לב שהיא תלויה ב־$t$ (אפשר לסמן $\log_t$).
  כלומר, אם זורקים נקודה אחת מהמעגל, אז הוא שקול לקטע פתוח.
- עבור t נתון, $\exp(s)=\exp(t)\Leftrightarrow s-t\in\mathbb{Z}$.

הגדרה 8.2.27 הרמה של פונקציה: יהי X מ"ט, $f:X\to S^1$ רציפה. **הרמה של** f היא פונקציה רציפה $\tilde{f}:X\to\mathbb{R}$ כך ש־$f=\exp\circ\tilde{f}$..

למה 8.2.28 למות ההרמה

1. לכל מסילה $\alpha: I\to S^1$ המקיימת $\alpha(0)=1\in\mathbb{C}$ קיימת הרמה יחידה $\tilde{\alpha}: I\to\mathbb{R}$ המקיימת $\tilde{\alpha}(0)=0$. ("למת הרמת המסילה")
2. יהיו $\alpha,\beta: I\to S^1$ מסילות המקיימות $1=\beta(0)=\alpha(0)$, ותהי $F: I\times I\to S^1$ הומוטופיה מ־α ל־β (איז הנחה של שמירת נקודות קצה). אז קיימת ל־F הרמה יחידה $\tilde{F}: I\times I\to\mathbb{R}$ כך ש־$\tilde{\alpha}(s)=\tilde{F}(s,0)$, $\tilde{\beta}(s)=\tilde{F}(s,1)$ כאשר $\tilde{\alpha},\tilde{\beta}$ כמו בלמת הרמת המסילה. ("למת הרמת ההומוטופיה")

הוכחה: לשתי הלמות ביחד. נסמן ב־K את I (עבור הלמה הראשונה) ואת $I\times I$ עבור הלמה השניה - K זה סימון למרחב מטרי קומפקטי.

ראשית נוכיח יחידות. נניח שיש שתי הרמות, $\tilde{f}_1,\tilde{f}_2: K\to\mathbb{R}$ של $f: K\to S^1$, ונניח כי הן מסכימות ב־$k_0\in K$ (קיום k_0 כזה מובטח בהנחות הלמות). ההפרש $\tilde{f}_1-\tilde{f}_2=\varphi: K\to\mathbb{R}$ יקיים את התכונות הבאות:

1. $\varphi(k_0)=0$
2. $\exp\varphi(k)=\frac{\exp\tilde{f}_1(k)}{\exp\tilde{f}_2(k)}=\frac{f(k)}{f(k)}=1$ לכל $k\in K$

לפיכך, $\varphi(k)\in\mathbb{Z}$, אבל φ רציפה ומקיימת $\varphi(k_0)=0$ ולכן $\varphi\equiv 0$, ולכן $\tilde{f}_1=\tilde{f}_2$ (נובע מכך ש־K מרחב קשיר).

להוכחת קיום ההרמות, נסמן $\log: S^1\setminus\{-1\}\to\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ ההפוכה המתאימה ל־$\exp$. נבחר $N\in\mathbb{N}$ גדול מספיק כך ש־$|f(k)-f(k')|<1$ לכל $|k-k'|\le\frac{1}{N}$. N כזה קיים כי K מטרי קומפקטי ולכן f רציפה במ"ש עליו.

מה שחשוב הוא ש־k,k' מספיק קרובים, ו־$f(k),f(k')$ לא אנטיפודיות. לכל $0\le j\le N$ ולכל $x\in K$ מתקיים $\left|\frac{j+1}{N}x-\frac{j}{N}x\right|=\left|\frac{x}{N}\right|<\frac{2}{N}$, אזי $\frac{f\left(\frac{j+1}{N}x\right)}{f\left(\frac{j}{N}x\right)}=g_j(x)\in S^1$ תקיים $g_j(x)\neq -1$ ולכן נוכל להרים את $f(k)=\prod_{j=0}^{N-1}g_j(k)$ ע"י הפונקציה הרציפה: $\tilde{f}=\sum_{j=0}^{N-1}\log g_j(k)$.

למעשה, חילקנו את f להרבה פונקציות קטנות שלא יכולות לקבל נקודות אנטיפודיות. כעת, ברור כי $\exp \tilde{f}(x) = f(k)$ לכל $k \in K$, ולכן זו אכן הרמה של f.

נראה את התנאים הנוספים:

בלמה 1, $\tilde{f}(0) = \sum_{j=0}^{N-1} \log g_j(0) = N \cdot \log\left(\frac{f(0)}{f(0)}\right) = N \log 1 = N \cdot 0 = 0$ כנדרש.

בלמה 2, $\tilde{F}(s,0)$ היא ההרמה של $f(s,0) = \alpha(s)$ שהתקבלה כמו בלמה 1, ולכן $\tilde{F}(0,0) = \tilde{\alpha}(s) = 0$, וכנ"ל ל־$\tilde{\beta}(s) = \tilde{F}(s,1)$.

■

נחשב את החבורה היסודית של המעגל, $\pi_1(S^1,1)$. ראשית נגדיר את הדרגה - ההעתקה $\deg : \pi_1(S^1,1) \to \mathbb{Z}$.

הגדרה 8.2.29 למסילה $\alpha \in P(S^1,1)$, תהי $\tilde{\alpha}$ ההרמה שלה ל־$\tilde{\alpha} : I \to \mathbb{R}$ המקיימת כמו בלמה $\tilde{\alpha}(0) = 0$. נגדיר $\deg \alpha = \tilde{\alpha}(1)$.

יודעים ש־$\exp \tilde{\alpha}(1) = \alpha(1) = 1$, ולכן יודעים ש־$\tilde{\alpha}(1) \in \exp^{-1}(1) = \mathbb{Z}$. זה נותן לנו העתקה $P(S^1,1) \to \mathbb{Z}$ לפי $\alpha \mapsto \tilde{\alpha}(1)$.

טענה 8.2.30

אם $\alpha \overset{F}{\sim} \beta$ (הומוטופיה שומרת נקודות קצה) אזי $\deg \alpha = \deg \beta$.

אם נראה זאת, נקבל העתקה מוגדרת היטב $\deg : \pi_1(S^1,1) \to \mathbb{Z}$. **הוכחה:** למת הרמת ההומוטופיה (שמרימה את ההומוטופיה F להומוטופיה בין $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ שמסכימות על 0, ולכן $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(1)$ (להפרש יש $\exp = 1$)). ■

13 - רייצ'ל
נעה)

משפט 8.2.31

$\deg : \pi_1(S^1,1) \to \mathbb{Z}$ איזומורפיזם של חבורות.

הוכחה: ראשית, נראה על. יהי $n \in \mathbb{Z}$ ונגדיר מסילה $\hat{\alpha} : I \to \mathbb{R}$ ע"י $\hat{\alpha}(s) = n \cdot s$. נגדיר $\alpha : I \to S^1$ ע"י $\alpha(s) = \exp \hat{\alpha}(s)$. אז $\alpha \in P(S^1,1)$ ו־$\hat{\alpha}$ הרמה של α המתחילה ב־0. מיחידות, $\tilde{\alpha} = \hat{\alpha}$, ולכן $\deg \alpha = \hat{\alpha}(1) = n$.

שנית, נראה חח"ע. נניח $\deg(\alpha) = \deg(\beta) \in \mathbb{Z}$, צ"ל $\alpha \sim \beta$ בהומוטופיה ששומרת נקודות קצה. יהיו $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ ההרמות של α, β, $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} : I \to \mathbb{R}$, כך ש־$\tilde{\alpha}(1) = \deg \alpha = \deg \beta = \tilde{\beta}(1)$, וכן $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0) = 0$.

נגדיר $\tilde{H} : I \times I \to \mathbb{R}$ ע"י $\tilde{H}(s,t) = (1-t)\tilde{\alpha}(s) + t\tilde{\beta}(s)$. $\tilde{H}$ הומוטופיה מ־$\tilde{\alpha}$ ל־$\tilde{\beta}$ שומרת נקודות קצה, כאשר $\tilde{H}(1,t)$ קבועה כי הדרגות שוות. אם נגדיר $H : I \times I \to S^1$ ע"י $H(s,t) = \exp \tilde{H}(s,t)$, אז H הומוטופיה שומרת נקודות קצה מ־α ל־β, ובפרט $\alpha \sim \beta$.

שלישית, נראה הומומורפיזם. תהיינה $\alpha, \beta \in P(S^1,1)$ מסילות. נרצה לחשב את $\deg \alpha * \beta$. נסמן ב־$\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}$ את ההרמות של α, β ל־$\mathbb{R}$ המתחילות ב־0. נבנה באמצעותן את ההרמה הרציפה של $\alpha * \beta$ המתחילה ב־0. נגדיר מסילה $\gamma : I \to \mathbb{R}$ ע"י:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \tilde{\alpha}(2t) & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \tilde{\beta}(2t-1) + \deg \alpha & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

γ מוגדרת היטב ב־$t = \frac{1}{2}$ כי $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\beta}(0) + \deg \alpha$, ולכן γ רציפה, מתחילה ב־0 ומרימה את $\alpha * \beta$ (כי $\exp \gamma(t) = \begin{cases} \alpha(2t) & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \exp \tilde{\beta}(2t-1) + \text{Integer} = \exp\left(\tilde{\beta}(2t-1)\right) = \beta(2t-1) & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$). מיחידות ההרמה, $\gamma = \alpha \tilde{*} \beta$ ולכן $\deg(\alpha * \beta) = \deg \alpha + \deg \beta$, כלומר $\deg$ הומומורפיזם. ■

18

תזכורת 8.2.32 הוכחנו כי $\pi_1(S^1,1) \cong \mathbb{Z}$ עם העתקת הדרגה $\deg$.

יש כמה שימושים לעניין זה:

- $\mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\} \cong S^1 \times \mathbb{R}^{>0}$, ע"י כך שעבור $(z,t) \in S^1 \times \mathbb{R}^{>0}$ שולחים ל־$tz \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, או בכיוון ההפוך $v \mapsto \left(\frac{v}{\|v\|}, \|v\|\right)$.
  לפיכך, $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0\}, 1) \cong \pi_1(S^1 \times \mathbb{R}^{>0}, (1,1)) \cong \underbrace{\pi_1(S^1,1)}_{\cong \mathbb{Z}} \times \underbrace{\pi_1(\mathbb{R}^{>0},1)}_{\cong \{1\}} \cong \mathbb{Z}$.
- בתרגיל נראה כי לספירה S^n עבור $n \geq 2$ מתקיים $\pi_1(S^n, p_0) \cong \{1\}$ ואז אותה שיטה מראה כי $\pi_1(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}, \cdot) = \pi_1(S^n, \cdot) \times \pi_1(\mathbb{R}^{>0}, \cdot) = \{1\} \times \{1\} = \{1\}$.

מסקנה 8.2.33

$\mathbb{R}^n\setminus\{\cdot\}\not\cong\mathbb{R}^2\setminus\{\cdot\}$ עבור $n\geq 3$, ולכן גם $\mathbb{R}^n\not\cong\mathbb{R}^2$ ל־$n\geq 3$ (וכמובן, $\mathbb{R}^1\not\cong\mathbb{R}^2$).
בעבר ראינו כי $\mathbb{R}\not\cong\mathbb{R}^n$ ל־$n\neq 1$, וכעת גם $\mathbb{R}^2\not\cong\mathbb{R}^n$ ל־$n\neq 2$. נכון גם באופן כללי ש־$\mathbb{R}^n\not\cong\mathbb{R}^m$ עבור $n\neq m$, אבל זה דורש טופולוגיה אלגברית.

למה 8.2.34

לא קיימת העתקה רציפה $f:B_2\to S^1$ (כאשר $B_2=\{z\in\mathbb{C}\mid |z|\leq 1\}$ עיגול היחידה הסגור) המקיימת $f(z)=z$ לכל $z\in S^1$.

הוכחה: נניח בשלילה כי קיימת העתקה כזו, ונסמן ב־i את העתקת ההכלה (זהות) $i:S^1\to B_2$, כך שההרכבה $S^1\xrightarrow{i}B_2\xrightarrow{f}S^1$ היא העתקת הזהות מ־S^1 לעצמו.

העתקות רציפות בין מרחבים משרות הומומורפיזמים של חבורות יסודיות, ולכן נקבל:

$$\pi_1\left(S^1,1\right)\xrightarrow{i_*}\pi_1\left(B_2,1\right)\xrightarrow{f_*}\pi_1\left(S^1,1\right)$$

$$\mathbb{Z}\xrightarrow{i_*}\{1\}\xrightarrow{f_*}\mathbb{Z}$$

ההרכבה f_*i_* חייבת לכן להיות ההעתקה הטריוויאלית (זהותית 0), אך מצד שני היא ההעתקה המושרית על ידי הזהות כי $Id_{S^1}=f\circ i$ ולכן היא גם הזהות, וזו סתירה כי העתקת האפס על $\mathbb{Z}$ והזהות שונות. ■

ניתן להכליל את הלמה:

אם $\alpha:S^1\to S^1$ העתקה רציפה, היא משרה הומומורפיזם בין החבורות היסודיות $\pi_1\left(S^1,1\right)\to\pi_1\left(S^1,\alpha(1)\right)\cong\pi_1\left(S^1,1\right)$ (כאשר ההומומורפיזם השני נובע מכך ש־S^1 קשיר מסילתית), ויש לה דרגה (אינטואיטיבית, מספר הסיבובים שהנקודה בתמונה מסתובבת כשהנקודה במקור מסתובבת פעם אחת). הדרגה של α במקרה זה היא n אם ההומומורפיזם המושרה הנ"ל $\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ הוא הכפלה ב־n.

למה 8.2.35

אם ל־$\alpha:S^1\to S^1$ רציפה יש הרחבה רציפה ל־$f:B_2\to S^1$ (כלומר f רציפה ומקיימת $f|_{S^1}=\alpha$), אז בהכרח $\deg\alpha=0$.

הוכחה: כמו בלמה, נקבל $\alpha_*:\mathbb{Z}\xrightarrow{\deg}\mathbb{Z}$ אבל זה שווה ל־$f_*i_*:\mathbb{Z}\xrightarrow{0}\mathbb{Z}$, ולכן $\deg\alpha=0$. ■

משפט 8.2.36 משפט נקודת השבת של ברואור

יהי $B_n=\{v\in\mathbb{R}^n\mid \|v\|\leq 1\}$ כדור היחידה ב־$\mathbb{R}^n$. אזי לכל העתקה רציפה $f:B\to B$ יש נקודת שבת ($x\in B$ כך ש־$f(x)=x$).

הערה 8.2.37 לכדור פתוח זה לא נכון ־ למשל, כדור פתוח הומאומורפי ל־$\mathbb{R}^n$, ועל $\mathbb{R}^n$ יש העתקה שמזיזה ב־1 (בכיוון כלשהו).

הוכחה: נוכיח רק עבור $n=2$.

נניח בשלילה כי קיימת $f:B_2\to B_2$ רציפה שאין לה נקודת שבת. נגדיר פונקציה $g:B_2\to S^1$ על ידי "הציור" הבא (סעמק... אנסה לתאר במילים):

עבור $x\in B_2$, מתקיים בהכרח $f(x)\neq x$, ולכן נחבר ישר שמתחיל ב־$f(x)$, עובר דרך x, ומגיע לשפה S^1. את נקודת החיתוך עם השפה נגדיר כ־$g(x)$.

זה מוגדר היטב כי $f(x)\neq x$, ומאותה סיבה (ומרציפות f) הפונקציה $x\mapsto g(x)$ רציפה (לא, זה לא פורמלי אבל הוא גם לא הוכיח פורמלית). להוכחה פורמלית כותבים נוסחאות:

$$g(x)=x+t\cdot(f(x)-x)$$

עבור $t\geq 0$ יחיד שניתן לחשב מתוך המשוואה $1=\|g(x)\|^2=\langle x+t(f(x)-x),x+t(f(x)-x)\rangle=\|x\|^2+2t\langle x,f(x)-x\rangle+t^2\|f(x)-x\|^2$, ואז הפיתרון למשוואה הריבועית שקיבלנו (עבור $t\geq 0$) יחיד ורציף ב־t.

קיום g סותר את הלמה, כי g רציפה וברור כי עבור $x\in S^1$ מתקיים $g(x)=x$, ולכן $g|_{S^1}=Id_{S^1}$, בסתירה.

עבור המקרים $n\neq 2$, אם נדע להוכיח את הגרסה המוכללת של הלמה עבור n כללי, נוכל להשתמש באותה הוכחה בדיוק. הלמה אכן נכונה עבור n כללי, אבל דורשת טופולוגיה אלגברית. ■

למה 8.2.38 הלמה של אוריסון

יהי X מ"ט נורמלי, ותהיינה A,B סגורות וזרות ב־X. אזי קיימת פונקציה רציפה $f:X\to[0,1]$ כך ש־$f|_A\equiv 0,\ f|_B\equiv 1$.

הערה 8.2.39 $f^{-1}\left(\left[0,\frac{1}{3}\right)\right)$, $f^{-1}\left(\left(\frac{2}{3},1\right]\right)$ הן פתוחות זרות המפרידות את A מ־B. הלמה נותנת רצף של קבוצות כאלו.

הערה 8.2.40 יכול להיות שזה משפט שסתם נקרא "למה". הוא לא אמר.

הוכחה: תהי P קבוצת הרציונליים ב־$[0,1]$. זו קבוצה בת מנייה. נסדר אותה בסדר כלשהו $P=\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ כך ש־$p_0=1,\ p_1=0$.
לכל $p\in P$ נבחר קבוצה פתוחה U_p באופן הבא:
$U_1=X\backslash B$. U_0 תיבחר כפתוחה כך ש־$A\subset U_0\subset\overline{U_0}\subset X\backslash B=U_1$ (שקיימת מנורמליות).
הנחת האינדוקציה היא של־$n\geq 2$ בנינו את $U_{p_0},\dots,U_{p_{n-1}}$ כך ש־$\overline{U_{p_i}}\subset U_{p_j}$ אם $p_i<p_j$.
שלב האינדוקציה: נתבונן ב־p_n. נבחר מתוך $\{p_0,\dots,p_{n-1}\}$ את שני אלה ש־p_n יושב ביניהם - p הוא הגדול ביותר מביניהם שקטן ממנו, ו־q הוא הקטן ביותר מביניהם שגדול ממנו, כלומר $p<p_n<q$.
אנו יודעים כי $\overline{U_p}\subset U_q$, ונבחר את U_{p_n} כך ש־$\overline{U_p}\subset U_{p_n}\subset\overline{U_{p_n}}\subset U_q$ (אפשרי מנורמליות), וסיימנו את צעד האינדוקציה.
בנינו את U_p לכל $p\in[0,1]\cap\mathbb{Q}$. נגדיר את U_t לכל $t\in\mathbb{Q}$ לפי: $U_t=\begin{cases}\varnothing & t<0\\ U_t & t\in[0,1]\\ X & t\geq 1\end{cases}$.
נגדיר את הפונקציה $f:X\to\mathbb{R}$ ע"י $f(x)=\inf\{p\in\mathbb{Q}\mid x\in U_p\}$.
מהגדרתה, $0\leq f(x)\leq 1$. ברור כי $f|_{U_0}\equiv 0,\ f|_{X\backslash U_1}\equiv 1$, ולכן בפרט $f|_A\equiv 0,\ f|_B\equiv 1$. נותר להוכיח כי f רציפה.
מספיק כי לכל קטע פתוח (a,b) ולכל $x\in f^{-1}((a,b))$ יש סביבה V של x ב־X שתמונתה $f(V)$ מוכלת ב־(a,b) (מקור של פתוחה בסיסית ב־$\mathbb{R}$ פתוח ב־X).
נבחר רציונליים p,q כך ש־$a<p<f(x)<q<b$. אזי $U_q\backslash\overline{U_p}$ היא סביבה פתוחה של x כנדרש וקיומה מוכיח את רציפות f. ■

משפט 8.2.41 משפט המטריזציה של אוריסון

יהי X מ"ט נורמלי עם בסיס בן מנייה. אזי X מטריזבילי, כלומר קיימת עליו מטריקה המשרה את הטופולוגיה הנתונה.

הערה 8.2.42 כמו הלמה של אוריסון, מקבלים פונקציה מעניינת ל־$\mathbb{R}$: $d:X\times X\to\mathbb{R}$.

הוכחה: לכל שתי קבוצות בסיסיות U_n,U_m (כך ש־$n,m\in\mathbb{N}$) כך ש־$\overline{U_m}\subset U_n$ נבנה $f_{m,n}:X\to[0,1]$ כמו בלמה של אוריסון (כלומר $f_{m,n}|_{\overline{U_m}}\equiv 0,\ f_{m,n}|_{X\backslash U_n}\equiv 1$), ומוכיחים כי אוסף הפונקציות הזה P - שהוא בן מנייה - משכן את X הומאומורפית ל"קוביה" $[0,1]^{|P|}$, שהוא מרחב מטרי. ■